極小曲面の変数低減による有限要素解析

FINITE ELEMENT ANALYSIS OF MINIMAL SURFACE BASED ON THE REDUCTION OF VARIABLES

鈴木俊男*, 半谷裕彦**
Toshio SUZUKI and Yasuhiko HANGAI

The paper presents an analytical method of minimal surfaces. The basic differential equations with three unknown coordinate functions are derived from the functional for minimal surfaces. The solution of the differential equations is formulated to be the solution having one unknown variable which denotes the length in the given direction from the initial surface to the unknown surface to be determined. The finite element method is used to the numerical analysis, and the three minimal surfaces are numerically analyzed in order to examine the validity of the proposed method.

Keywords : membrane structure, shape analysis, minimal surface, quasi-linear partial differential equation

膜構造, 形状解析, 極小曲面, 準線形偏微分方程式

1. 序 論

1.1 はじめに

膜構造を設計するうえで, 第一の作業として膜面の形状決定がある。膜構造で用いる膜面は, 力学的に最も安定した曲面である等張力曲面とすることが多い。等張力曲面は自然界では石鹼水の表面張力によって作られる石鹼膜の曲面として知られている。一方, 極小曲面とは空間内の閉曲線が囲む曲面の中で面積が極小となるものをいい, 数学的には等張力曲面は極小曲面と等価であることが知られている。したがって, 等張力曲面を求める問題は極小曲面を求める問題に置き換えることができる。極小曲面は偏微分方程式および積分方程式の応用例として長期間にわたって研究されてきており, その基礎方程式は確立されている^{1)~3)}。

極小曲面問題の数値解析法として差分法や有限要素法等が提案されているが, 解析対象範囲の制限や収束性の悪さ等の問題点があり, 現在では計算途中の解に何らかの操作を加えながら収束解を得る方法が行われている。本報告では極小曲面の微分方程式を座標 X, Y, Z の3関数によって表し, これを等温直交座標系に変換すると3つの独立した調和方程式に帰着できるという数学的性質に着目して, 解析上の変数を1つに低減させることにより収束性が良好な数値解析法について検討するものである。

1.2 既往の研究と本研究の目的

極小曲面の数値解析法についてはこれまでも多くの研究がなされてきたが, これらは大別して次の2つの方法に分けることができる。

第1の方法は, 式(1)の極小曲面方程式または式(2)で与えられる汎関数(面積汎関数)を基礎式として, 差分法または有限要素法によって解く方法である。

極小曲面方程式:

$$(1+U_x^2) \cdot U_{xx} - 2 U_x U_y \cdot U_{xy} + (1+U_y^2) \cdot U_{yy} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

面積汎関数:

$$\Pi = \int \sqrt{1+U_x^2+U_y^2} \, dxdy \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに, U は直交座標系 $O-XYZ$ における曲面を表す変数で $Z=U(x, y)$ である。また, U_x, U_y はそれぞれ $U_x = \partial U / \partial x, U_y = \partial U / \partial y$ である。

第2の方法は, 等張力曲面の観点から, 式(3)で定義される汎関数を用い, 弾性論における初期応力問題として扱う方法である。

$$\Pi = \int n_0 \varepsilon \, dxdy \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに, n_0 は等張力, ε は求める曲面の初期曲面に対するひずみである。

まず, 第1の方法による研究について述べる。

Greenspan⁴⁾ は, 汎関数(2)の被積分項に含まれる

* フジタ技術研究所

** 東京大学生産技術研究所 教授・工博

Technical Research Institute Fujita Corporation

Prof., Institute of Industrial Science University of Tokyo, Dr. Eng.

U に関する偏微分係数に対して差分表示式を適用している。この方法によると、極小曲面方程式の差分化に伴う煩雑さを避けることが示されている。非線形方程式の数値計算法としては、遅延因子を用いた一般化された Newton-Raphson 法（以下、一般 NR 法と略す）を用いている。解の収束性に影響する要因として、分割数、遅延因子および解法の種類を考え、それらが反復回数と精度に及ぼす度合いについて考察している。解析例として、回転懸垂面と式 $u = [\cosh^2 x - y^2]^{1/2}$ で表される曲面の 2 つの曲面を解析している。Concus⁵⁾ は、極小曲面方程式 (1) を直接差分化する方法により解析している。非線形方程式の数値計算法としては一般 NR 法を用いている。その結果、差分近似の方法の中で U に関する 1 階の偏微分係数には中央差分を用いるとよいこと、および解の収束性には遅延因子が大きく影響することの 2 点を指摘している。解析例として、式 $u = [\cosh^2 x - y^2]^{1/2}$ で表される曲面を解析している。Otto and Trostel⁶⁾ は、式 (1) の極小曲面方程式において境界条件を満足する Fourier 級数解を用いて HP 曲面を解析している。項数を 2 項まで取ると精度は数 % の誤差となることが示されている。Ishii and Suzuki⁷⁾ は、極小曲面方程式 (1) に差分法を適用している。非線形方程式の数値計算法としては Gauss-Seidel 法を採用している。解析例は HP 曲面で、分割数と収束性の関係を検討している。Hinata, Shimasaki and Kiyono⁸⁾ は、面積汎関数 (2) に有限要素法を適用している。汎関数を積分して陽な形で求めた結果、座標値 X, Y, U は互いに循環性があることを指摘し、このことから未知量として X, Y, U のいずれを選んでもよいことを示している。非線形方程式の数値計算法としては一般 NR 法を用いている。解析例として回転懸垂面と Wiener-Douglas 問題⁹⁾ を解析している。前者の曲面では精度の検討を、後者の曲面では開口角と高さをパラメータとした時の曲面の存在範囲を明らかにしている。

次に、第 2 の方法による研究について述べる。この方法の特徴は、汎関数を初期応力がなす弾性ポテンシャルエネルギーとすること、および未知量が座標値 X, Y, Z の 3 変数とすること、の 2 点である。

Haug and Powell¹⁰⁾ は、式 (3) の汎関数に有限要素法を適用している。要素は四辺形要素とし、空間上での要素のゆがみを表現できる斜交座標系を用いている。応力 n_0 はオイラー応力、ひずみ ϵ は変形後の第 1 基本計量としている。非線形方程式の数値計算法としては Newton-Raphson 法を用いている。解析例として簡単なサスペンション膜形状を解析している。Barnes¹¹⁾ は動的緩和法 (DR 法) を用いて膜形状を解析している。釣合式は三角形要素の要素力を幾何学的関係から直接求めることで導いている。質量マトリックスと減衰マトリッ

クスを追加し、初期状態から最終位置までを動的に追跡している。この方法により動的不安定状態から安定状態へ移動させることができることを二～三の解析例により示している。石井¹²⁾ は、応力 n_0 をオイラー応力、ひずみを要素の変形前後の面積変化率として定義し、有限要素法を用いて解析している。非線形方程式の数値計算法としては Newton-Raphson 法を採用している。増分剛性として釣合式の厳密な接線剛性の代わりに幾何剛性を用いることによって解の収束性を改良させている。解析例として境界形状が複雑な膜構造を解析している。安宅¹³⁾ は 0 次弾性体の概念を導入することによって、等張力曲面の形状決定という幾何学の問題が通常の弾性論を拡張することにより取り扱えることを理論的に考察している。本間ら¹⁴⁾ は、石井¹²⁾ の方法の内、数値計算法として一般 NR 法を用い、増分剛性として釣合式の厳密な接線剛性を用いた解析法を示している。解析例として実際のサスペンション膜を解析している。大森ら¹⁵⁾ は、石井¹²⁾ の方法の内、増分剛性として釣合式の厳密な接線剛性を用いた解析法を示している。初期曲面と極小曲面とで囲まれた空間の内容積を指定することによって収束性の改善を計っている。解析例として回転懸垂面と複雑なサスペンション膜を解析している。

次に、既往の 2 方法における問題点を述べる。

まず、極小曲面方程式 (1) を基にした第 1 の方法に関する問題点は次のとおりである。

- ① 曲面上の微係数 U_x, U_y が大きくなる場合解の精度が落ちる。
- ② 未知量が多価となる曲面は解析できない。
- ③ 差分法およびそれに類した解析では収束回数が大きい。

第 2 の方法は第 1 の方法のように解析の制約がないことおよび定式化が容易であることの利点はあるが、実際の計算では解が収束しない場合が多い。問題点を整理すると次のようになる。

- ① 初期値を正解から離して設定すると収束しない場合が生じる。
- ② 収束解が得られても各要素の面積が不均一となり、応力解析用の要素分割には不相当となる曲面が得られる場合がある。
- ③ 収束解を得るためには、初期曲面、一般 NR 法で用いる遅延因子および増分剛性を問題によって試行錯誤的に設定する必要がある。

以上が既往の研究における問題点の概要である。これらの問題を要約すると次のように言える。

膜構造の設計に必要な極小曲面を設計条件に適合した任意の境界形状に対して求めるためには、極小曲面を $Z = U(x, y)$ の形で表す解析ではなく、極小曲面の座標関数として X, Y, Z を用いた解析が必要となる。し

かし、3つの座標関数をすべて変数として扱うといった汎関数に初期応力のなす弾性ポテンシャルを用いる方法では、本来3個の座標関数間に1個の関係式が存在するにもかかわらず、この関係式を無視しているため収束性が極めて悪い。

以上を基とし本論文では、第1と第2の手法の利点を取り込んだ次のような手法を提案し検討する。

極小曲面の基礎式として3つの座標関数で表された連続体表現の汎関数を用いることとする。これは、第1の方法で用いた基礎式の曲面積を一般の曲面パラメータで表した曲面積に拡張したものである。この汎関数の停留条件より導かれる釣合方程式は3座標関数 X, Y, Z に関する非線形偏微分方程式となるが、この方程式は等温直交関係を満足する座標系に座標変換を施すことによって3座標関数に関する独立した調和方程式に変換される。このことから3つの座標関数は1つの共通の関数で表すことができるという性質があり、本論文ではこの1つの共通な関数を未知変数とし、この変数に初期曲面からのびた任意の方向をもつ距離ベクトルの大きさという意味をもたせた解析手法を提案する。

2. 極小曲面の基礎式と一般解

2.1 極小曲面の基礎方程式

本論文の極小曲面は式(1)を一般化して次のように定義する。

「任意の曲面パラメータ (α, β) を採用し、曲面形状を $X = X(\alpha, \beta)$, $Y = Y(\alpha, \beta)$, $Z = Z(\alpha, \beta)$ で表す時、極小曲面とは、汎関数

$$\Pi = \int H d\alpha d\beta \cdots \cdots \cdots (4)$$

を極小とする曲面のことをいう。ここに、

$$H = \sqrt{g_{\alpha\alpha}g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta}^2} \cdots \cdots \cdots (5)$$

$$g_{\alpha\alpha} = X_\alpha^2 + Y_\alpha^2 + Z_\alpha^2 \cdots \cdots \cdots (6-1)$$

$$g_{\beta\beta} = X_\beta^2 + Y_\beta^2 + Z_\beta^2 \cdots \cdots \cdots (6-2)$$

$$g_{\alpha\beta} = X_\alpha X_\beta + Y_\alpha Y_\beta + Z_\alpha Z_\beta \cdots \cdots \cdots (6-3)$$

$$X_\alpha = \partial X / \partial \alpha \text{ 等}$$

である。」

また、式(4)のオイラー方程式は次式となる。

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial H}{\partial X_\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial H}{\partial X_\beta} \right) = 0 \cdots \cdots \cdots (7-1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial H}{\partial Y_\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial H}{\partial Y_\beta} \right) = 0 \cdots \cdots \cdots (7-2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial H}{\partial Z_\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial H}{\partial Z_\beta} \right) = 0 \cdots \cdots \cdots (7-3)$$

上式の三式をまとめて次のように書き直す。

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial H}{\partial r_\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial H}{\partial r_\beta} \right) = 0 \cdots \cdots \cdots (8)$$

ここに、 r_α と r_β は

$$r_\alpha = (X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha) \cdots \cdots \cdots (9-1)$$

$$r_\beta = (X_\beta, Y_\beta, Z_\beta) \cdots \cdots \cdots (9-2)$$

と表されるベクトルである。

次に、式(8)を展開すると最終的に次式となる。

$$(1/H)q + (-1/H^3)\{f_\alpha \langle q, r_\alpha \rangle + f_\beta \langle q, r_\beta \rangle\} = 0 \cdots \cdots \cdots (10)$$

ここに、

$$q = g_{\beta\beta}r_{\alpha\alpha} - 2g_{\alpha\beta}r_{\alpha\beta} + g_{\alpha\alpha}r_{\beta\beta} \cdots \cdots \cdots (11)$$

$$f_\alpha = r_\alpha g_{\beta\beta} - g_{\alpha\beta}r_\beta \cdots \cdots \cdots (12-1)$$

$$f_\beta = r_\beta g_{\alpha\alpha} - g_{\alpha\beta}r_\alpha \cdots \cdots \cdots (12-2)$$

$\langle q, r_\alpha \rangle$ はベクトル q, r_α の内積を示す。

したがって

$$q = 0 \cdots \cdots \cdots (13)$$

は式(10)を満足する。そこで本論文では上式を基礎式として採用する。つまり式(11)より

$$g_{\beta\beta}r_{\alpha\alpha} - 2g_{\alpha\beta}r_{\alpha\beta} + g_{\alpha\alpha}r_{\beta\beta} = 0 \cdots \cdots \cdots (14)$$

である。上式を元の未知量 X, Y, Z に戻すと、

$$g_{\beta\beta}X_{\alpha\alpha} - 2g_{\alpha\beta}X_{\alpha\beta} + g_{\alpha\alpha}X_{\beta\beta} = 0 \cdots \cdots \cdots (15-1)$$

$$g_{\beta\beta}Y_{\alpha\alpha} - 2g_{\alpha\beta}Y_{\alpha\beta} + g_{\alpha\alpha}Y_{\beta\beta} = 0 \cdots \cdots \cdots (15-2)$$

$$g_{\beta\beta}Z_{\alpha\alpha} - 2g_{\alpha\beta}Z_{\alpha\beta} + g_{\alpha\alpha}Z_{\beta\beta} = 0 \cdots \cdots \cdots (15-3)$$

となる。

式(14)または式(15)は未知量が X, Y, Z に関する準線形連立2階非線形偏微分方程式であり、この式が本論文における極小曲面の基礎方程式となる。

2.2 極小曲面の一般解

式(15)で表された極小曲面の基礎方程式において、2階偏微分 $X_{\alpha\alpha}, X_{\alpha\beta}, X_{\beta\beta}$ 等の係数 $g_{\beta\beta}, g_{\alpha\beta}, g_{\alpha\alpha}$ は1階偏微分の2乗を含む非線形項となっており、このままでは解を見いだすことができない。しかし、この式を曲面上の点 (α, β) において、等温直交関係式

$$g_{\xi\xi} = g_{\eta\eta} \cdots \cdots \cdots (16-1)$$

$$g_{\xi\eta} = 0 \cdots \cdots \cdots (16-2)$$

を満たす座標系 (ξ, η) においては次式に帰着できる。

$$\frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial \eta^2} = 0 \cdots \cdots \cdots (17-1)$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial \eta^2} = 0 \cdots \cdots \cdots (17-2)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial \eta^2} = 0 \cdots \cdots \cdots (17-3)$$

文献1)を参照して、式(17)の解を以下のように求める。式(17)は X, Y, Z に関して同一の調和方程式となっている。そこで、調和方程式

$$\frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial \eta^2} = 0 \cdots \cdots \cdots (18)$$

を考え、 X, Y, Z を $a(\xi, \eta)$ の関数として次のように表す。

$$X = X(a) \cdots \cdots \cdots (19-1)$$

$$Y = Y(a) \cdots \cdots \cdots (19-2)$$

$$Z = Z(a) \cdots \cdots \cdots (19-3)$$

式 (19) を式 (17) に代入し, $X(a)$, $Y(a)$, $Z(a)$ の形式を求める。

式 (19-1) を式 (17-1) に代入すると

$$\frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial \eta^2} = 0 \quad (20)$$

また, 式 (19-1) より

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} = \frac{dX}{da} \frac{\partial a}{\partial \xi} \quad (21-1)$$

$$\frac{\partial X}{\partial \eta} = \frac{dX}{da} \frac{\partial a}{\partial \eta} \quad (21-2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{dX}{da} \right) \cdot \frac{\partial a}{\partial \xi} + \frac{dX}{da} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial a}{\partial \xi} \right) \\ &= \frac{d^2 X}{da^2} \left(\frac{\partial a}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{dX}{da} \cdot \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} \end{aligned} \quad (21-3)$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial \eta^2} = \frac{d^2 X}{da^2} \left(\frac{\partial a}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{dX}{da} \cdot \frac{\partial^2 a}{\partial \eta^2} \quad (21-4)$$

式 (21-3) と式 (21-4) を (20) に代入すると次式となる。

$$\frac{d^2 X}{da^2} \left[\left(\frac{\partial a}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \frac{dX}{da} \left(\frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial \eta^2} \right) = 0 \quad (22)$$

ところで, 左辺第 2 項の $\left(\frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial \eta^2} \right)$ は式 (18) より 0 となるが, 左辺第 1 項の $\left[\left(\frac{\partial a}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial \eta} \right)^2 \right]$ は一般的に 0 とはならないので上式が成立するためには

$$\frac{d^2 X}{da^2} = 0 \quad (23)$$

となる必要がある。

式 (23) を 2 回積分すると

$$X = c_1 a + c_2 \quad (24-1)$$

となり, X の形式は a の一次式となることが分かる。ここに, c_1 , c_2 は積分定数である。

同様に, Y , Z についても次のように表せる。

$$Y = d_1 a + d_2 \quad (24-2)$$

$$Z = e_1 a + e_2 \quad (24-3)$$

上式から, X , Y , Z は互いに独立した変数ではなく, a という共通の関数によって結び付けられた従属関係にある変数であることが分かる。

次に, パラメータ (ξ, η) で表された上式を, 元のパラメータ (α, β) に変換すると, 最終的に極小曲面の基礎式 (15) の一般解は, 次式となる。

$$X = \lambda(\alpha, \beta) a(\alpha, \beta) + x_0(\alpha, \beta) \quad (25-1)$$

$$Y = \mu(\alpha, \beta) a(\alpha, \beta) + y_0(\alpha, \beta) \quad (25-2)$$

$$Z = \nu(\alpha, \beta) a(\alpha, \beta) + z_0(\alpha, \beta) \quad (25-3)$$

ここに, $a(\alpha, \beta)$ が未知量で, λ , μ , ν , x_0 , y_0 , z_0 は, 積分定数である。

上式と似た形式の式は文献 5) にも紹介されているが, 本報告では, λ , μ , ν と x_0 , y_0 , z_0 を α , β の関数で任意に定める量とした。上式の物理的意味は, 図-1 で示さ

図-1 曲面を決定する未知量 a とその方向余弦

図-2 三角形要素による曲面表示

れるように x_0 , y_0 , z_0 を初期曲面とし, λ , μ , ν を初期曲面上で設定された方向余弦としたとき, 極小曲面を表す座標 X , Y , Z は, 初期曲面上の座標 x_0 , y_0 , z_0 と方向余弦方向の距離 a の和として求められることである。

極小曲面の汎関数 (4) に上式の一般解 (25) を代入する。この結果, 極小曲面を表す未知量は一変数 $a(\alpha, \beta)$ に低減されたことになる。

3. 有限要素法による定式化

前章で求めた極小曲面を表す一般解 (25) と汎関数 (4) を用いた有限要素法について述べる。

ここでは, 3 角形要素を用いる。図-2 に, 初期曲面と極小曲面上の座標および方向余弦を示す。 $a_1 \sim a_3$ はそれぞれ節点 1~3 における未知量 a を表している。

ここで,

x_{0i}, y_{0i}, z_{0i} : 初期曲面上の節点 i の座標

x_{0e}, y_{0e}, z_{0e} : 初期曲面上の要素内部の座標

x_i, y_i, z_i : 極小曲面上の節点 i の座標

x_e, y_e, z_e : 極小曲面上の要素内部の座標

$\lambda_{xi}, \lambda_{yi}, \lambda_{zi}$: 節点 i の方向余弦

a_i : 節点 i の距離 (未知量)

また, 次の記号を定義する。

$$X_{0i} = \{x_{01} \ x_{02} \ x_{03} \ y_{01} \ y_{02} \ y_{03} \ z_{01} \ z_{02} \ z_{03}\} \quad (26-1)$$

$$X_{0e} = \{x_{0e} \ y_{0e} \ z_{0e}\} \quad (26-2)$$

$$X_i = \{x_i \ x_2 \ x_3 \ y_i \ y_2 \ y_3 \ z_i \ z_2 \ z_3\} \quad (26-3)$$

$$X_e = \{x_e \ y_e \ z_e\} \quad (26-4)$$

$$\begin{aligned} A_x &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \lambda_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad A_y = \begin{bmatrix} \mu_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \mu_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \mu_3 \end{bmatrix}, \\ Az &= \begin{bmatrix} \nu_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \nu_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \nu_3 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

$$a_i = \{a_1 \ a_2 \ a_3\} \dots \dots \dots (28)$$

式 (25) より極小曲面上の節点座標 $\mathbf{x}_i$ は、初期曲面上の節点座標 $\mathbf{x}_{0i}$ と節点距離 $\mathbf{a}_i$ とにより、次のように表される。

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{0i} + \Lambda \cdot \mathbf{a}_i \dots \dots \dots (29)$$

ここに、

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_x \\ \Lambda_y \\ \Lambda_z \end{bmatrix} \dots\dots\dots (30)$$

また、要素内部の座標 x_e は要素節点座標 x_i で表すことができる。つまり

$$\begin{aligned} x_e &= \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & x & \cdot & \cdot & x & \cdot & \cdot & x & \cdot \\ \cdot & \cdot & y & \cdot & \cdot & y & \cdot & \cdot & y \end{bmatrix} \\ &\cdot \begin{bmatrix} A & \cdot & \cdot \\ \cdot & A & \cdot \\ \cdot & \cdot & A \end{bmatrix} x_i \\ &= U(x, y) \cdot x_i \\ &= U \cdot (x_{0i} + A \cdot a_i) \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

上式が、極小曲面上の要素内部の座標 $\mathbf{x}_e$ を、節点距離 $\mathbf{a}_i$ で表したもので、今後第 1 基本計量を計算するときの基本となるものである。

つぎに、要素座標系をデカルト座標で表し、要素の汎関数を次式で定義する。

$$\Pi_e = \int \sqrt{g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2} \, dx dy \dots\dots\dots (32)$$

極小曲面上の位置ベクトルは

$$r = x_e e_x + y_e e_y + z_e e_z \cdots \cdots (33)$$

で表されるから、第1基本計量は次式となる。

$$g_{xx} = \left(\frac{\partial x_e}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_e}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_e}{\partial x}\right)^2 \dots\dots\dots (34-1)$$

$$g_{yy} = \left(\frac{\partial x_e}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_e}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_e}{\partial y}\right)^2 \dots\dots\dots (34-2)$$

$$g_{xy} = \frac{\partial x_e}{\partial x} \frac{\partial x_e}{\partial y} + \frac{\partial y_e}{\partial x} \frac{\partial y_e}{\partial y} + \frac{\partial z_e}{\partial x} \frac{\partial z_e}{\partial y} \dots (34-3)$$

式 (31) から

$$\begin{Bmatrix} \partial x_e / \partial x \\ \partial y_e / \partial x \\ \partial z_e / \partial x \end{Bmatrix} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot x_i = U_x x_i \dots\dots\dots (35-1)$$

$$\begin{Bmatrix} \partial x_e / \partial y \\ \partial y_e / \partial y \\ \partial z_e / \partial y \end{Bmatrix} = \frac{\partial U}{\partial y} \cdot x_i = U_y x_i \dots\dots\dots (35-2)$$

式 (35) を式 (34) に代入すると

$$g_{xx} = \mathbf{x}_i^t \mathbf{U}_x \mathbf{U}_x \mathbf{x}_i \dots\dots\dots (36-1)$$

$$g_{yy} = {}^t x_i {}^t U_y U_y x_i \dots\dots\dots (36-2)$$

$$g_{xy} = {}^t x_i {}^t U_x U_y x_i \dots \dots \dots (36-3)$$

次に，第1基本計量のベクトル表示を次の形で示す。

$$\mathbf{g} = {}^t\{g_{xx}g_{yy}g_{xy}\} \dots\dots\dots (37)$$

さらに、 $\mathbf{g}$ の変分を式 (36) と式 (37) から求めると、 $\delta \mathbf{x}_i$ を用いて次のように表すことができる。

$$\delta \mathbf{g} = V \cdot \delta \mathbf{x}_i \dots\dots\dots (38)$$

ここに、

$$V = \begin{bmatrix} 2^t x_i^t U_x U_x \\ 2^t x_i^t U_y U_y \\ \vdots \\ 2^t x_i^t (U_x U_y + U_y U_x) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (39)$$

次に、汎関数 (32) の変分を考える。まず H の第 1 変分をつくると

$$\begin{aligned} \delta H &= \delta \sqrt{g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2} \\ &= \frac{1}{2H} (\delta g_{xx}g_{yy} + g_{xx}\delta g_{yy} - 2g_{xy}\delta g_{xy}) \\ &= \frac{1}{2H} \{\delta g_{xx}\delta g_{yy}\delta g_{xy}\} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g_{xx} \\ g_{yy} \\ g_{xy} \end{Bmatrix} \\ &\dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

ここで、

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (41)$$

$$\sigma = {}^t\{\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3\} = (1/2 H) Dg \dots\dots\dots (42)$$

とすると，式 (40) は式 (41)，式 (42) および式 (38) を用いて

$$\delta H = {}^t \delta \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\sigma} = {}^t \delta \mathbf{x}_i {}^t V \boldsymbol{\sigma} \dots\dots\dots (43)$$

さらに，式 (29) を用いて式 (43) を変形すると

$$\delta H = {}^t \delta \mathbf{a}_i {}^t \Lambda {}^t V \sigma \dots\dots\dots (44)$$

となる。これを式 (32) の変分式に代入すると

$$\delta \Pi_e = {}^t \delta \mathbf{a}_i \left(n_0 {}^t \Lambda \int {}^t V \sigma dx dy \right) \dots \dots \dots (45)$$

結局 $\delta \Pi_e = 0$ より停留式は次式となる。

$$n_0 \Lambda \int V \sigma dx dy = 0 \dots\dots\dots (46)$$

次に, Newton-Raphson 法を用いるときの, 増分方程式を求める。まず式 (46) の被積分項の増分を考える。

$$\begin{aligned} d({}^tV\sigma) &= {}^tV \cdot d\sigma + d{}^tV \cdot \sigma \\ &= {}^tV \cdot d\sigma + \left[\begin{array}{c} {}^t dx_i \cdot 2 {}^t U_x U_x \\ {}^t dx_i \cdot 2 {}^t U_y U_y \\ {}^t dx_i \cdot ({}^t U_x U_y + {}^t U_y U_x) \end{array} \right] \sigma \\ &= {}^tV \frac{D}{2} d\left(\frac{g}{H}\right) \\ &\quad + [2 {}^t U_x U_x dx_i \quad 2 {}^t U_y U_y dx_i \\ &\quad \quad \quad ({}^t U_x U_y + {}^t U_y U_x) dx_i] \sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= {}^tV \frac{D}{2H^2} (dgH - g dH) \\
&\quad + [2 {}^tU_x U_x \quad 2 {}^tU_y U_y \\
&\quad \quad ({}^tU_x U_y + {}^tU_y U_x)] {}^t\sigma dx_i \\
&= \left(\frac{1}{2H} {}^tV D V - \frac{1}{H} {}^tV \sigma \cdot {}^t\sigma V \right) dx_i \\
&\quad + [2 {}^tU_x U_x \quad 2 {}^tU_y U_y \\
&\quad \quad {}^tU_x U_y + {}^tU_y U_x] {}^t\sigma dx_i \cdots (47)
\end{aligned}$$

上式に式(29)の増分式 $dx_i = \Lambda da_i$ を代入し、さらに式(46)の増分式に代入すると次式が得られる。

$$K \cdot da_i = df_i^* \cdots (48)$$

ここに、

$$K = K_e + K_g \cdots (49)$$

$$K_e = n_0 {}^t\Lambda \int \left(\frac{1}{2H} {}^tV D V - \frac{1}{H} {}^tV \sigma \cdot {}^t\sigma V \right) \Lambda dx dy \cdots (50)$$

$$K_g = n_0 {}^t\Lambda \int [2 {}^tU_x U_x \quad 2 {}^tU_y U_y \quad {}^tU_x U_y + {}^tU_y U_x] \cdot \sigma \Lambda dx dy \cdots (51)$$

$$df_i^* = -n_0 {}^t\Lambda \int {}^tV \sigma dx dy \cdots (52)$$

である。

式(48)が各ステップの増分方程式で、式(52)は不釣合量を表す。計算は df_i^* が0に近くなるまで反復させる。

4. 数値解析例

4.1 回転懸垂曲面

極小曲面の解析例として、回転懸垂曲面を解析した(図—3)。この曲面は、極小曲面の解析解が得られている例としてよく知られているが、数値解析上は、曲面の勾配が大きくなることや、2価となるために収束性がよくない例と言われている。

分割数は、周方向に24分割、高さ方向に10分割である。初期曲面は安定解(汎関数(4)が極小となる解)の時は円筒面とし、不安定解(汎関数(4)が極大となる解)の時は次のようにして求めた。極小曲面の $z=0.5$ における位置をくびれ位置とすると、安定解の極小曲面のくびれ位置を半径方向に強制移動させて解析した時の曲面を初期曲面とした。強制移動量はこの初期曲面

図—3 回転懸垂曲面

をもとにして極小曲面を解析した時に解が収束するような位置までの距離とするが、この場合にはあらかじめ理論解がわかっているのでその近傍の位置 ($r=0.3$) まで移動させた(図—4)。方向余弦は各節点から回転軸方向にかつ XY 平面に平行な方向にとった。

解析結果を表—1に示す。表中の数値は曲面位置 r を円の半径 R で無次元化した量である。本解析解と理論解¹⁵⁾は、安定解と不安定解の両方の場合に対して、よく一致していることが分かる。図—5、図—6にそれぞれ極小曲面とその断面図を示した。図—7は、円の高さ L/R を変えたときの鞍点の位置 r_0/R の変化の様子を示したものである。数値解(●)は理論解¹⁵⁾とよく一致している。曲面が存在する限界高さは、本解析解は0.6550、理論解^{15), 16)}は0.6628であった。

(a) 安定解

(b) 不安定解

図—4 初期曲面(回転懸垂曲面)

表—1 極小曲面の数値解析結果(回転懸垂曲面)

Z/R	安定解		不安定解	
	本解析解	理論解 ¹⁵⁾	本解析解	理論解 ¹⁵⁾
0.50000	0.84542	0.84834	0.23484	0.23510
0.40000	0.85143	0.85424	0.25644	0.25669
0.30000	0.86955	0.87202	0.32522	0.32542
0.20000	0.90004	0.90194	0.45380	0.45393
0.10000	0.94332	0.94440	0.66577	0.66582
0.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

(a) 安定解

(b) 不安定解

図—5 極小曲面 (回転懸垂面)

図—6 極小曲面の断面図 (回転懸垂面)

図—7 極小曲面の鞍点の位置 (回転懸垂面)

4.2 Wiener-Douglas 問題

Wiener-Douglas 問題とは、図—8 に示すような 2 つの平行に置かれた円と、これらの円を結ぶ 2 つの平行な直線とを境界に持つ極小曲面を求める問題である。この

図—8 Wiener-Douglas 問題

安定解 1

安定解 2

図—9 二つの安定解 (Wiener-Douglas 問題)⁹⁾

(a) 安定解 1

(b) 安定解 2

図—10 初期曲面 (Wiener-Douglas 問題)

ような境界では、2 つの円の間隔 L と半開角 ϕ との値によって二種類の安定的な極小曲面が生じる場合があることが知られている⁹⁾ (図—9, 安定解 1 と安定解 2)。本解析では $L/R=1.5$, $\phi=150^\circ$ とした。

図一11 方向余弦 (Wiener-Douglas 問題)

(a) 安定解1

(b) 安定解2

図一12 極小曲面 (Wiener-Douglas 問題)

図一13 極小曲面の断面図 (Wiener-Douglas 問題)

分割数は円周方向には等間隔で 20 分割, z 方向には 10 分割とした。初期曲面は図一10 に示すようにとり, 方向余弦は各節点から図一11 に示すような方向にかつ

図一14 極小曲面の鞍点の位置⁸⁾ (Wiener-Douglas 問題)

表一2 極小曲面の鞍点の座標の比較 (Wiener-Douglas 問題)

	本解析解	文献8)の解
安定解1	1.243	1.260
安定解2	0.274	0.262

図一15 収束回数と誤差 (Wiener-Douglas 問題, 安定解1)

図一16 HP 曲面問題の境界形状

xy 平面に平行とした。図一12 に極小曲面を示した。図一12 は文献9) の概念図 (図一9) とよく似ていることが分かる。図一13 は $y=0$ における断面図を示した。図一14 と表一2 にそれぞれ鞍点の位置 (本解析解●印) とその値を示し, 文献8) の値と比較した。表中の数値は鞍点の位置 H を円の半径 R で無次元化した量である。これらから, 本解析解は文献8) の結果とはほぼ一致していることがわかる。図一15 は, 安定解1 の場合の収束回数と誤差の関係を示したものであるが, 誤差を 10^{-4} に収れんさせるための収束回数は, 本解析では5回, 文献8) では約150回であり, 本解析の収束性は文献8)

図一17 極小曲面 (HP 曲面問題) $H=1.0$ 図一18 極小曲面の断面図 (HP 曲面問題) $y=a/4$

と比較して極めてよいことが分かる。安定解 2 の場合もほぼ同様な傾向であった。本解析の収束性がよい理由は、未知数に対する方向余弦の与え方が適切であったためと考えられる。

4.3 HP 曲面

図一16に示すような、HP 曲面を構成する4辺を境界に持つ極小曲面を求める。

分割数は x, y 方向共に12分割、初期曲面はHP 曲面 $z=2h(x/a)(y/b)$ とした。方向余弦はすべての節点で $(0, 0, 1)$ とした。

図一17に、 $H=1.0$ の場合の極小曲面を示した。図一18に、 $y=4/a$ における断面図を示した。本解析解は文献6)の値とほぼ一致していることが分かる。

5. まとめ

極小曲面形状を求めるための一つの数値解析手法を提案しその特徴を具体例より検討した。本手法は極小曲面の汎関数として一般の曲面パラメータで表現した曲面の汎関数を用いている。汎関数から導かれた非線形微分方程式の解の性質から極小曲面の未知量は初期曲面から任意の方向に設定された方向余弦方向の距離として表現できることを示した。本解析法の特徴は次のとおりである。

- (1) 初期曲面と曲面上の方向余弦は、次ののべる制約を満足する範囲で任意に設定できる。ただし、方向余弦の設定に際しては、求まる極小曲面が任意の2節点で指定した方向余弦の交点と初期曲面との間に存在するように選ばなくてはならないという制約がある。
- (2) 解析する未知量は、1節点あたり1変数であり、従来の3変数と比較して取り扱いが容易になる。
- (3) 解の収束過程で特別な操作を行わずに、確実に収束解が得られる。

謝 辞

本報告をまとめるにあたって、貴重なご意見を頂いた横浜国立大学教授 石井一夫博士、名古屋大学助教授 大森博司博士および原稿作成にあたり多大な労力と有意義な示唆を与えて頂いた株式会社フジタ 萩原伸幸氏に深く感謝致します。

参考文献

- 1) Courant, R. and Hilbert, D. : Methoden der Mathematischen Physik, Berlin, Springer, 1937
- 2) Batemann, H. : Partial differential equations of mathematical physics, New York, Dover, 1931
- 3) 森 正武 : 有限要素法とその応用, §13.4 極小曲面問題, 応用数学叢書, 岩波書店, pp.157~163, 1980
- 4) Greenspan, D. : On approximating extremals of functionals, Part I, ICC Bull., V.4, MR 32 # 8526, pp.99~120, 1965
- 5) Concus, P. : Numerical solution of the minimal surface equation, Math. Comp., V.21, MR 37 # 4968, pp.340~350, 1967
- 6) Otto, F. and Trostel, R. : Tensile Structures Vol. I, The M.I.T. Press, pp.290~296, 1967
- 7) Ishii, K and Suzuki, T. : Shape of Membrane Structures, Proc. of IASS Pacific Symposium on Tension Structures and Space Frames, Tokyo Japan, Oct. 1971.
- 8) Hinata, M., Shimasaki, M. and Kiyono, T. : Numerical solution of Plateau's problem by a finite element method, Math. Comp., V.28, No.125, pp.45~60, 1974.
- 9) Courant, R. : Dirichlet's Principle, Conformal Mapping, and Minimal Surfaces, Interscience, New York, 1950
- 10) Haug, E., and Powell, G. H. : Finite element analysis of nonlinear membrane structures, Proc. of IASS Pacific Symposium on Tension Structures and Space Frames, Tokyo Japan, 1971.10
- 11) Barnes, M.R. : Form-finding of minimal surface membranes, Proc. of IASS World Congress on Space Enclosures, Montreal Canada, 1976.7
- 12) 石井一夫 : 膜構造の形状解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (関東) pp.2599~2600, 1984.10
- 13) 安宅信行 : 膜構造の形態の理論について, 日本建築学会学術講演梗概集, 1987.10.
- 14) 本間俊雄, 鈴木俊男, 荒井高志, 中山昌尚, 坂根伸夫 :

- 膜構造における極小曲面問題について，第2回シェルと空間構造に関する日韓コロキウム，pp.111～118，1987.8
- 15) 大森博司，萩原伸幸，松井徹哉，松岡 理：有限要素法による極小曲面の数値解析，膜構造研究論文集，pp.1～10，1988
- 16) 佐藤幸平：面積最小の問題の石鹼膜実験，数学セミナー，p.64，1973.11
- (1990年11月10日原稿受理，1991年5月18日採用決定)
-