壁式構造における、接合部パネルのせん断応力に関する研究 SHEAR STRESSES OF BEAM AND BEARING-WALL CONNECTION JOINTS FOR BOX-FRAMED BUILDINGS

松井 源吾*, 楊 振亮**

Gengo MATSUI and Jenn Lian YANG

This Paper is concerned with the shear stresses in beam and bearing-wall connection joints for box-framed reinforced concrete buildings. For these buildings, the A.I.J. code specifies the amount of horizontal lengths of walls per unit area of each floor. From this specification it sometimes may follow that a beam is designed to have smaller depth for larger opening in a wall.

By employing the hyperbolic functions to represent the normal stresses due to bending moments from a beam and a bearing-wall, a theoretical solution for the shear stresses for the connection joint is presented. Its validity is confirmed by conducting the photo-elastic experiments.

Keywords : box-framed buildings, shear stresses, photo-elasticity

壁式鉄筋コンクリート造, せん断応力度, 光弾性

序

壁式鉄筋コンクリート造（以下、壁式構造という）においては、壁のせん断耐力を重視して壁量（床面積に対する壁厚と壁長さ）が決められている。そのため、南側など開口面積を大きくするため、梁せいを小さくする場合が多い。梁せいは45 cm以上としか決められていない。これによって、壁梁と耐力壁の接合部パネルの面積が小さくなり、地震時にせん断応力が増大し、検討の必要が生じてくる。

筆者は先に、窓の配置を変えることによって、この応力の増大を避けることができることを指摘した⁽¹⁾。しかし、アパートなどでは、各階の窓の位置は変えられないのが普通である。梁および接合部のせん断応力を増大させないために、ある程度の梁せいは必要なのである。

本論文では、

- 1) 壁梁部分を横に長い帯板として考え、耐力壁から曲げとせん断をうける
- 2) 耐力壁部分を縦に長い帯板として考え、壁梁から曲げとせん断をうける

として、それぞれのせん断応力の解を求め、パネル部の最大せん断応力について検討を行ったものである。

前論文では、柱からの曲げを簡単に三角形分布としたため、光弾性実験とかなりの誤差があった。

その後、梁の剛域の研究⁽²⁾に際して、パネル部と梁、または柱の境界線上の垂直応力は、双曲線関数と一次関

数の組合せで近似できることを確かめている。

本論文では、この結果を用い、幅の広い部材では双曲線関数だけで近似できることを確かめ、曲げ応力を双曲線関数的分布として解を求めている。

また、光弾性実験を行い、この解を確かめている。

1. 帯板の応力

通常、壁式構造では、耐力壁、壁梁が同一の厚さであることが多い。それで厚さを一定とした二次元弾性論において、平面応力として扱うことにする。図-1のような幅 $2c$ で、 $2l$ を周期とする荷重を受ける帯板の解を考える。

二次元弾性論における横田の一般式⁽³⁾は

$$\sigma_x + \sigma_y = 2 R_e [g(z)]$$

$$\sigma_x - \sigma_y - 2 i \tau_{xy} = 2 i y g'(z) + h(z)$$

で表される。ここに $g(z)$ 、 $h(z)$ は複素関数、 $g' = dg/dz$,

図-1 幅 $2c$ の帯板と外力

* 早稲田大学 教授・工博

** 楊構造事務所(台湾)・工修

Prof., Waseda Univ., Dr. Eng.

Yang Structural Design Office (Taiwan), M. Eng.

R_e は実部を意味する。

この場合の解として、複素関数を次のように選ぶ。

$$g(z) = a(ic_3 \cos az + c_4 \sin az)$$

$$h(z) = 2a^2(c_1 \sin az + ic_2 \cos az) + 2a(ic_3 \cos az + c_4 \sin az)$$

ただし $a = n\pi/l$

これらより

$$2R_e[g(z)] = 2a \sin ax \{c_3 \sinh ay + c_4 \cosh ay\}$$

$$R_e[2iyg'(z) + h(z)] = 2a \sin ax$$

$$\begin{aligned} & \cdot \{a(c_1 \cosh ay + c_2 \sinh ay) \\ & + c_3(\sinh ay + ay \cosh ay) \\ & + c_4(\cosh ay + ay \sinh ay)\} \end{aligned}$$

$$I_m[2iyg'(z) + h(z)] = 2a \cos ax$$

$$\begin{aligned} & \cdot \{a(c_1 \sinh ay + c_2 \cosh ay) \\ & + c_3(\cosh ay + ay \sinh ay) \} \end{aligned}$$

これより垂直応力 σ_x は次式となる。

$$\begin{aligned} \sigma_x = & (A_n + B_n) \frac{(ac \cosh ac - \sinh ac) \cosh ay - ay \sinh ay \sinh ac}{\sinh 2ac + 2ac} \sin ax \\ & - (A_n - B_n) \frac{(ac \sinh ac - \cosh ac) \sinh ay - ay \cosh ay \cosh ac}{\sinh 2ac - 2ac} \sin ax \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

またせん断応力は

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = & -(A_n + B_n) \frac{ac \cosh ac \sinh ay - ay \cosh ay \sinh ac}{\sinh 2ac + 2ac} \cos ax \\ & + (A_n - B_n) \frac{ac \sinh ac \cosh ay - ay \sinh ay \cosh ac}{\sinh 2ac - 2ac} \cos ax \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

2. 接合部パネルと、梁、柱との境界線上の垂直応力

この線上では端に応力集中が起こるので、曲げ応力は三角形分布ではない。

写真—1, 2 は梁成 2 cm, 柱幅 4 cm の接合部の純曲げの光弾性等色線である。これによる接合部パネルと梁との境界線上の垂直応力を求めると図—2 における黒丸のようになる。

この垂直応力の分布に対して、次式のように双曲線関数と一次式の組合せを考える。

$$+ c_4(\sinh ay + ay \cosh ay)\}$$

が得られる。ただし I_m は虚部を意味する。

境界条件を次のようにする。

$$y = +c \text{ にて } \tau_{xy} = 0 \quad \sigma_y = -B_n \sin ax$$

$$y = -c \text{ にて } \tau_{xy} = 0 \quad \sigma_y = -A_n \sin ax$$

これらの条件より $c_1 \sim c_4$ が求まる。

すなわち

$$c_1 = \frac{A_n + B_n}{a^2} \frac{\sinh ac + ac \cosh ac}{\sinh 2ac + 2ac}$$

$$c_2 = -\frac{A_n + B_n}{a^2} \frac{\cosh ac + ac \sinh ac}{\sinh 2ac - 2ac}$$

$$c_3 = \frac{A_n - B_n}{a^2} \frac{a \cosh ac}{\sinh 2ac - 2ac}$$

$$c_4 = -\frac{A_n + B_n}{a^2} \frac{a \sinh ac}{\sinh 2ac + 2ac}$$

$$\sigma_y = -\frac{p}{1+k} \left(\frac{1}{\sinh \gamma} \sinh \frac{\gamma}{c} x + \frac{k}{c} x \right) \dots\dots (3)$$

ここに p は縁応力, $2c$ は梁せいである。

この式に $\gamma = 10$, $k = 0.3$ を入れると、図—2 の曲線となり光弾性結果の黒丸と近似している。

材の幅が大きく、材長の短い材の場合、光弾性実験では縞数が少なく、誤差が大きい。そのため細長い材の分布を (3) 式として与え、計算よりパネル部との境界線上の応力を求める。

図—2 梁と接合部パネル境界線の垂直応力

写真—1 梁柱接合部の光弾性等色線 (暗視野) 梁せい 2 cm, 柱幅 4 cm, 純曲げ 72 kg·cm

図-3のように柱を縦長の帯板と考え、これに梁から曲げ応力を受けるものとする。梁からの曲げ応力は上記の(3)式の形の分布とする。(1)式にて $c \rightarrow a$, $l \rightarrow (h/2 + c)$ とし, $x = c$ とすると, 柱と接合部パネルの境界線上の垂直応力が求まる。図-4における曲線が

写真-2 梁柱接合部の光弾性等色線 (明視野)

図-3 柱を縦長の帯板とし、梁からの曲げ応力を加える場合

図-4 柱と接合部パネルの境界線上の垂直応力
($a/l=0.56$, $c/l=0.31$ の場合)

その値を示している。(3)式にて $c \rightarrow a$, $k=0$ とした次式

$$\sigma_x = -p \frac{\sinh \frac{10}{a} y}{\sinh 10} \quad (4)$$

が図-4における黒丸で、曲線とよく一致している。

壁式構造の場合、耐力壁は幅が大きく、梁せいが小さい場合が多い。壁柱からの梁への曲げ応力は(4)式としてよいであろう。

3. 梁が等断面の場合のパネル部のせん断応力

梁が等断面の場合、梁を横長の帯板と考え、柱からの曲げとせん断を外力として加え解を求める。

耐力壁の断面、間隔同一の場合とする。

窓の間の柱のせん断力を Q , 反曲点を中央とすると, 柱の上下端に

$$M = Qh/2$$

の曲げモーメントが生ずる。その応力分布を(4)式と仮定すると、縁応力(p)と曲げモーメントの関係は

$$M = 2 \int_0^a \sigma_y \cdot x \cdot dx$$

より求まる。

$$p = -\frac{50}{9} \cdot \frac{M}{a^2} = -\frac{25}{9} \cdot \frac{Qh}{a^2}$$

この荷重は $2l$ を周期とするから、フーリエ級数に展開できる。(1), (2)式における A_n, B_n は

$$\begin{aligned} B_n &= (-A_n) = \frac{2}{l} \int_0^a -p \frac{1}{\sinh 10} \sinh \frac{10}{a} x \cdot \sin ax dx \\ &= -\frac{2}{l} p \frac{1}{(10/a + a^2/10)} \left(\sin aa - \frac{a}{10} a \cos aa \right) \end{aligned} \quad (5)$$

これを(2)式に入れば、横に長い帯板の曲げによるせん断応力が求まる。

このほか、柱にはせん断力 Q があるが、これによるせん断応力は l が a に比べてあまり大きくなければ等分布と考えてよいであろう。

梁の中心線上のせん断応力は

図-5 梁を帯板とし、柱からの曲げとせん断を加える場合

$$\begin{aligned}
 (\tau_{xy})_{y=0} = & \frac{100}{9} \frac{Qh}{a^2 l} \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{(10/a + a^2/10)} \\
 & \cdot \left(\sin \alpha a - \frac{a}{10} \alpha \cos \alpha a \right) \\
 & \times \frac{\alpha c \sin \alpha c}{\sinh 2 \alpha c - 2 \alpha c} \cos \alpha x - \frac{Q}{2 l} \\
 & \dots\dots\dots (6)
 \end{aligned}$$

となる。

縦長の長方形開口，長辺と短辺の比が1.5の場合についての計算例を図一6に示す。開口が正方形の場合⁽⁴⁾に比べて，せん断応力は一般的に大となる。

図一6における a および c については，光弾性実験の試験体（図一7）に対応するものと，その中間的な値について計算している。計算値6例のうち2例はパネル部で $1.5 \tau_0$ を超えている。 τ_0 は壁の平均せん断応力である。現行の壁式構造の設計では壁量規定を重視し，耐力壁の平均せん断応力度に基づく応力算定が基本となっている。以上のことにより， τ_0 を規準とすることにした。壁のせん断応力分布を放物線とし，壁の最大せん断応力を $1.5 \tau_0$ とした。計算例では，梁はほとんど $1.5 \tau_0$ を超えていて，せん断補強が必要となる。梁はスターラップによる補強が可能であるが，パネル部のせん断補強については適当な方法が示されていない。許容応力度以内にすべきであろう。なお，この解では梁の上下の階の柱のせん断力を同一とした。実際は当然違うわけで，上下の

図一6 梁中心線上のせん断応力
(辺比1.5の縦長開口の場合)

A₁

A₂

A₃

写真一3 梁せい一定の場合の純せん断の光弾性等色線(暗視野)

図一7 梁せい一定の場合の光弾性試験片

A₁

A₂

A₃

写真—4 同拡大

平均した値を用いて、近似できるのではないかと思います。

この解の検討のため、光弾性実験を行った。

図—7 に試験片の寸法を示す。

図—8 梁せい一定の場合の梁中心線上のせん断応力

試験片は厚さ 6 mm の DAP 板で、その四辺をアクリライト板の枠で両側から挟み、この枠の四隅はピン接合である。これを 45° 傾け、上下に押し、左右に引張って、せん断を加えた。

その光弾性等色線（暗視野）が写真—3 で、部分的拡大が写真—4 である。

図—8 に梁中心線上のせん断応力を示した。曲線は理論値、黒丸が光弾性実験値であるが、かなりよく合っている。試験片 A₁ の場合は柱の反曲点が梁より $h/3$ の所にあるため、(6) 式の h の代わりに $2h/3$ としている。

パネル部の σ_y の合計は

$$2 \int_0^a \sigma_y dx = \frac{10}{9} \frac{M}{a} = \frac{10}{9} \tau_0 h$$

となるので、最大応力の略算式として、

$$\tau_{\max} \doteq 1.5 \left[\frac{5h}{9c} - \frac{a}{l} \left(\frac{h}{2c} + 1 \right) \right] \tau_0$$

が得られる。

この式に窓の大きい A₁ の場合に入れると 2.19 τ_0 となる。精算値は 2.41 τ_0 であるから 9 % の誤差である。しかし、この式は窓の小さい場合は誤差が大きい。

柱からの曲げ応力の分布を三角形分布としたときは

$$2 \int_0^a \sigma_y dx = \frac{3}{2} \frac{M}{a}$$

となり、最大応力の略算式は

$$\tau_{\max} \doteq 1.5 \left[\frac{3}{4} \frac{h}{c} - \frac{a}{l} \left(\frac{h}{2c} + 1 \right) \right] \tau_0$$

となり、双曲線分布とした時の第1項の係数 $5/9$ が $3/4$ となり、かなり大きい値となる。

A_1 の場合、三角形分布とすると、 $\tau_{\max} = 3.86 \tau_0$ となり、精算値 $2.41 \tau_0$ の 60% 増しとなり実状に合わない。

4. 柱が等断面の場合のパネル部のせん断応力

公団アパート南面架構によくみられる、耐力壁が通っていて左右の梁の梁せいが違う場合である。この場合は、幅 $2a$ の柱を帯板と考え、左右の梁から曲げとせん断を受けるものとする (図-9)。

境界条件として

$$y = +a \text{ にて } \tau_{xy} = 0 \quad \sigma_y = -B_n \sin \alpha x$$

$$y = -a \text{ にて } \tau_{xy} = 0 \quad \sigma_y = -A_n \sin \alpha(x+d) \\ (\alpha = n\pi/h)$$

これらの条件より、前と同様に $c_1 \sim c_4$ を求め、せん断応力を計算すると次式となる。

$$\tau_{xy} = -\{B_n \cos \alpha x + A_n \cos \alpha(x+d)\}$$

$$\frac{aa \cosh aa \sinh ay - ay \cosh ay \sinh aa}{\sinh 2aa + 2aa} \\ + \{A_n \cos \alpha(x+d) - B_n \cos \alpha x\}$$

図-9 柱を縦長の帯板とし、左右のせいの違う梁からの曲げとせん断を加える場合

図-10 左右の梁せいが異なる場合の光弾性試験片

$$\frac{aa \sinh aa \cosh ay - ay \sinh ay \cosh aa}{\sinh 2aa - 2aa}$$

応力の分布形は前節と同様に一次の項を省略し、双曲線関数の分布とすると、

$$B_n = -\frac{2}{h} p_R \frac{1}{10/C_R + a^2 C_R/10}$$

$$\cdot \left(\sin \alpha C_R - \frac{C_R}{10} a \cos \alpha C_R \right)$$

$$A_n = +\frac{2}{h} p_L \frac{1}{10/C_L + a^2 C_L/10}$$

$$\cdot \left(\sin \alpha C_L - \frac{C_L}{10} a \cos \alpha C_L \right)$$

縁応力も前と同様に

$$p_R = \frac{50}{9} \cdot \frac{Q_R(l-a)}{C_R^2}, \quad p_L = \frac{50}{9} \cdot \frac{Q_L(l-a)}{C_L^2}$$

これらにより、柱中心線上のせん断応力は

$$(\tau_{xy})_{y=0} = \left\{ \frac{100}{9} \cdot \frac{Q_R(l-a)}{h C_R^2} \sum \frac{1}{10/C_R + a^2 C_R/10} \right. \\ \cdot \left(\sin \alpha C_R - \frac{C_R}{10} a \cos \alpha C_R \right) \cos \alpha x \\ + \frac{100}{9} \cdot \frac{Q_L(l-a)}{h C_L^2} \sum \frac{1}{10/C_L + a^2 C_L/10} \\ \cdot \left(\sin \alpha C_L - \frac{C_L}{10} a \cos \alpha C_L \right) \cos \alpha(x+d) \Big\} \\ \times \frac{aa \sinh aa}{\sinh 2aa - 2aa} \frac{Q_R + Q_L}{4h} \dots \dots (7)$$

となる。

この解の検討のため、光弾性実験を行った。

図-10 は試験片の寸法である。前と同様にせん断力を加えた等色線写真が写真-5, 6 である。

図-11 は柱中心線上のせん断応力で曲線は (7) 式

図-11 左右の梁せいが異なる場合の柱中心線上のせん断応力

写真—5 左右の梁せいが異なる場合の純せん断の光弾性等色線 (B₁)

写真—6 左右の梁せいが異なる場合の純せん断の光弾性等色線 (B₂)

によるものであり、黒丸が光弾性結果である。

パネル部の σ_y の合計は

$$\int_0^{c_R} \sigma_y dx + \int_0^{c_L} \sigma_y dx = \frac{5(l-a)}{9} \left(\frac{Q_R}{C_R} + \frac{Q_L}{C_L} \right)$$

となり、また

$$\tau_0 = \frac{1}{2a} \left(\frac{Q_R + Q_L}{2} \cdot \frac{l}{h} \right)$$

であるから、最大応力の略算式として、

$$\tau_{\max} \doteq 1.5 \left\{ \frac{20}{27} \times \frac{h(l-a)}{l} \times \frac{1}{Q_R + Q_L} \times \left(\frac{Q_R}{C_R} + \frac{Q_L}{C_L} \right) - \frac{2}{3} \frac{a}{l} \right\} \tau_0$$

が得られる。

この式に窓の大きい B₂ の場合を入れると 1.60 τ_0 となる。精算値は 1.58 τ_0 であるから 2 % の誤差である。

なお、梁のせん断力が断面積比に比例すると仮定すると、上式は

$$\tau_{\max} \doteq 1.5 \left\{ \frac{20}{27} \times \frac{h(l-a)}{l} \times \frac{2}{C_R + C_L} - \frac{2}{3} \frac{a}{l} \right\} \tau_0$$

となる。B₂ についてやはり 2 % の誤差である。

この例ではパネル部および梁の最大せん断応力は壁のそれとほぼ等しい。

5. まとめ

壁梁断面が同一の時は梁を帯板とし、耐力壁断面が同一の時は柱を帯板とし、二次元弾性により解を求めることができる。

これら帯板に対する曲げ応力は、幅広い材ではその分布が双曲線関数で表される。

以上による解は、光弾性実験の結果とかなり一致する。

その結果、パネル部の最大せん断応力は、梁せいの小さい場合は耐力壁の最大せん断応力を超える場合がある。曲げ応力を直線分布と仮定した場合の最大せん断応力は過大である。

補 記

旧論文注 1) によるパネル部の略算式にて、縦方向の力の和を求めているので、横方向の柱からのせん断力による $Q/2l$ を差し引いているのは間違っていた。差引がない方が正しい。ここに訂正いたします。

注

- 1) 松井源吾・小川隆久「壁式構造における窓の配置とせん断応力分布に関する研究」日本建築学会論文報告集、第 286 号、pp.00~00、昭和 54 年 12 月
- 2) G. Matsui, Y. Tsuboi: Stresses and Deformations at the Beam-to-Wall Joints of Shear Wall Structures, Photoelasticity, (Proceedings of the International Symposium on Photoelasticity, Tokyo, 1986), Springer-Verlag
- 3) 建築学体系 9-1「建築弾塑性学」(彰国社、昭和 43 年) p. 98

(1990 年 9 月 6 日原稿受理、1991 年 3 月 18 日採用決定)