5 部材立体骨組の性質について

ON THE PROPERTIES OF UNSTABLE STRUCTURE WHICH HAS 5 BARS

奥津 敏*, 土屋 好代**

Satoshi OKUTSU and Yoshiyo TSUCHIYA

We have discovered a method to trace easily the locus of changing configuration of a structure, comprising a rigid body, a foundation and 5 bars each coupled to the foundation and the body via 3-dimensional pins. It has been proved that some of these structures keep to be in state of 1-degree unstability and have rigid body motion, but some others become to be in state of high-degree unstability at several configurations.

Those structures which keep to be in state of 1-degree unstability can be utilized as structures which have 3-dimensional vibration or motion.

Keywords : *unstability, rigid body motion, pin, stress*

不安定, 剛体運動, ピン, 応力

1. はじめに

内的安定立体トラスまたは剛な物体(以下物体という)を, すべての立体的方向に回転できるピン(以下ピンという)を両端にもつ直線状の部材(以下部材という)5本によって, 地盤などの不動箇所(以下地盤という)から立体的に支持した骨組は一般に1次不安定で, 継続的剛体運動が可能である。本論は, この剛体運動に伴って変化する姿勢の軌跡を追跡する方法と, 外力による部材応力の算出方法について述べ, この不安定骨組の利用の可能性について述べる。本論の概要について¹⁾と, 物体の運動が平面並進運動に限定される本論のうちの特殊な例に該当する骨組について²⁾は, 既に発表されている。

2. ピン位置の拘束条件

図-1に直交座標 xyz を用いて概念的に示したように, 1個の物体が地盤上のピン1~5と物体上のピン6~10を両端とする5本の部材1-6~5-10を介して, 地盤から支持されている骨組が本論の対象の骨組である。ピン1~10の位置を $x_1, y_1, z_1 \sim x_{10}, y_{10}, z_{10}$ によって表すこととすると, これらのうち $x_1, y_1, z_1 \sim x_5, y_5, z_5$ は地盤上に拘束されていて定値である。部材1-6~5-10の材長を $l_1 \sim l_5$ とするとこれらも定値であるから, ピン6~10はピン1~5を中心とする半径 $l_1 \sim l_5$ の球面上に拘束され, 次の5式が成立する。

$$\{(x_1 - x_6)^2 + (y_1 - y_6)^2 + (z_1 - z_6)^2\}^{0.5} = l_1 \cdots \cdots (1)$$

$$\{(x_2 - x_7)^2 + (y_2 - y_7)^2 + (z_2 - z_7)^2\}^{0.5} = l_2 \cdots \cdots (2)$$

$$\{(x_3 - x_8)^2 + (y_3 - y_8)^2 + (z_3 - z_8)^2\}^{0.5} = l_3 \cdots \cdots (3)$$

$$\{(x_4 - x_9)^2 + (y_4 - y_9)^2 + (z_4 - z_9)^2\}^{0.5} = l_4 \cdots \cdots (4)$$

$$\{(x_5 - x_{10})^2 + (y_5 - y_{10})^2 + (z_5 - z_{10})^2\}^{0.5} = l_5 \cdots \cdots (5)$$

また物体上の5個のピンの相互の関係位置は互いに拘束されている。ピン6~7間距離などを l_{67} などで表せ

図-1 概念図(1)

本論文の一部は, 1990年度日本建築学会大会学術講演梗概集(中国)¹⁾に発表している。

* 千葉工業大学建築学科 教授・工博

** 株式会社東畑建築事務所・工修

Prof., Dept. of Architecture, Chiba Institute of Technology, Dr. Eng. K. Tohata and Associates, Architects, M. Eng.

ば、これらは定値であるから、10個のピン間距離のうちの例えば次の9個のピン間距離を用いて、次の9式によってこの拘束条件式が表される。

$$\{(x_6 - x_7)^2 + (y_6 - y_7)^2 + (z_6 - z_7)^2\}^{0.5} = l_{67} \cdots \cdots (6)$$

$$\{(x_6 - x_8)^2 + (y_6 - y_8)^2 + (z_6 - z_8)^2\}^{0.5} = l_{68} \cdots \cdots (7)$$

$$\{(x_7 - x_8)^2 + (y_7 - y_8)^2 + (z_7 - z_8)^2\}^{0.5} = l_{78} \cdots \cdots (8)$$

$$\{(x_6 - x_9)^2 + (y_6 - y_9)^2 + (z_6 - z_9)^2\}^{0.5} = l_{69} \cdots \cdots (9)$$

$$\{(x_7 - x_9)^2 + (y_7 - y_9)^2 + (z_7 - z_9)^2\}^{0.5} = l_{79} \cdots \cdots (10)$$

$$\{(x_8 - x_9)^2 + (y_8 - y_9)^2 + (z_8 - z_9)^2\}^{0.5} = l_{89} \cdots \cdots (11)$$

$$\{(x_6 - x_{10})^2 + (y_6 - y_{10})^2 + (z_6 - z_{10})^2\}^{0.5} = l_{610} \cdots \cdots (12)$$

$$\{(x_7 - x_{10})^2 + (y_7 - y_{10})^2 + (z_7 - z_{10})^2\}^{0.5} = l_{710} \cdots \cdots (13)$$

$$\{(x_8 - x_{10})^2 + (y_8 - y_{10})^2 + (z_8 - z_{10})^2\}^{0.5} = l_{810} \cdots \cdots (14)$$

上記の14個の式がピン6～10の位置の軌跡を表す式である。

未知数 $x_6, y_6, z_6 \sim x_{10}, y_{10}, z_{10}$ の15個に対して方程式数は14であるから、例えば x_6 に連続的に数値を与えて順次に上の14元連立方程式を解けばピン6～10の位置が求められ、この骨組の剛体変形の追跡が可能であると考えられる。しかしこの方程式の解には不適値が多く、本論ではピンの軌跡を追跡する方法として、容易かつ実用的である次に述べる方法を採用する。

3. 追跡方法

図-1の半径 $l_1 \sim l_5$ の球1～5の表面上に画いた点線の閉鎖図形を、ピン6～10の軌跡とする。この軌跡を電算によって求めるのに本論においては、図-2に示すように図-1の姿勢の骨組を組み立て直して、前項の14個の式を満足しながら図-1と微小の差異をもつ姿勢を算出し、これを繰り返して行く方法を採用する。

図-2 概念図(2)

その方法を、式(1)～(14)の右辺の長さをを用いて述べると次のようである。すなわち、

i) 図-2において、まず部材1-6をピン1の周りに微小定角 t だけ任意の方向に回転してピン6を6'へ移すと、ピン6は半径 l_1 の球面上の小さい円周F上に存在する。(式(1)の内容)

ii) 次にピン7を7'へ移すのに、線分2-7'が l_2 でありかつ距離6'-7'が l_{67} である任意の位置とすると、7'は直線2-6'上に中心をもち、これと直角をなす円周S上に存在する。(式(2), (6)の内容)

iii) ピン3, 6', 7'に対して l_3, l_{68}, l_{78} によってピン8を移すべき位置8'を面3-6'-7'に対して、面3-6-7に対するピン8と同じ側に求める。(式(3), (7), (8)の内容)

iv) ピン6', 7', 8'に対してiii)と同様に、 l_{69}, l_{79}, l_{89} によってピン9を移すべき位置9'を求めると、距離4-9'は l_4 に通常一致していない。ピン7'を円周S上で中心角 s を変えて移動し、ii)からの計算をし直し、 s の調節によって距離4-9'が l_4 と一致する位置を求める。(式(4), (9), (10), (11)の内容)

v) ピン6', 7', 8'に対してiii), iv)と同様に、 $l_{610}, l_{710}, l_{810}$ によってピン10を移すべき位置10'を求めると、距離5-10'は通常 l_5 に一致していない。ピン6'を

図-3 追跡計算のフロー

円周F上で中心角 f を変えて移動し、i)からの計算をし直し、 f の調節によって距離5-10'も l_5 となる新しい姿勢6', 7', 8', 9', 10'を定める。(式(5), (12), (13), (14)の内容)。

vi) 以上i)~v)の1回の計算終了後にピン位置6'~10'を最初のピン位置6~10として扱い、同様の計算によって次の新しい姿勢を求め、このように順次に計算することによってピン6~10の軌跡を求めることができる。以上の追跡計算のフローを図-3に示す。

4. 計算上の留意点

前項の計算には、直交座標の座標変換を利用することができる。例えばピン7'を円周S上で中心角 s だけ移動するとき、座標変換によってピン2を原点に、6'を z 軸上におき、 xy 面投影図上に現れる角 s を用いて回転移動をするなどの方法を採用することができる。

ピン位置6'~10'を算出する1回目のi)~v)の計算で、最初に仮定するピン位置6', 7'は、円周F, S上の任意の位置とするが、2回目以後はピンの軌跡は通常の円滑であるとして、追跡が逆戻りとならないようにすると同時に計算を速めるために、前回のピン位置によって軌跡の延長を想定して、その近傍にその回の最初のピン位置6', 7'を仮定して計算を進めるのが有利である。

後に示す実例において、軌跡の追跡計算で角 t として 0.5° ($\pi/360$ Rad)程度を採り、計算過程iv), v)で、ピン間距離4-9', 5-10'を l_4, l_5 に一致させるときの許容誤差として、骨組の外径寸法の 10^{-5} 倍程度の定値を採った。このような精度の計算で、変化する姿勢が一巡してもとの姿勢に戻り、再び同じ姿勢変化を繰り返すことが確認されて、実際の円滑な姿勢変化が期待できるものがある。この場合前述の許容誤差を例えば $10^{-6} \sim 10^{-9}$ として、計算の精度を高めて得られる軌跡と比較すると、両者の間には顕著な相異がないことによって、これらの軌跡は真実に近いと判断される。角 t については、その大きさは姿勢の算出精度には直接関係しない。 t の値を小さくしても軌跡は顕著には変わらない。(例-1参照)

しかし、このように円滑な姿勢変化が期待できない本論の骨組も多い。すなわち、骨組の形状並びにその姿勢の変化の状態と計算精度によって、前述の第何回目かの計算において角 $f \cong 180^\circ$ (π Rad)として、ピン6の軌跡を逆戻りとししない限り、計算過程ii)~v)のどれかを実現できないときはピン6の軌跡はそこで進行不能の状態になっていると判断される。

このときに、部材を交換して他の適当な部材を1-6とすれば、同じ姿勢で新しいピン6の軌跡は逆戻りしない(ii)~v)が実現できるのが普通である。このとき骨

組の姿勢の軌跡としては逆戻りとならず、他の名称となったもとのピン6は、逆戻りに近いV字型などの反転する軌跡をたどるようになる。(例-3参照)

このように、どの部材を1-6、どの部材を2-7とするかなどの計算過程に係る部材選定の組み合わせは $5! = 120$ 存在し、その1つの組み合わせによってii)~v)が実現できなくても、他の組み合わせでは実現できることがある。ピン1~10が空間に入り乱れて散在した実用性が少ないと考えられる姿勢では特に、有効な部材交換を見いだすことが困難であり、そのような姿勢での軌跡の追跡は当対象外とした。(例-2・例-3参照)

計算の段階iv), v)で部材4-9と5-10を交換することは、角 s で l_4 、角 f で l_5 についての調節をするのを、角 s で l_5 、角 f で l_4 についての調節するように切り換えることになるが、この交換は計算上有利な手段である。

5. 部材応力

本論の骨組の姿勢変化のある段階において、1個のピン例えばピン6の軌跡の切線方向に1個の部材6-0を設置し、材端0を地盤上のピン0とすると、この骨組は一般に静定となる。物体上の定点に作用する x, y, z 方向の外力を $P_1 \sim P_3$ 、 x, y, z 方向を軸とする外力モーメントを $P_4 \sim P_6$ とし、これらを $\{P\}$ で表し、部材1-6~5-10と6-0の応力を $T_1 \sim T_6$ とし $\{T\}$ で表すと、この骨組の釣合式は次のようになる。

$$[K]\{T\} + \{P\} = 0 \dots\dots\dots (15)$$

ここに $i=1 \sim 5$ とし、部材6-0の材長を l_0 、ピン0の座標を x_0, y_0, z_0 とすれば $[K], \{T\}, \{P\}$ の内容は次のようになる。

$$\begin{aligned} k_{1i} &= (x_i - x_{i+5}) / l_i \\ k_{2i} &= (y_i - y_{i+5}) / l_i \\ k_{3i} &= (z_i - z_{i+5}) / l_i \\ k_{4i} &= -k_{2i}(z_{i+5} - z_0) + k_{3i}(y_{i+5} - y_0) \\ k_{5i} &= k_{1i}(z_{i+5} - z_0) - k_{3i}(x_{i+5} - x_0) \\ k_{6i} &= -k_{1i}(y_{i+5} - y_0) + k_{2i}(x_{i+5} - x_0) \\ k_{16} &= (x_0 - x_6) / l_0 \\ k_{26} &= (y_0 - y_6) / l_0 \\ k_{36} &= (z_0 - z_6) / l_0 \\ k_{46} &= 0 \\ k_{56} &= 0 \\ k_{66} &= 0 \end{aligned}$$

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{Bmatrix}, \quad \{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix}$$

本論の骨組の一般的姿勢においては $T_6 \neq 0$ であって、ある外力 $|P|$ を定めると式 (15) に解が存在する。本論の 1 次不安定骨組の姿勢を順次変化して、すべての段階において部材 6—0 を追加設置して静定とすると、 $|P|$ に対して $T_6 = 0$ となる幾つかの姿勢では、部材 6—0 を除去した本論の骨組は $|P|$ に対して平衡状態にある。したがって本論の骨組の静的部材応力は、これらの平衡状態のうち外力によって復元力が生じている安定平衡姿勢に対する応力である。

$T_6 \neq 0$ の姿勢は、本論の骨組を外拘束によって安定化して、複数の姿勢で利用する方法の 1 つであり、その応力は設計応力となる。

$|K|$ の行列式 $|K| = 0$ となる姿勢に対しては、式 (15) をクラメールの定理で解くことを考慮すれば明らかなように、部材応力は算出されず部材 6—0 が追加された骨組が 1 次以上の不安定であり、部材 6—0 を除去した本論の骨組は一般に 2 次、時には 3 次以上の高次不安定状態である。2 次不安定の姿勢においてはピン 6—10 はもう 1 個の軌跡をもち、これら 2 個の軌跡が交叉して後に例一

図—4 a 例—1 の骨組

図—4 b 例—1 のピンの軌跡

2・例—3 に示すように軌跡の分岐点を形成する。

後にも述べるように本論の不安定骨組の利用に関しては、各ピンの軌跡が円滑で、分岐線や反転する軌跡がないものが利用価値が高いと考えられる。また、1 次不安定状態を保ちながら円滑に姿勢が変化する部分だけを利用することも考えられる。

6. 実 例

例—1

表—1 に示すピン位置をもつ、図—4 a (ピンは 1—5 を * で、6—10 を ○ で表す。以下同様。) と写真—1 a・b に示す骨組は、ピン 1—5 が 1 平面上で正方形の 4 頂点と中央点にあるもので、ピン 6—10 の軌跡は図—4 b に示すようである。姿勢変化に伴うピン 6—10 の相互の関係位置は、ピン 6 の軌跡長さを基準として横軸にとって

表—1 例—1 のピン位置

	X	Y	Z
1	5.000000	5.000000	3.000000
2	3.000000	5.000000	3.000000
3	5.000000	3.000000	3.000000
4	5.000000	7.000000	3.000000
5	7.000000	5.000000	3.000000
6	6.000000	5.000000	5.000000
7	4.000000	5.000000	3.800000
8	6.200000	3.000000	4.500000
9	5.800000	7.000000	5.500000
10	8.000000	5.000000	5.200000

図—4 c 例—1 のピン相互の関係位置

図—4 d 例—1 の $|K|$ の変化

写真—1 例—1の模型写真

表—2 例—2のピン位置

	X	Y	Z
1	9.46410	6.00000	3.00000
2	6.00000	4.00000	3.00000
3	6.00000	8.00000	3.00000
4	7.73205	7.00000	3.00000
5	7.73205	5.00000	3.00000
6	9.46410	7.73205	7.00000
7	6.00000	5.73205	7.00000
8	6.00000	9.73205	7.00000
9	7.73205	8.73205	5.00000
10	7.73205	6.73205	5.00000

図—5a 例—2の骨組

図—5b 例—2のピンの軌跡

図—5c 例—2のピン相互の関係位置

図—5d 例—2の|K|の変化

表すと図—4cのようである。またこれに対応する $|K|$ は図—4dのようで、姿勢変化の一巡中に符号が変わることがなく、0となることもない。したがってこの例では2次以上の不安定状態は生じない。本例では、計算中に部材の変換も要しない。

例—2

表—2に示すピン位置をもつ図—5aと写真—2a・bに示す骨組は、ピン1～5が1平面上で正三角形の3頂点と2辺の midpoint に位置し、 xy 面投影図上で部材1-6～5-10が等長、平行かつ等方向で、物体の平面並進運動が可能な骨組である^{3),4)}。この骨組の軌跡は図—5b(ピン6, 7, 8についてのみ示す)・図—5c(分岐の軌跡省

写真—2 例—2 の模型写真

略) のようである。このように姿勢変化の一巡中に 1 平面に関して対称である姿勢となる骨組は、その平面に関して対称である一対の変化姿勢をもち、ピンの軌跡の立体曲線もその平面に関して対称となる。図—5d に示すように、図—5a の姿勢においてこの骨組は $|K|=0$ で 2 次不安定状態であり、この姿勢からは上述と異なる軌跡が存在する。それは写真—2c のように、図—5b (ピン 6, 7, 8 についてのみ示す) に画いた分岐線であり、その末端は物体が地盤と交錯し前述によって追跡を打ち切ったものである。

例—3

表—3 に示すピン位置をもつ、図—6a と写真—3a・b に示す骨組は、ピンに重なり合うものがあり、V 型の 2 部材と N 型の 3 部材をもち、平面不安定骨組に似た姿勢変化をする骨組である。この骨組の軌跡は、図—6b (ピ

表—3 例—3 のピン位置

	X	Y	Z
1	3.000000	3.000000	6.000000
2	3.000000	3.000000	6.000000
3	8.000000	3.000000	4.000000
4	8.000000	3.000000	4.000000
5	8.000000	3.000000	8.000000
6	3.000000	5.000000	4.000000
7	3.000000	5.000000	8.000000
8	5.000000	5.000000	4.000000
9	5.000000	5.000000	8.000000
10	5.000000	5.000000	8.000000

図—6a 例—3 の骨組

図—6b 例—3 のピンの軌跡

図—6c 例—3 のピン相互の関係位置

図-6d 例-3の $|K|$ の変化

写真-3 例-3の模型写真

ン6, 8のみ示す)・図-6cで表される。この骨組は、平面不安定骨組を想定することによって姿勢変化を実感することがかなり容易である。面3-4-5-8-9-10をピン6, 7が通過していく姿勢変化においてピン6, 7は方向を反転する軌跡となる。 $|K|$ の変化は図-6dのように、面3-4-5-8-9-10上にピン6, 7が存在する姿勢で0となるが、この姿勢では部材6-0は骨組の安定化の効果はなく、例えば部材6-0に換えてピン8などに、その軌跡切線方向に部材8-0を追加設置すれば安定となるからこの姿勢は1次不安定である。面3-4-5-8-9-10上にピン1, 2が存在する姿勢で2次自由度状態となる。この姿勢からの軌跡の分岐は図-6b (ピン6, 8のみ示す) および写真-3cのようである。

7. 考 察

さきに述べた1次不安定骨組の姿勢変化の追跡、すなわちピン6~10の軌跡の追跡計算方法によれば、中間に2次不安定状態があっても通常は分岐の軌跡に入らずに進行する。その理由は、本論の軌跡追跡の計算例において t として $0.1 \sim 1^\circ$ ($\pi/1800 \sim \pi/180$ Rad) 程度の値を採用しているから、正確な2次不安定状態から追跡を始めなければちょうど2次不安定状態の姿勢に合致する可能性が極めて少ないからである。例-2では2次不安定姿勢(図-5a)に最初に定めた後、1回目の計算において最初に与える角 t の符号、角 f と s の値によって2つの軌跡の正負計4つの姿勢変化のどれかに誘導できる。

本論の骨組を利用する場合、物体、部材、地盤の相互が接触や衝突を起こさないことが必要とされる。立体的すべての方向に回転できるピンは、凸球面と凹球面の滑り回転や、直交する軸回転の組み合わせによって容易に実現できることは、写真-1・2の模型によって確認されている。そのピンの実際の大きさも接触並びに衝突の検討に際して考慮しなければならない。

例-1において、ピン6~10の平均位置に物体の重心が存在するものと仮定して、これに x, y, z 方向の外力 P を別々に作用させるときの安定平衡姿勢における

表-4 例-1の部材応力

$P=1$

	X	Y	Z
1	-2.0377	-6.3563	0.1353
2	2.1791	1.8885	-0.6245
3	0.0000	2.5132	1.1309
4	0.0000	1.2624	0.9354
5	0.5067	1.4314	-0.6529

$P=-1$

	X	Y	Z
1	-0.7215	3.9655	-5.2937
2	2.4967	3.0649	1.6234
3	-2.0563	-5.0928	1.0535
4	-2.3318	-3.5557	0.2653
5	3.1640	2.1240	1.6503

部材応力は表—4 に示したようであり、これは図—4 a の x , y , z 方向と $-x$, $-y$, $-z$ 方向が重力の方向であるとするときの重力による安定平衡姿勢の部材応力を表している。

本論の骨組は物体と地盤を交換しても、相互の相対的軌跡の関係は変わらない。物体の運動がもしも凸面を滑るようである場合、物体と地盤を交換すれば物体が凹面を滑るような運動をもつ骨組となりうる。

さきに述べたように、図—1 において球面 1~5 の上の円滑な曲線をレールとし、これを外れない車輪で拘束された物体同様の運動に限られる場合、重力などによる復元力によって立体振動が生じる。それは、物体の質量が部材に対して十分に大きく、重心に集中していれば、重心の軌跡の空間曲線に拘束された質点の立体振動に近似すると考えられる。

本論の立体骨組のこの立体振動もしくは立体運動は、動くオブジェや遊戯施設などとして利用されよう⁵⁾。また免震もしくは制振装置のための骨組として利用される可能性があると考えられる。物体が凹面を滑るのに似た運動をする場合は、物体を建築物に置き換えると、水平荷重時の建築物の頂部の運動が下部の運動に比べて小さくなることも期待される。

このように本論の骨組を利用するに際しては、目的に適合した軌跡と部材応力を得るように設計する必要があると考えられる。

本論に関し千葉工業大学学生、玉井和也、寺島吉孝、中村達生諸君の協力を得たので謝意を表す。

参考文献

- 1) 奥津 敏、土屋好代：5 部材立体骨組の姿勢変化について、日本建築学会大会学術講演梗概集（中国），pp.1301~1302, 1990
- 2) 奥津 敏：平行クランク機構の機能をもつ 5 部材立体骨組について、日本建築学会論文報告集，第 351 号，pp.44~54, 1985
- 3) 奥津 敏：平行クランク機構の機能をもつ構造物の力学的性質について、日本建築学会論文報告集，第 246 号，pp.53~62, 1976
- 4) 奥津 敏：動く骨組変身する建築，彰国社，1987
- 5) 奥津 敏：国際科学博覧会の展示装置（政府出展）「ゆらゆらタワー」，「くねくねタワー」，「すくすくタワー」の設計について，日本建築学会論文報告集，第 362 号，pp.45~53, 1986

（1990 年 10 月 9 日原稿受理，1991 年 4 月 8 日採用決定）