2 軸剛性偏心骨組の動特性と並進-捩れ連成唸り振動 についての解析的考察

ANALYTICAL STUDY ON DYNAMIC CHARACTERISTICS OF BUILDING FRAMES WITH BI-AXIAL ECCENTRICITY AND COUPLED LATERAL-TORSIONAL BEAT OSCILLATION

坂本 順*, 曲 華**, 服部 匠***

Jun SAKAMOTO, Hua QU and Takumi HATTORI

Analytical derivation of the impulse response functions and time-domain response analysis by the Duhamel integral are presented for single and multi-story building frames with biaxial stiffness eccentricities. The impulse response functions are derived in closed-form expressions through the Laplace transform of the equations of the coupled lateral-torsional motion and analytical solutions for the coupled responses to white noise and wind-induced force excitations are obtained. Analytical results and numerical examples show that the beat oscillations caused by the combination of responses of closely spaced modes dominate in the coupled response when the frames have small stiffness eccentricities and specific values of mass-inertia radius to stiffness radius ratio so that the natural frequencies are close.

The analytical solutions presented in this paper are used to study the wind-induced vibration of high-rise buildings.

Keywords : *dynamic analysis, 3-dimensional frame, lateral-torsional response, beat oscillation*

1. まえがき

本論文は、建築骨組の並進-捩れ連成振動特性を系統的に明らかにする目的から、1方向入力を受ける2軸剛性偏心立体骨組の動特性と連成応答について解析的考察を加えたものである。本論文の2節では、1層立体骨組および特別なクラスの多層立体骨組について、解析的考察における連成運動方程式の構成と連成系の固有振動数特性について述べ、3節では、連成運動方程式のラプラス変換手法により連成系の単位衝撃応答関数の簡潔な解析表現を導き、さらに単位衝撃応答関数のフーリエ変換によって得られる周波数伝達関数の解析表現が示されている。4節では、3節で導いた単位衝撃応答関数に基づいて並進-捩れ連成振動において励起される連成唸り振動の基本的性状について述べている。連成振動において振動系の2つ、あるいは2つ以上の固有振動数が互いに近接すると連成唸り振動が励起されることは既に知られているが、建築骨組の並進-捩れ連成振動では、骨組の剛性偏心が小さく、かつ質量・剛性半径比が特定の値に近づくと近接した固有円振動数をもつ動特性系となり、

連成唸りによる特異な振動が励起される。連成振動における唸り振動は、軽い減衰系で継続時間が長い振動において顕著に生じ、それによって捩れとともに入力方向に直交する方向の並進振動が増幅されることから、不可避免的な微小な捩れ偏心が存在する高層建築物において地震よりも風による振動問題に関連してその動的特性を明らかにしておく必要がある。このような視点から、本稿の5節では連成系の単位衝撃応答解とデュアメル積分手法を用いて、風力を模擬した定常ホワイトノイズおよび変動風力による不規則加振に対する並進-捩れ連成応答解を導き、これらの応答解の数値計算例によって、近接した固有振動数をもつ連成系の動的応答特性について考察を加えている。さらに、6節では、2方向入力および捩れ入力時の応答解について要約して述べている。本論文の解析的考察は、高層建築物の風振動問題についての基礎的知見を提示するものである。

2. 運動方程式と固有振動数特性

2.1 1層立体骨組

* 名古屋大学 教授・工博
** 名古屋大学 大学院生
*** (株) 竹中工務店

Professor of Nagoya Univ., Dr. Eng.
Graduate Student of Nagoya Univ.
Takenaka Co., Ltd.

2軸剛性偏心・1方向入力系（図—1(a) 参照）の並進-振れ連成運動方程式は、(1) 式のように表される。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & e_y \\ 0 & 1 & e_x \\ e_y & e_x & e_x^2 + e_y^2 + \rho^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix} + \xi \omega_y^2 \begin{bmatrix} \tilde{k}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} + \omega_y^2 \begin{bmatrix} \tilde{k}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ e_x \end{Bmatrix} f(t) \cdots (1)$$

ここに、 e_x, e_y = 剛性偏心、 ρ = 質量回転半径、 $r = \sqrt{K_x/K_y}$ = 剛性半径、 $\omega_y = \sqrt{K_y/m}$ = 非連成並進 (y 方向) 固有円振動数、 $\tilde{k} = \sqrt{K_x/K_y} = \omega_x/\omega_y$ = 振動数比、 $\xi = 2h_k/\omega_k$ ($k=1, 2, 3$) = 振動数比例型減衰パラメーター、 $x(t), y(t)$ および $z(t) = x, y$ 方向並進変位および振れ変位、 $f(t)$ = 加振力である。

並進-振れ連成系において励起される唸り振動の考察に関連して、連成系の固有振動数特性について述べておく。

(1) 式において $\xi=0, f(t)=0$ とおいた非減衰自由運動方程式から、下記の固有値方程式が導かれる。

$$\Lambda^6 - [1 + \bar{e}_x^2 + \bar{\rho}^2 + \tilde{k}^2(\bar{e}_y^2 + \bar{\rho}^2)] \bar{\rho}^{-2} \omega_y^2 \Lambda^4 + [1 + \tilde{k}^2(1 + \bar{e}_x^2 + \bar{e}_y^2 + \bar{\rho}^2)] \bar{\rho}^{-2} \omega_y^2 \Lambda^2 - \tilde{k}^2 \bar{\rho}^{-2} \omega_y^6 = 0 \cdots (2)$$

この連成振動系の固有円振動数は、(2) 式の Λ についての複3次方程式の根として得られる。これらの3個の固有円振動数 ω_k ($k=1, 2, 3$) は、(2) 式の固有値方程式の係数と根との関係から下記の関係をもつ。

$$\begin{aligned} \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 &= [1 + \bar{e}_x^2 + \bar{\rho}^2 + \tilde{k}^2(\bar{e}_y^2 + \bar{\rho}^2)] \bar{\rho}^{-2} \omega_y^2 \\ &= (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \omega_y^2 \\ \omega_1^2 \omega_2^2 + \omega_2^2 \omega_3^2 + \omega_3^2 \omega_1^2 &= [1 + \tilde{k}^2(1 + \bar{e}_x^2 + \bar{e}_y^2 + \bar{\rho}^2)] \bar{\rho}^{-2} \omega_y^4 \\ &= (\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2) \omega_y^4 \\ \omega_1^2 \omega_2^2 \omega_3^2 &= \tilde{k}^2 \bar{\rho}^{-2} \omega_y^6 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \omega_y^6 \end{aligned} \cdots (3)$$

ここに、 $\bar{e}_x, \bar{e}_y = e_x/r, e_y/r$, $\bar{\rho} = \rho/r$ である。本論文では、(3) 式中の λ_k ($k=1, 2, 3$) を連成系の固有

$$m \begin{bmatrix} E & 0 & S_y \\ 0 & E & S_x \\ S_y^T & S_x^T & S_y^T S_y + S_x^T S_x + \rho^2 E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix} + \xi \begin{bmatrix} Q_x & 0 & 0 \\ 0 & Q_y & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_x & 0 & 0 \\ 0 & Q_y & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E \\ S_x^T \end{bmatrix} p_f f(t) \cdots (5)$$

ここに、

$$S_x = T^{-1} X_s T, \quad X_s = \text{diag}[-x_{s,n}, \dots, -x_{s,i}, \dots, -x_{s,1}] \\ S_y = T^{-1} Y_s T, \quad Y_s = \text{diag}[y_{s,n}, \dots, y_{s,i}, \dots, y_{s,1}]$$

図—1 2軸剛性偏心骨組モデル

振動数パラメーターという。

特別な骨組モデルとして x 方向と y 方向の剛性が同じ ($\tilde{k}=1.0$) 骨組では、固有円振動数は、偏心率 $\bar{e}_x, \bar{e}_y$ および質量・剛性半径 $\bar{\rho}$ によって下式のように表される。

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{(1 + \bar{e}_x^2 + \bar{e}_y^2 + \bar{\rho}^2) \mp \sqrt{(1 + \bar{e}_x^2 + \bar{e}_y^2 + \bar{\rho}^2)^2 - 4\bar{\rho}^2}}{2\bar{\rho}^2} \omega_y^2 \\ &\equiv \lambda_1^2 \omega_y^2 \\ &\equiv \lambda_3^2 \omega_y^2 \\ \omega_2^2 &= \lambda_2^2 \omega_y^2 \quad (\lambda_2=1.0) \end{aligned} \cdots (4)$$

図—2 は、 $\tilde{k}=1.0, 0.8$; $\bar{e}_x = \bar{e}_y = 0.05, 0.10, 0.15$ の場合について連成系の固有円振動数の特性を図示したものである。同図に示されるように、 $\tilde{k}=1.0$ の場合には偏心率が微小 ($\bar{e}=0.05$) で質量・剛性半径比 $\bar{\rho}$ が 1.0 の近傍の値をとるとき、3個の固有円振動数が近接した動特性系となる。また、 $\tilde{k}=0.8$ の例では、 $\bar{\rho} \approx 1.0$ および $\bar{\rho} \approx 1.2$ の近傍で、それぞれ ω_2 と ω_3 , および ω_1 と ω_2 の2つの固有円振動数が互いに近接する動特性系となる。

このような固有振動数が近接した並進-振れ連成系では、4節に述べるように連成唸り振動が励起される。

2.2 特別なクラスの n 層立体骨組

2軸剛性偏心、1方向入力の n 層せん断型立体骨組（図—1(b)）の並進-振れ連成運動方程式は、(5) 式のように記述される。

$$\begin{aligned} Q_x &= T^T K_x T, \quad K_x = \text{diag}[K_{x,n}, \dots, K_{x,i}, \dots, K_{x,1}] \\ Q_y &= T^T K_y T, \quad K_y = \text{diag}[K_{y,n}, \dots, K_{y,i}, \dots, K_{y,1}] \\ R &= T^T K_z T, \quad K_z = \text{diag}[K_{z,n}, \dots, K_{z,i}, \dots, K_{z,1}] \\ E &= \text{単位行列}, \quad T = \text{変換行列}, \quad p_f = \text{加振項ベクトル} \end{aligned}$$

図—2 2軸剛性偏心系の固有円振動数特性

上式において $x_{s,i}$, $y_{s,i}$ および $K_{x,i}$, $K_{y,i}$, $K_{z,i}$ は、それぞれ i 層の振れ中心座標および x , y 方向剛性、振れ中心回りの振れ剛性、 ρ および ξ は、質量半径および剛性比例型粘性減衰の減衰パラメーターである。なお、質量は全床にわたって同一の分布とする。

本論文では、高層骨組の並進-振れ連成振動の基本的特性と応答解を解析的に示す目的から、下記 (i), (ii) の骨組特性をもつ特別なクラスの n 層立体骨組について述べる。

(i) 全層同一の剛性偏心

$$\begin{aligned} |x_{s,n}| &= |x_{s,n-1}| = \cdots = |x_{s,1}| = e_x \\ |y_{s,n}| &= |y_{s,n-1}| = \cdots = |y_{s,1}| = e_y \end{aligned}$$

(ii) 全層同一の剛性半径

$$\begin{aligned} r_{y,n} &= r_{y,n-1} = \cdots = r_{y,1} = r \\ r_{x,n} &= r_{x,n-1} = \cdots = r_{x,1} = r/\tilde{k} \end{aligned}$$

ここに、

$$r = \sqrt{K_{z,i}/K_{y,i}}, \quad \tilde{k} = \sqrt{K_{x,i}/K_{y,i}}, \quad i=1, 2, \dots, n$$

均衡のとれた構造計画がなされた高層建築では、このような、あるいはこれに近い特性をもつ高層骨組が多く見られる。

上記 (i), (ii) の特性をもつ特別なクラスの骨組では、(5) 式中の S_x , S_y , Q_x および R 行列は下式となり、解析的取扱いが容易となる。

$$\left. \begin{aligned} S_x &= S_x^T = e_x E \\ S_y &= S_y^T = e_y E \\ Q_x &= \tilde{k}^2 Q_y \\ R &= r^2 Q_y \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (6)$$

(5) 式に (6) 式を代入して、 $\xi=0$, $f(t)=0$ とおいた非減衰自由運動方程式から、下記の固有値行列式が導かれる。

$$\begin{aligned} &|E \Lambda^6 - [1 + \tilde{e}_x^2 + \tilde{\rho}^2 + \tilde{k}^2(\tilde{e}_y^2 + \tilde{\rho}^2)] \tilde{\rho}^{-2}(m^{-1} Q_y) \Lambda^4 \\ &+ [1 + \tilde{k}^2(1 + \tilde{e}_x^2 + \tilde{e}_y^2 + \tilde{\rho}^2)] \tilde{\rho}^{-2}(m^{-1} Q_y)^2 \Lambda^2 \\ &- \tilde{k}^2 \tilde{\rho}^{-2}(m^{-1} Q_y)^3| = 0 \cdots \cdots (7) \end{aligned}$$

上式は、(3) 式の固有振動数パラメーター λ_k ($k=1, 2, 3$) を用いると、下式のように表される。

$$\begin{aligned} &|E \Lambda^6 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)(m^{-1} Q_y) \Lambda^4 \\ &+ (\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2)(m^{-1} Q_y)^2 \Lambda^2 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc} s^2 + (\xi s + 1) \tilde{k}^2 \omega_y^2 & 0 & e_y s^2 \\ 0 & s^2 + (\xi s + 1) \omega_y^2 & e_x s^2 \\ e_y s^2 & e_x s^2 & (e_x^2 + e_y^2 + \rho^2) s^2 + (\xi s + 1) r^2 \omega_y^2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} X(s) \\ Y(s) \\ Z(s) \end{array} \right\} = \frac{1}{m} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ e_x \end{array} \right\} F(s) \cdots \cdots (13)$$

ここに、 $X(s)$, $Y(s)$, $Z(s)$ および $F(s)$ は、 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ および $f(t)$ のラプラス変換を表す。

(13) 式において $F(s) = L\{f(t)\} = L\{\delta(t)\} = 1$ とおき、かつ (3) 式の関係を用いると、 $X(s)$, $Y(s)$, $Z(s)$ について (14) 式が導かれる。

$$-\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 (m^{-1} Q_y)^3 = 0 \cdots \cdots (8)$$

さらに、

$$\prod_{k=1}^3 | -\Lambda^{(k)2} E + \lambda_k^2 (m^{-1} Q_y) | = 0 \cdots \cdots (9)$$

ここに、 $\prod_{k=1}^3$ は積記号を表す。

(9) 式から、この特別なクラスの n 層立体骨組の 3 組 (3 n ケ) の固有円振動数 $\Lambda_s^{(k)}$ ($k=1, 2, 3$; $s=1, 2, \dots, n$) は下記のように表される。

$$\Lambda^{(k)} = \lambda_k \Lambda_y, \quad k=1, 2, 3 \cdots \cdots (10)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \Lambda^{(k)} &= \text{diag} [\Lambda_1^{(k)}, \Lambda_2^{(k)}, \dots, \Lambda_n^{(k)}], \quad k=1, 2, 3 \\ \Lambda_y &= \text{diag} [\Lambda_{y1}, \Lambda_{y2}, \dots, \Lambda_{yn}] \end{aligned} \left\{ \cdots \cdots (11) \right.$$

上式において、 $\Lambda^{(k)}$ は並進-振れ連成系の固有円振動数行列、 Λ_y は非連成並進系の固有円振動数行列である。

(10) 式で表される連成系の固有円振動数特性は、志賀¹⁾ により行列の直積を用いて示されている。

(10) 式の関係から、前項で述べた 1 層立体骨組と同様に剛性偏心 $\tilde{e}$ が微小で、質量・剛性半径比 $\tilde{\rho}$ が $\tilde{\rho} \approx 1.0$, あるいは $\tilde{\rho} \approx 1.2$ ($\tilde{k}=0.8$) のときには、近接した固有円振動数をもつ動特性系となる。

また、この特別なクラスの n 層骨組の振れの自由振動解を $Z = z_0 \cdot \exp(-i\Lambda t)$ ($i=\sqrt{-1}$) とすると、 z_0 は 3 つの固有ベクトルによって張られる 3 次元空間ベクトルをなし、これらの 3 つの固有ベクトル $a_z^{(k)}$ ($k=1, 2, 3$) は下式のように表される²⁾。

$$\begin{aligned} a_z^{(k)} &= [-\Lambda^{(k)2} E + \lambda_k^2 (m^{-1} Q_y)] [-\Lambda^{(m)2} E + \lambda_m^2 (m^{-1} Q_y)] z_0 \\ &\cdot [-\Lambda^{(k)2} E + \lambda_k^2 (m^{-1} Q_y)] a_z^{(k)} = 0, \\ k, l, m &= 1, 2, 3; \quad l \neq m \neq k \cdots \cdots (12) \end{aligned}$$

x および y 方向変位についての固有ベクトル $a_x^{(k)}$ および $a_y^{(k)}$ も、(12) 式と同様な記述がなされる。

3. 単位衝撃応答関数および周波数伝達関数

3.1 単位衝撃応答関数

前述の 1 層立体骨組の単位衝撃応答関数は、下記のように導かれる。

連成運動方程式 (1) 式のラプラス変換は、初期条件が零の下で (13) 式となる。

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{m} \frac{\tilde{e}_x \tilde{e}_y}{\tilde{\rho}^2} \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} C_{x,k} \frac{1}{s^2 + 2 h_k \omega_k s + \omega_k^2} \\ Y(s) &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} C_{y,k} \frac{1}{s^2 + 2 h_k \omega_k s + \omega_k^2} \\ Z(s) &= \frac{1}{r m} \frac{\tilde{e}_x}{\tilde{\rho}^2} \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} C_{z,k} \frac{1}{s^2 + 2 h_k \omega_k s + \omega_k^2} \end{aligned} \left\{ \cdots \cdots (14) \right.$$

上式中の $C_{x,k}$, $C_{y,k}$, $C_{z,k}$ ($k=1, 2, 3$) は, 下式による。

$$\left. \begin{aligned} C_{x,k} &= \frac{\lambda_k^2}{d_k} \\ C_{y,k} &= \frac{(k^2 - \lambda_k^2)(\bar{\rho}^2 - \lambda_k^2) - \bar{\rho}_y^2 k^2 \bar{\rho}^{-2} \lambda_k^2}{d_k} \\ C_{z,k} &= \frac{\bar{k}^2 - \lambda_k^2}{d_k} \\ d_1 &= (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2) \\ d_2 &= (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2) \\ d_3 &= (\lambda_3^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots (15)$$

並進変位および捩れ変位の単位衝撃応答関数 $h_x(t)$, $h_y(t)$ および $h_z(t)$ は, (14) 式のラプラス逆変換から (17) 式として得られる。

$$\left[\begin{array}{cc} ES^2 + (\xi S + 1) \bar{k}^2 m^{-1} Q_y & 0 \\ 0 & ES^2 + (\xi S + 1) m^{-1} Q_y \\ e_y ES^2 & e_x ES^2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} X(s) \\ Y(s) \\ Z(s) \end{array} \right] = \frac{1}{m} \left[\begin{array}{c} 0 \\ E \\ e_x E \end{array} \right] p_f \cdot F(s) \quad (19)$$

(19) 式を $X(s)$ について解き, (3) 式の関係を用いると, 下記の行列方程式が導かれる。

$$\prod_{k=1}^3 [ES^2 + \xi \lambda_k^2 (m^{-1} Q_y) S + \lambda_k^2 (m^{-1} Q_y)] X(s) = -\frac{1}{m} \frac{\bar{\rho}_x \bar{\rho}_y}{\bar{\rho}^2} (\xi S + 1) S^2 (m^{-1} Q_y) p_f \cdot F(s) \dots\dots (20)$$

x 方向変位 $x(t)$ の規準座標およびそのラプラス変換を $u_x(t)$ および $U_x(s)$, 正規化された固有モード行列を A_x として, 下記の規準座標への変換を行う。

$$x(t) = A_x u_x(t), \quad X(s) = A_x U_x(s) \dots\dots (21)$$

(20) 式に (21) 式を代入して, 同式の両辺に A_x^T を前乗すると下式が導かれる。

$$\prod_{k=1}^3 \{S^2 + \xi \lambda_k^2 A_{y,j}^2 S^2 + \lambda_k^2 A_{y,j}^2\} U_{x,j}(s) = -\frac{1}{m} \frac{\bar{\rho}_x \bar{\rho}_y}{\bar{\rho}^2} (\xi S + 1) S^2 a_{x,j}^T (m^{-1} Q_y) p_f \cdot F(s), \quad j=1, 2, \dots, n \dots\dots (22)$$

ここに, $U_{x,j}(s)$ は $x_j(t)$ の規準座標 $u_{x,j}(t)$ のラプラス変換, $a_{x,j}$ は j 番目の固有モードベクトルである。

(22) 式より,

$$U_{x,j}(s) = -a_{x,j}^T (m^{-1} Q_y) p_f \frac{1}{m} \cdot \frac{\bar{\rho}_x \bar{\rho}_y}{\bar{\rho}^2} \frac{(\xi S + 1) \cdot S^2}{\prod_{k=1}^3 (S^2 + \xi \lambda_k^2 A_{y,j}^2 S + \lambda_k^2 A_{y,j}^2)} F(s) = q_{x,j} \frac{1}{m} \frac{\bar{\rho}_x \bar{\rho}_y}{\bar{\rho}^2} \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} C_{x,k} \cdot \frac{1}{S^2 + \xi \lambda_k^2 A_{y,j}^2 S + \lambda_k^2 A_{y,j}^2} F(s), \quad j=1, 2, \dots, n \dots\dots (23)$$

上式中の $C_{x,k}$ および $q_{x,j}$ は, それぞれ (15) 式および下式による。

$$\left. \begin{aligned} h_x(t) &= \frac{1}{m} \frac{\bar{\rho}_x \bar{\rho}_y}{\bar{\rho}^2} \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} C_{x,k} \cdot D_k(t) \\ h_y(t) &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} C_{y,k} \cdot D_k(t) \\ h_z(t) &= \frac{1}{rm} \frac{\bar{\rho}_x}{\bar{\rho}^2} \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} C_{z,k} \cdot D_k(t) \\ D_k(t) &= \frac{1}{\omega_k \sqrt{1 - h_k^2}} \exp\{-h_k \omega_k t\} \cdot \sin(\omega_k \sqrt{1 - h_k^2} t), \quad k=1, 2, 3 \dots\dots (18) \end{aligned} \right\} \dots\dots (17)$$

特別なクラスの n 層骨組についても上述の 1 層骨組の場合と同様な解析手順により, 単位衝撃応答関数が (19) 式のように導かれる。

$$\left[\begin{array}{cc} e_y ES^2 & \\ e_x ES^2 & \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} X(s) \\ Y(s) \\ Z(s) \end{array} \right] = \frac{1}{m} \left[\begin{array}{c} 0 \\ E \\ e_x E \end{array} \right] p_f \cdot F(s) \quad (19)$$

$$q_{x,j} = a_{x,j}^T A_{y,j}^{-2} (m^{-1} Q_y) p_f \dots\dots (24)$$

(23) 式のラプラス逆変換によって, x 方向変位の単位衝撃応答関数 $h_x(t)$ が下式として得られる。

$$h_x(t) = \sum_{j=1}^n a_{x,j} q_{x,j} \frac{1}{m} \frac{\bar{\rho}_x \bar{\rho}_y}{\bar{\rho}^2} \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} C_{x,k} \cdot D_{k,j}(t) \dots\dots (25)$$

$$D_{k,j}(t) = \frac{1}{\lambda_k A_{y,j} \sqrt{1 - h_{k,j}^2}} \exp(-h_{k,j} \lambda_k A_{y,j} t) \cdot \sin \lambda_k A_{y,j} \sqrt{1 - h_{k,j}^2} t \dots\dots (26)$$

同様な解析手順により, y 方向および捩れ変位についての単位衝撃応答関数が下式のように導かれる。

$$h_y(t) = \sum_{j=1}^n a_{y,j} q_{y,j} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} C_{y,k} \cdot D_{k,j}(t) \dots\dots (27)$$

$$h_z(t) = \sum_{j=1}^n a_{z,j} q_{z,j} \frac{1}{rm} \frac{\bar{\rho}_x}{\bar{\rho}^2} \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} C_{z,k} \cdot D_{k,j}(t) \dots\dots (28)$$

なお, (22) 式から (26) 式の誘導および (27), (28) 式では, 振動数比例型減衰系として下式の関係が用いられている。

$$\xi = 2 h_s / \omega_s = 2 h_{k,j} / \lambda_k A_{y,j}, \quad s=1, 2, \dots, 3n, \quad k=1, 2, 3, \quad j=1, 2, \dots, n \dots\dots (29)$$

また, (27), (28) 式中の $C_{y,k}$, $C_{z,k}$ は (15) 式, $q_{y,j}$, $q_{z,j}$ は (24) 式中の $a_{x,j}^T$ を $a_{y,j}^T$, $a_{z,j}^T$ に置き換えた式による。

3.2 周波数伝達関数

1 層立体骨組の周波数伝達関数は, 単位衝撃応答関数を用いて下記のように導かれる。

周波数応答関数 $H_w(i\omega)$ ($w=x, y, z$ とする) は, (17)

式の単位衝撃応答関数のフーリエ変換から

$$H_w(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_w(t) \cdot e^{-i\omega t} dt, \quad w=x, y, z \dots (30)$$

x 方向変位についての周波数伝達関数 $|H_x(i\omega)|^2$ は

$$\begin{aligned} |H_x(i\omega)|^2 &= |H_x(i\omega) \cdot H_x^*(i\omega)| \\ &= \left(\frac{1}{m} \frac{\bar{e}_x \bar{e}_y}{\bar{\rho}^2} \right)^2 \left(\sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} C_{x,k} \cdot H_{0,k}(i\omega) \right) \\ &\quad \cdot \left(\sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} C_{x,k} \cdot H_{0,k}^*(i\omega) \right) \dots (31) \end{aligned}$$

ここに,

$$H_{0,k}(i\omega) = \frac{1}{(\omega^2 - \omega_k^2)^2 + 4 h_k^2 \omega_k^2 \omega^2} \dots (32)$$

また, $H_{0,k}^*(i\omega)$ は, $H_{0,k}(i\omega)$ の複素共軛である。

(31) 式は, 下式となる。

$$\begin{aligned} |H_x(i\omega)|^2 &= \left(\frac{1}{m} \frac{\bar{e}_x \bar{e}_y}{\bar{\rho}^2} \right)^2 \left\{ \sum_{k=1}^3 \frac{C_{x,k}^2}{(\omega^2 - \omega_k^2)^2 + 4 h_k^2 \omega_k^2 \omega^2} \right. \\ &\quad + 2 \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^3 (-1)^{j+k} C_{x,j} \cdot C_{x,k} \\ &\quad \cdot \frac{(\omega^2 - \omega_j^2)(\omega^2 - \omega_k^2) + 4 h_j h_k \omega_j \omega_k \omega^2}{[(\omega^2 - \omega_j^2)^2 + 4 h_j^2 \omega_j^2 \omega^2][(\omega^2 - \omega_k^2)^2 + 4 h_k^2 \omega_k^2 \omega^2]} \Big\} \dots (33) \end{aligned}$$

同様に, y 方向変位および捩れについての周波数伝達関数は

$$\begin{aligned} |H_y(i\omega)|^2 &= \frac{1}{m^2} \left\{ \sum_{k=1}^3 \frac{C_{y,k}^2}{(\omega^2 - \omega_k^2)^2 + 4 h_k^2 \omega_k^2 \omega^2} \right. \\ &\quad + 2 \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^3 (-1)^{j+k} C_{y,j} \cdot C_{y,k} \end{aligned}$$

$$\cdot \frac{(\omega^2 - \omega_j^2)(\omega^2 - \omega_k^2) + 4 h_j h_k \omega_j \omega_k \omega^2}{[(\omega^2 - \omega_j^2)^2 + 4 h_j^2 \omega_j^2 \omega^2][(\omega^2 - \omega_k^2)^2 + 4 h_k^2 \omega_k^2 \omega^2]} \Big\} \dots (34)$$

$$\begin{aligned} |H_z(i\omega)|^2 &= \left(\frac{1}{rm} \frac{\bar{e}_x}{\bar{\rho}^2} \right)^2 \left\{ \sum_{k=1}^3 \frac{C_{z,k}^2}{(\omega^2 - \omega_k^2)^2 + 4 h_k^2 \omega_k^2 \omega^2} \right. \\ &\quad + 2 \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^3 (-1)^{j+k} C_{z,j} \cdot C_{z,k} \\ &\quad \cdot \frac{(\omega^2 - \omega_j^2)(\omega^2 - \omega_k^2) + 4 h_j h_k \omega_j \omega_k \omega^2}{[(\omega^2 - \omega_j^2)^2 + 4 h_j^2 \omega_j^2 \omega^2][(\omega^2 - \omega_k^2)^2 + 4 h_k^2 \omega_k^2 \omega^2]} \Big\} \dots (35) \end{aligned}$$

特別なクラスの n 層骨組についても (25)~(28) 式のフーリエ逆変換から, (33)~(35) 式と同形の周波数伝達関数の解析表現が得られる。

4. 連成唸り振動

連成振動において振動系の2つ, あるいは2つ以上の固有振動数が互いに近接すると, 連成唸り振動が励起される。

並進-捩れ連成系における連成唸り振動の基本的性状は, 非減衰単位衝撃応答によって明確に示される。図—3および図—4は, $\bar{k}=1.0$; $\bar{e}_x = \bar{e}_y \equiv \bar{e} = 0.05, 0.15$; $\bar{\rho} = 0.8, 1.0$ の場合について, (17) 式の単位衝撃応答解の計算例を図示したものである。両図において, 下記の連成唸り振動特性が指摘される。

i) 偏心率 ($\bar{e} = e/r$) が小さく, 質量・剛性半径比 ($\bar{\rho} = \rho/r$) が1の近傍の値となると, 連成系の固有振動数

図—3 2軸剛性系 ($\bar{k}=1.0$) の単位衝撃応答 (非減衰)

が互いに近接して唸り振動が励起される。

ii) 特に微小偏心 ($\bar{e}=0.05$) で質量・剛性半径比が $\bar{\rho}=1.0$ のときには、振れ振動振幅が異常に増幅されている。

iii) 並進変位 (x, y 方向変位) および振れの唸り振動の包絡波形は、互いに時間ラグをもち、また固有振動数の近接の度合い (図-2 参照) に応じて長周期の包絡波形を生じる。

iv) 加振方向 (y 方向) とそれに直交する方向 (x 方向) の単位衝撃応答を $h_x(t)-h_y(t)$ リサージュ図として示したものが図-4 である。同図には、図-3 の時歴応答図中の任意の 6 個の時点近傍におけるリサージュが示されているが、振れに伴って直交方向の振動が顕著に励起されている。

上に述べた並進-振れ連成振動における唸り振動は、近接した固有振動数をもつ軽い減衰系で継続時間が長い振動において顕著に生じ、それによって振れと x 方向 (入力方向と直交する方向) の振動が増幅されることから、高層建築物の風による振動問題において特に留意する必要がある (5.3 参照)。

5. 不規則加振に対する応答解

本節では、前節で導いた単位衝撃応答関数を用いて不規則加振に対する応答解と幾つかの数値計算例を示す。なお、特別なクラスの n 層骨組の単位衝撃応答解は (25) ~ (28) 式に示されるように 1 層立体骨組のそれらと同形であるので、以下では、1 層立体骨組についての応答解と数値計算例について述べる。

5.1 定常ホワイトノイズ加振に対する 2 乗平均応答解

加振力 $f(t)$ がパワースペクトル密度 S_0 をもつ零平均定常ホワイトノイズのときには、

$$\left. \begin{aligned} E[f(t)] &= 0 \\ E[f(t) \cdot f(t+\tau)] &= 2\pi S_0 \delta(\tau) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

ここに、 $E[\cdot]$ は期待値演算子である。

加振力 $f(t)$ に対する並進および振れ変位の応答解 $w(t)$ (以下では $w=x, y, z$ とする) は、Duhamel 積分により

$$w(t) = \int_0^t h_w(t-\tau) f(\tau) d\tau, \quad w=x, y, z \dots\dots (37)$$

図-4 2 軸剛性偏心系 ($\bar{k}=1.0$) の単位衝撃応答のリサージュ図 (非減衰)

加振力 $f(t)$ をホワイトノイズとして、上式中の $h_w(t)$ に (17) 式の単位衝撃応答関数を代入して積分を実行すると、2 乗平均応答解が下記のように得られる。

$$E[w^2(t)] = 2\pi S_0 \int_0^t h_w^2(\tau) d\tau \dots\dots\dots (38)$$

$$= K_w \cdot \int_0^t \left\{ \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} C_{w,k} \cdot D_k(\tau) \right\}^2 d\tau \dots\dots\dots (39)$$

$$= \sum_{k=1}^3 \sigma_{w,k}^2(t) + 2 \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^3 \kappa_{w,kl}(t), \quad w=x, y, z \dots\dots\dots (40)$$

(39) において、 K_w は

$$K_w = \begin{cases} \frac{2\pi S_0}{m^2} \left(\frac{\bar{e}_x \bar{e}_y}{\bar{\rho}^2} \right)^2; & w=x \text{ のとき} \\ \frac{2\pi S_0}{m^2} & ; w=y \text{ のとき} \\ \frac{2\pi S_0}{(rm)^2} \left(\frac{\bar{e}_x}{\bar{\rho}^2} \right)^2 & ; w=z \text{ のとき} \end{cases}$$

また、(40) 式中の $\sigma_{w,k}^2(t)$ および $\kappa_{w,kl}$ は分散および共分散応答を表し、(39) 式の積分を実行すると下式として得られる。

$$\sigma_{w,k}^2(t) = K_w \cdot C_{w,k}^2 \cdot \frac{1}{4 h_k \omega_k^3} \left[1 - e^{-2h_k \omega_k t} \left\{ 1 + \frac{2h_k^2}{1-h_k^2} \cdot \sin^2 \tilde{\omega}_k t + \frac{h_k}{\sqrt{1-h_k^2}} \sin 2\tilde{\omega}_k t \right\} \right] \dots\dots\dots (41)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{w,kl}(t) &= (-1)^{k+l} \cdot K_w \cdot C_{w,k} \cdot C_{w,l} \cdot \frac{2A_{k,l}}{(A_{k,l}^2 + B_{k,l}^2)(A_{k,l}^2 + C_{k,l}^2)} \\ &\times \left[1 - e^{-A_{k,l} t} \left\{ \frac{A_{k,l} + C_{k,l}}{4 \tilde{\omega}_k \tilde{\omega}_l A_{k,l}} (A_{k,l} \cos B_{k,l} t \right. \right. \end{aligned}$$

$$-B_{k,l} \sin B_{k,l} t) - \left(\frac{A_{k,l}^2 + B_{k,l}^2}{4 \bar{\omega}_k \bar{\omega}_l A_{k,l}} (A_{k,l} \cos C_{k,l} t - C_{k,l} \sin C_{k,l} t) \right) \Bigg], \quad k, l=1, 2, 3, \quad k \neq l \quad (42)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} A_{k,l} &= \omega_k h_k + \omega_l h_l, \quad B_{k,l} = \bar{\omega}_k - \bar{\omega}_l, \quad C_{k,l} = \bar{\omega}_k + \bar{\omega}_l \\ \bar{\omega}_k &= \omega_k \sqrt{1 - h_k^2}, \quad \bar{\omega}_l = \omega_l \sqrt{1 - h_l^2} \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

2乗平均応答の定常解は、(41)、(42)式において $t \rightarrow \infty$ として得られる。また、速度および加速度の2乗平均応答解については、(39)式中の $D_k(\tau)$ をその1次および2次導関数 $D_k^{(1)}(\tau)$ および $D_k^{(2)}(\tau)$ に置き換えて積分を実行することにより得られる。

5.2 不規則風力に対する応答解

変動風速による不規則風力に対する2軸剛性偏心骨組の応答解について述べる。本論文では、単純化した解析例を示すことにして、下式の Davenport パワースペクトル $G_{vv}(f)$ をもつ変動風速を仮定する。

$$G_{vv}(f) = \frac{2}{3} \sigma_v^2 \frac{1}{f} \frac{\beta^2}{(1 + \beta^2)^{4/3}}, \quad \beta = 1200 \cdot f / V_0 \quad (44)$$

ここに、 f は振動数、 σ_v^2 および V_0 は変動風速の分散および基準風速を表す。

さらに、変動風力のパワースペクトル $G_{ff}(f)$ が下式で表されるものとする。

$$G_{ff}(f) = (C_D A \rho_w V_0)^2 A(f) \cdot G_{vv}(f) \quad (45)$$

ここに、 C_D 、 A および ρ_w は、風力係数、見付け面積および空気密度である。また、 $A(f)$ は空力アドミッタンスを表すが、ここでは $A(f) = 1.0$ とする。以下の記述では、下式の規準化パワースペクトルを用いる。

$$G_{ff}^L(f) = \frac{G_{ff}(f)}{(C_D A \rho_w V_0 \sigma_v)^2} \quad (46)$$

また、(46)式のパワースペクトルをもつ規準化された変動風力 $\tilde{f}(t)$ の標本関数が下式で表されるものとする。

$$\tilde{f}(t) = \sum_{m=1}^N \sqrt{2 \cdot G_{ff}^L(f_m)} \sin(2\pi f_m t + \phi_m) \quad (47)$$

ここに、 $G_{ff}^L(f_m) = G_{ff}(f_m) \cdot \Delta f$ は離散化(線)スペクトル、 f_m および Δf は離散化振動数および振動数幅、 ϕ_m は $(0, 2\pi)$ 間に一様分布する不規則位相角である。

上述の加振力 $\tilde{f}(t)$ に対する応答解 $\tilde{w}(t)$ ($\tilde{w} = \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$) は、単位衝撃関数を用いて Duhamel 積分により

$$\tilde{w}(t) = \int_0^t h_w(t-\tau) \tilde{f}(\tau) d\tau \quad (48)$$

(48)式に(17)式および(47)式を代入して積分を実行すると、過渡応答項 $T(t)$ と定常応答項 $S(t)$ に区分した下記の応答解が導かれる。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \frac{1}{m} \frac{\bar{e}_x \bar{e}_y}{\bar{\rho}^2} \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} C_{x,k} \sqrt{2 \cdot G_{ff}^L(f_m)} \\ &\quad \cdot \{S_{k,m}(t) + T_{k,m}(t)\} \\ \tilde{y}(t) &= \frac{1}{m} \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} C_{y,k} \sqrt{2 \cdot G_{ff}^L(f_m)} \\ &\quad \cdot \{S_{k,m}(t) + T_{k,m}(t)\} \\ \tilde{z}(t) &= \frac{1}{rm} \frac{\bar{e}_x}{\bar{\rho}^2} \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} C_{z,k} \sqrt{2 \cdot G_{ff}^L(f_m)} \\ &\quad \cdot \{S_{k,m}(t) + T_{k,m}(t)\} \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

ここに,

$$S_{k,m}(t) = A_{k,m} \{B_{k,m} \sin(2\pi f_m t + \phi_m) - C_{k,m} \cos(2\pi f_m t + \phi_m)\} \quad (50)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{k,m} &= \frac{1}{(\omega_k^2 - \omega_m^2)^2 + 4 h_k^2 \omega_k^2 \omega_m^2} \\ B_{k,m} &= \omega_k^2 - \omega_m^2, \quad C_{k,m} = 2 h_k \omega_k \omega_m \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

$$T_{k,m}(t) = -\frac{1}{\omega_k \sqrt{1 - h_k^2}} \exp(-h_k \omega_k t) A_{k,m} \cdot \{D_{k,m}^c(t) + D_{k,m}^s(t)\} \quad (52)$$

$$\left. \begin{aligned} D_{k,m}^c &= \omega_m \cos \phi_m \{(\omega_k^2 - \omega_m^2 - 2 h_k^2 \omega_k^2) \\ &\quad \cdot \sin \omega_k \sqrt{1 - h_k^2} t - 2 h_k \sqrt{1 - h_k^2} \omega_k^2 \\ &\quad \cdot \cos \omega_k \sqrt{1 - h_k^2} t\} \\ D_{k,m}^s &= \omega_k \sin \phi_m \{h_k (\omega_k^2 + \omega_m^2) \\ &\quad \cdot \sin \omega_k \sqrt{1 - h_k^2} t + \sqrt{1 - h_k^2} (\omega_k^2 - \omega_m^2) \\ &\quad \cdot \cos \omega_k \sqrt{1 - h_k^2} t\} \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

また、加振関数が(47)式のように Fourier 級数で表されるときには、 $\tilde{x}(t)$ 、 $\tilde{y}(t)$ 、 $\tilde{z}(t)$ の定常応答のパワースペクトル(離散化(線)スペクトル) $G_{\tilde{w}\tilde{w}}^L(f)$ および r. m. s. 応答 $\sigma_{\tilde{w}}$ ($\tilde{w} = \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$) は、下式によって算定される。

$$G_{\tilde{w}\tilde{w}}^L(f) = \sum_{m=1}^N |H_w(i\omega_m)|^2 \cdot G_{ff}^L(f) \cdot \delta(f - f_m) \quad (54)$$

$$\sigma_{\tilde{w}} = \sqrt{\sum_{m=1}^N G_{\tilde{w}\tilde{w}}^L(f_m)} \quad (55)$$

ここに、 $|H_w(i\omega_m)|^2$ は(33)~(35)式中の ω を ω_m とする周波数伝達関数である。また、 $\omega_{k(l,m)} = 2\pi f_{k(l,m)}$ 、 $\delta(\cdot)$ は Dirac のデルタ関数である。

5.3 数値計算例

上述の不規則加振に対する応答解に基づいて、近接した固有振動数をもつ2軸剛性偏心骨組に励起される連成唸り振動によって振れ応答と加振直交方向の並進応答が著しく増幅される性状を数値計算例で示しておく。

図-5は、5.1で述べたホワイトノイズ加振に対する2乗平均応答解[(38)~(42)式]の定常応答項の計算例(振動数比 $\tilde{k} = \omega_x / \omega_y = \sqrt{K_x / K_y} = 1.0$ 、偏心率 $\bar{e}_x = \bar{e}_y = 0.05$ 、1次減衰定数 $h_1 = 0.005 \sim 0.05$)を示したものであり、同図の縦軸は、 $E[z^2] / (2\pi S_0 / (rm)^2 \omega_y^2)$ 、 E

図—5 ホワイトノイズ加振に対する2乗平均応答 (定常応答解; $\bar{k}=1.0$, $\bar{e}_x=\bar{e}_y=0.05$)

図—6 1, 2, 3次分散および共分散応答の寄与 ($\bar{k}=1.0$)

$[y^2]/(2\pi S_0/m^2\omega_y^2)$, $E[x^2]/(2\pi S_0/m^2\omega_y^2)$ を表す。同図は、微小な剛性偏心 ($\bar{e}=0.05$) をもち、減衰が小さい ($h_1=0.005\sim 0.01$) 骨組において質量・剛性半径比 $\bar{\rho}$ ($=\rho/$

r) が1.0近傍の値となると、振れ応答と加振直交方向 (x 方向) の応答が著しく増大し、逆に、加振方向 (y 方向) の並進変位応答は減少することを示している。

さらに、2乗平均応答における1, 2, 3次の分散および共分散応答 [(40) 式] の寄与を図示したものが図—6である。

図—6の (a) $h_1=0.01$, $\bar{e}_x=\bar{e}_y=\bar{e}=0.05$, 0.15 および (b) $h_1=0.02$, $\bar{e}_x=\bar{e}_y=\bar{e}=0.05$, 0.15 の計算例は、両者とも $\bar{k}=1.0$, すなわち x, y 方向の骨組剛性が同一の場合であるが、2乗平均応答における1, 2, 3次の分散、および共分散応答の寄与性状は、下記のように要約される。

i) 振れの2乗平均応答では、 $\bar{k}=1.0$ の場合には (15) 式から $C_{x,2}=0$ ($\lambda_2=1.0$) となるので、(40) 式の2次の分散応答は零となる。質量・剛性半径比 $\bar{\rho}$ が1.0の近傍では、固有振動数が近接した動特性系の連成隠り振動により1次および3次の分散応答が著しく増大する。とくに、3次分散応答の寄与は剛性偏心率 ($\bar{e}=0.05$) が小さいほど増大する。また、剛性偏心率が $\bar{e}=0.05$ の場合には、 $\bar{\rho}\approx 1.0$ のときに3個の固有振動数がより近接するため2乗平均応答 $E[z^2]$ が異常に増大して $\bar{e}=0.15$ の場合と同程度の値となる。

振れ応答では、共分散応答 ($2\sum \kappa_{k,l}<0$) の寄与が小さいことが同図から指摘される。

ii) y 方向変位の2乗平均応答では、図—6の中央の応答図に見られるように $\bar{\rho}\leq 1$ の領域で1次分散応答、 $\bar{\rho}\geq 1$ の領域で3次分散応答、 $\bar{\rho}$ の全域で2次分散応答が現れ、また、振れ応答の場合に比べて共分散応答 ($2\sum \kappa_{k,l}>0$) の寄与が相対的に大きい。

iii) 図—6の右側に示されている x 方向変位の2乗平均応答については、1~3次分散応答の寄与は y 方向2乗平均応答のそれと類似しているが、共分散の寄与

図—7 $z(t)$, $y(t)$, $x(t)$ の時刻歴応答 ($\bar{k}=1.0$; $\bar{e}_x=\bar{e}_y=0.05$; $h_1=0.01$; $f_y=1/3$ Hz; $V_0=15$ m/s)

表—1 x , y 方向および振れ加振における $X(s)$, $Y(s)$, $Z(s)$ および $C_{x,k}$, $C_{y,k}$, $C_{z,k}$

	x 方向加振 [$g(t)$, $G(s)$]	y 方向加振 [$f(t)$, $F(s)$]	z 方向加振 [$m(t)$, $M(s)$]
$X(s)$	$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} C_{x,k} \cdot B_k(s) \cdot G(s)$	$\frac{1}{m} \frac{\bar{e}_x \bar{e}_y}{\bar{\rho}^2} \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} C_{x,k} \cdot B_k(s) \cdot F(s)$	$\frac{1}{r m} \frac{\bar{e}_y}{\bar{\rho}^2} \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} C_{x,k} \cdot B_k(s) \cdot M(s)$
$Y(s)$	$\frac{1}{m} \frac{\bar{e}_x \bar{e}_y}{\bar{\rho}^2} \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} C_{y,k} \cdot B_k(s) \cdot G(s)$	$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} C_{y,k} \cdot B_k(s) \cdot F(s)$	$\frac{1}{r m} \frac{\bar{e}_x}{\bar{\rho}^2} \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} C_{y,k} \cdot B_k(s) \cdot M(s)$
$Z(s)$	$\frac{1}{r m} \frac{\bar{e}_y}{\bar{\rho}^2} \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} C_{z,k} \cdot B_k(s) \cdot G(s)$	$\frac{1}{r m} \frac{\bar{e}_x}{\bar{\rho}^2} \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} C_{z,k} \cdot B_k(s) \cdot F(s)$	$\frac{1}{r^2 m} \frac{1}{\bar{\rho}^2} \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} C_{z,k} \cdot B_k(s) \cdot M(s)$
$C_{x,k}$	$\frac{(1 - \lambda_k^2)(\bar{\rho}^{-2} - \lambda_k^2) - \bar{e}_x^2 \bar{\rho}^{-2} \lambda_k^2}{d_k}$	$\frac{\lambda_k^2}{d_k}$	$\frac{(1 - \lambda_k^2) \lambda_k^2}{d_k}$
$C_{y,k}$	$\frac{\bar{k}^2 \lambda_k^2}{d_k}$	$\frac{(\bar{k}^2 - \lambda_k^2)(\bar{\rho}^{-2} - \lambda_k^2) - \bar{e}_y^2 \bar{\rho}^{-2} \bar{k}^2 \lambda_k^2}{d_k}$	$\frac{(\bar{k}^2 - \lambda_k^2) \lambda_k^2}{d_k}$
$C_{z,k}$	$\frac{\bar{k}^2 (1 - \lambda_k^2)}{d_k}$	$\frac{\bar{k}^2 - \lambda_k^2}{d_k}$	$\frac{(\bar{k}^2 - \lambda_k^2)(1 - \lambda_k^2)}{d_k}$
$B_k(s) = \frac{1}{s^2 + (\xi s + 1) \lambda_k^2 \omega_y^2}$, $d_1 = (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)$, $d_2 = (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)$, $d_3 = (\lambda_3^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)$			

($2 \sum \kappa_{k,l} < 0$) が $\bar{\rho} \approx 1$ の近傍を除く領域において著しく大きい。また、 $\bar{\rho}=1.0$ の近傍で x 方向並進変位の 2 乗平均応答 $E[x^2]$ が增大することが指摘される。

これらの計算例は、振れ連成系の 2 乗平均の応答の評価において、2, 3 次の分散および共分散応答を偏心率 $\bar{e}$ と質量・剛性半径比 $\bar{\rho}$ の組み合わせに応じて適切に評価する必要があることを示唆している。また、連成系の 3 個の固有振動数が近接しているときには、振れと加振直交方向の並進変位が異常に増幅されるので風振動問題において特に留意する必要がある。

図—7 は、5.2 で述べた不規則風力に対する応答解 (49) ~ (53) 式の数値計算例を示したものである。規準化風力 $\bar{f}(t)$ は (47) 式において $N=2000$, 上, 下限遮断振動数 $f_u=2.0$, $f_l=0.001$ Hz, 基準風速 $V_0=15$ m/s としシミュレートし (図—7 の最上段図, 継続時間 600 秒, r.m.s. 値 $\sigma_{\bar{f}}=0.98$, ピークファクター $g_{\bar{f}}=|\bar{f}(t)|_{\max}/\sigma_{\bar{f}} \approx 3.0$), この標本関数を入力したときの振れ, y 方向

および x 方向変位応答の時刻歴を (a) 質量・剛性半径比 $\bar{\rho}=0.6$, (b) $\bar{\rho}=1.0$ の 2 例 (両者とも $\bar{k}=1.0$, $h_1=0.01$, 非連成並進 1 次固有振動数 $f_{y1}=1/3$ Hz) について図示されている。同図 (a), (b) の時刻歴の対比から、質量・剛性半径比が $\bar{\rho}=1.0$ の骨組 (b) では、振れ応答と加振直交方向 (x 方向) の変位応答が (a) の場合に比べて著しく増大していること、および $z(t)$ と $x(t)$ に連成唸り振動が $y(t)$ に比べればより明確に現れていることが指摘される。

6. x 方向入力および振れ入力に対する応答解

x 方向加振力および振れ加振力をそれぞれ $g(t)$, $m(t)$ とすると、これらの加振力に対して運動方程式 [(2) 式] の右辺の入力項を $\{1, 0, \bar{e}_y\}^T \cdot g(t)$, $\{0, 0, 1\}^T \cdot m(t)$ に置き換えて 2~4 節で述べた解析手法を適用すると、それぞれの加振力に対する応答解が得られる。線形連成振動では、これらの応答解を重ね合わせることにより、2 方向お

よび振れモーメント入力における応答解が解析的に導かれる。

2～4節で述べた応答解中の $C_{x,k}$, $C_{y,k}$, $C_{z,k}$ ($\tilde{k}=1, 2, 3$) (15) 式参照) について, x , y 方向加振および振れモーメント加振における $X(s)$, $Y(s)$, $Z(s)$ とともに $C_{x,k}$, $C_{y,k}$, $C_{z,k}$ を表—1 にまとめて示す。

同表中の各 $C_{x,k}$, $C_{y,k}$, $C_{z,k}$ において, $1/d_k$ の項は, 連成系の固有振動数の近接の度合いによる唸り振動増幅に関係し, 分子の $(\tilde{\rho}^2 - \tilde{\lambda}_k^2)$, $(\tilde{k}^2 - \tilde{\lambda}_k^2)$, $(1 - \tilde{\lambda}_k^2)$ の項は, これらの値が小さいときには振動を抑制する。これらの振動増幅および抑制効果は, 動特性の類型性から TMD (Tuned mass damper) 連成振動系における増幅および制振効果と同じ特性である。制振連成系の動特性との類型性の解析的考察については別稿で述べる (文献 5), 6) 参照)。

7. あとがき

本論文では, 1 方向入力を受ける 2 軸剛性偏心立体骨組の動特性と並進-振れ連成応答の解析的考察について述べた。1 層立体骨組および特別なクラスの多層立体骨組の連成運動方程式のラプラス変換手法によって, 連成系の単位衝撃応答関数の簡潔な解析表現を導くとともにデュアメル積分手法により定常ホワイトノイズおよび変動風速成分による不規則風力加振に対する並進-振れ連成応答解を示した。さらに, これらの解析解に基づいて, 固有振動数が近接した動特性系において励起される連成唸り振動とそれによって生じる振れ振動および入力と直交する方向の並進振動の増幅性状について立体骨組の剛

性偏心率と質量・剛性半径比に関連して論じ, また, 解析解に基づく数値計算例を添えて連成唸り振動による振れと入力に直交する方向の変位応答の動的増幅が軽い減衰系で継続時間が長い振動において顕著に生じることを示して, 高層建築物の風振動問題においてこのような応答特性のより詳細な考察が必要であることを示唆した。本稿では, 系統的な考察を解析的に行う目的から単純化した骨組モデルと入力モデルについての解析的考察について述べたが, より実際の風振動問題への応用については, さらに考察を重ねて別稿で報告する。

参考文献

- 1) 志賀敏男：構造物の振動, pp.167～174, 共立出版, 1981 年
- 2) R. ツルシュール著, 瀬川, 高市共訳：マトリックス理論と応用, pp.293～293, プレイン図書出版, 1972 年
- 3) 坂本 順, 曲 華, 服部 匠：並進-振れ連成振動における特異な振動について, 構造工学論文集, Vol.36 B, pp.85～94, 1990 年 3 月
- 4) 坂本 順, 曲 華, 服部 匠：2 軸剛性偏心並進-振れ連成系の動特性に関する考察 (Ⅰ), (Ⅱ), 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.567～576, 1990 年 10 月
- 5) 坂本 順ほか 3 名：連成振動系の動特性の類型性と連成唸り振動について (Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ), 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.609～614, 1990 年 10 月
- 6) 坂本 順ほか 3 名：TMD-並進-振れ連成系の動特性, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.791～792, 1990 年 10 月

(1990 年 9 月 1 日原稿受理, 1990 年 12 月 5 日採用決定)