空間構造における曲げ剛性の影響

INFLUENCE OF BENDING RIGIDITY IN SHELL-LIKE SPATIAL STRUCTURES

都 鎮 洙*, 川 口 衛**

Jin Soo DO and Mamoru KAWAGUCHI

Existence of membrane stresses is an essential feature of shell structures which makes them one of the most desirable structural systems, but in practical shell designs, the results always involve certain disturbances on this ideal state, especially in areas adjacent to the boundaries.

Such disturbances are largely dependent on the bending rigidity of the shell. In the analysis of structures such as lattice shells and shells with ribs, the extensional and bending rigidities can be changed independently of each other and, therefore, it seems worthwhile to investigate how shell behaviors are influenced by the relation of these variables for understanding fundamental characteristics of shells. Moreover, a certain type of semi-rigid tension structures, excessive deformation of a roof can be effectively prevented and much freer shape can be also obtained by providing the tension members with a small amount of bending rigidity.

Keywords : shell, semi-rigid structure, bending rigidity, thinness ratio

シェル, 半剛性構造, 曲げ剛性, 薄さ比

1. はじめに

シェル構造の力学的有利性は膜応力状態がどの程度支配的であるかにかかっているが、実際の応力の分布状態はかなりの攪乱を伴うものであり、その攪乱の程度は支持条件や曲げ剛性などに多く依存している。重層ラチスシェルなどの解析では、空間において規則的な部材要素の構成が多いという性質を用いて、連続体近似によってある力学的特性をもつ連続体シェルとして解析する場合がある。両者とも根本的な差はなく、等価剛性という評価を通じて相互変換できるものである。この場合、シェルは均質連続体シェルとは異なり、リブ付きシェルのように伸び剛性と曲げ剛性の関係が独立的になる場合があるので、両者の関係が構造物に与える影響を検討することは構造物の力学的性質の把握に重要な意味を持つ。

実際半剛性 (Semi-Rigid) 吊り屋根構造などでは構成要素の伸び剛性および曲げ剛性が独立に変化しており、ケーブルの代わりに曲げ剛性を有する材を部分的あるいは全面的に与えることによって、構造物の荷重に対する抵抗を高める方法も取られる。本報告は軸対称回転シェルおよび半剛性吊り屋根構造を解析モデルとして取

り上げ、伸び剛性と曲げ剛性の関係にあるパラメーターで表現するものとし、その変化に伴う構造物の性状の変化状態を中心に検討するものである。

これらの解析結果は連続体理論に基づいており、軸対称回転シェルの場合は、曲線要素を用いた FEM 解析 (2章)、半剛性吊り屋根構造の場合 (3章) は 2 方向屋根についての直交座標系による基礎微分方程式からの結果である。

2. 軸対称回転シェル

2.1 要素の形状

一般的に、FEM 解析に用いられる軸対称シェル要素は子午曲線の形状により直線要素と曲線要素として分けられるが、シェルを円錐体要素の集合体として考えると、二重曲率を有するシェルの場合、直線近似のため解の精度が落ちる。したがって、ここでは Stricklin¹⁾ などによって提案された曲線要素 (Curved Element) を用いて解析を行った。回転軸と経線のなす角度を ϕ とし、 ϕ を次式のように経線の長さ s の 2 次式として近似する (L : 要素の長さ)。

本論文の内容の一部は 1991 年日本建築学会大会 (東北) および IASS Symposium 91 (コペンハーゲン) に発表したものであります。

* 法政大学工学部建築学科 大学院生・工修

Graduate Student, Dept. of Architecture, Faculty of Engineering, Univ. of Hosei, M. Eng.

** 法政大学工学部建築学科 教授・工博

Prof., Dept. of Architecture, Faculty of Engineering, Univ. of Hosei, Dr. Eng.

$$\phi(s) = \phi_1 + \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_1^2 \quad (s_1 = s/L) \dots\dots\dots (1)$$

$$r(s) = r_1 + \int_0^s \sin \phi ds \dots\dots\dots (2)$$

$$\alpha_1 = 6\phi_0 - 4\phi_1 - 2\phi_2, \quad \alpha_2 = -6\phi_0 + 3\phi_1 + 3\phi_2$$

Fig. 1 曲線要素 (Curved Element)

2.2 ひずみ成分および変位式の仮定

Koiter⁵⁾は薄肉シェルの有限変位理論に基づき、シェルの中央面上の面内ひずみおよび曲げひずみを次のように定義している (ω :回転テンソル, ϕ :中央面における法線の回転ベクトル, a, b :計量テンソル)。

$$\gamma_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta} + [a^{\chi\chi}(\lambda_{\chi\alpha} - \omega_{\chi\alpha})(\lambda_{\chi\beta} - \omega_{\chi\beta}) + (\phi_{\alpha}\phi_{\beta})]/2 \dots\dots\dots (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_{\alpha\beta} &= [b_{\alpha}^{\chi}(\lambda_{\chi\beta} - \omega_{\chi\beta}) + b_{\beta}^{\chi}(\lambda_{\chi\alpha} - \omega_{\chi\alpha}) \\ &\quad + \phi_{\alpha\chi} + \phi_{\beta\chi}]/2 + b_{\alpha\beta}\phi_{\chi}\phi^{\chi}/2 \\ &\quad - \phi^{\chi}[\lambda_{\chi\alpha\chi} + \lambda_{\chi\beta\chi} - \lambda_{\alpha\beta\chi}] \\ \lambda_{\alpha\beta} &= (u_{\alpha\chi} + u_{\beta\chi})/2 - \omega b_{\alpha\beta} \\ t/R &\ll t\rho/\gamma \ll \text{Min}[R/t, 1/t\rho] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

上式中, $\gamma_{\alpha\beta}$ が線形化されると $\lambda_{\alpha\beta}$ になり, 曲率変化テンソル $\rho_{\alpha\beta}$ が線形化された場合は, 曲率線座標を用いたときの Sanders⁶⁾の式と一致している。軸対称回転シェルの解析では, 外力(荷重)および変位を回転(θ)方向にフーリエ級数展開することによって, θ に対して変数分離された釣合式が得られる。すなわち, 変位関数を θ に対してつぎのように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u_n &= \sum [A_1 + A_2 s_1 + B_1 s_1(s_1 - 1) \\ &\quad + B_3 s_1^2(s_1 - 1)] \cos n\theta \\ v_n &= \sum [A_3 + A_4 s_1 + B_2 s_1(s_1 - 1) \\ &\quad + B_4 s_1^2(s_1 - 1)] \sin n\theta \\ w_n &= \sum [A_5 + A_6 s_1 + A_7 s_1^2 + A_8 s_1^3] \cos n\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

u, v, w は要素の変位の直交3成分であり, u が経線方向, v が緯線方向, w が法線方向の成分である。また要素の回転角 χ は変位を用いて次のように表される。

$$\chi_n = |dw_n/ds_1 + u_n d\phi/ds_1|/L \dots\dots\dots (6)$$

ここで B_i ($i=1\sim 4$) は未定係数であり, $s_1=0, 1$ においては変位 u, v とは無関係である。したがって, 係数 B_i は要素を組み立てる前に縮約される内部自由度である。またシェルに作用する荷重に対しても変位の場合と同様にフーリエ級数展開を行う。これらの要素の未定係

数ベクトルに関する剛性方程式はつぎのようになる。

$$\begin{bmatrix} [k_{AA}] & [k_{AB}] \\ [k_{BA}] & [k_{BB}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{A\} \\ \{B\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_A\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (7)$$

ここで $\{B\}^T = [B_1 \ B_2 \ B_3 \ B_4]$ の項は全要素を重ね合わせる前に消去(縮約)することができ, 結果的につぎのように表される。

$$[[k_{AA}] - [k_{AB}][k_{BB}]^{-1}[k_{BA}]]\{A\} = \{f_A\} \dots\dots\dots (8)$$

この縮約(condensation)は B_i ($i=1\sim 4$) が節点における変位に影響しないということの結果として自然に行われるものであり, 要素の剛性マトリックスは一般の場合(8×8)に, 軸対称荷重の場合(6×6)に縮まる。(8)式を節点変位ベクトルおよび等価節点力ベクトルで表せば最終的な要素剛性マトリックスが得られる。

2.3 回転体における曲げ剛性の影響

解析において回転シェルは厚さ方向に均質であると見なされ, 曲げ中立軸がシェル厚中央であると考えられる。ここではシェルの伸び剛性と曲げ剛性の関係にあるパラメーターとして表現するものとし, シェルにおける伸び剛性に対して曲げ剛性のみを独立に変化させることによって生じるシェルの力学的挙動の変化について検討する。線材の解析における断面二次半径(回転半径)の概念を連続体シェルに適用させた係数 i_0 を導入して, 伸び剛性と曲げ剛性の関係が, 次のようなパラメーター β (thinness ratio: 薄さ比)として与えられるものとし, 連続体回転直交異方性シェルの概念から解析を行う。

$$\beta_K = \frac{r_0}{(i_0)_K} = \sqrt{\frac{12(t_E)_K r_0^2}{(t_B)_K^3}} \quad (i_0)_K = \sqrt{\frac{(t_B)_K^3}{12(t_E)_K}} \quad (K=1, 2) \dots\dots\dots (9)$$

ここで t_E, t_B はそれぞれ伸びおよび曲げに関する有効シェル厚, r_0 は回転体の底辺部の半径を表しており, 添え字 ($K=1, 2$) は一般に経線方向ならびに緯線方向に変化するものとする。 $\beta=\infty$ の場合は, シェルにおける曲げ剛性が存在しなく, 面内力のみで作用荷重に抵抗する膜応力状態に対応している。均質等方性の連続体シェルの場合は, ポアソン比は1つに定まる量であることに対して, 異方性のときは曲げに関するものと伸びに関するものが異なる場合があるが, この解析ではポアソン比の影響を無視して解析上の簡略化を行う。次からは幾つかの回転シェルを取り上げて, 伸びに関するシェル厚に対して $t_{E1} = t_{E2} = t_E$ とし, 主にパラメーター β がシェルの変形並びに応力の分布に及ぼす影響について述べる。なお, この章では解析に用いるシェルの諸寸法に対して無次元化を行っており, 変位成分および応力の単位はそれぞれ $[: m]$, $[: t/m]$ に対応している。

(1) 円筒および鼓形, 樽形シェル

子午曲線(平面曲線)が円弧であり, その形状がパラメーター τ で表される等方性殻 ($\beta_1 = \beta_2 = \beta$) に対する結果について検討する。

$$\tau = r_0/R \quad (\tau < 1) \quad \cdots \cdots (10)$$

r_0 : 底辺部の半径 R : 経線方向の曲率半径

下端部固定支持の $\tau=0$ (円筒形) の形状を持つ回転曲面が $p_n = p \cos n\theta$ のような荷重分布を受ける場合、パラメーター β の変化による応力および変位の分布状態を調べる。harmonic num. $n=0$ のような一様内圧を受ける場合は、解析範囲内で、 β の変化による影響が境界付近のごく狭い領域に限定されるため、 $n=1, 2$ の荷重分布に対する法線方向の変位 w と周方向の応力 N_z の分布状態を Fig. 2 に示す。変位の分布を見ると、 $n=1$ の場合は β の影響が境界近傍に限定されるのに対して、 $n=2$ の場合の β の影響範囲は境界から離れてより広い領域になり、パラメーター β の値が小さくなるにつれて変位も相当に減少している。周方向応力 N_z の分布においても同じ傾向が現れており、特に β がある値以下になると ($n=2$)、応力の減少状態が一段と大きくなる。また作用荷重の分布状態にもかかわらず、 β の減少とともに境界付近の引張応力が圧縮応力に変化している。このような変化パターンは経線方向に曲率を有する回転曲面が自重的作用を受ける場合、より明確になる。 $\tau=0.6$ (樽形: Barrel Type) の場合の解析結果

Fig. 2 変位および応力の分布図 (円筒形; $\tau=0$)

を Fig. 3 に示す。このような場合、薄さ比 β の影響は (解析範囲内)、経線方向よりは法線方向に大きく現れる。結果から分かるようにパラメーター β の影響は TOP 部ではほとんど生じないのに対して境界近傍では β の変化により、変位および応力は非常に異なる分布を示している。すなわち、曲げ抵抗がなく面内力のみで作用荷重に抵抗する $\beta=\infty$ の場合の分布に比べて、 β の値が減少するに従って、変位および応力 (w, N_z) の減少状態は境界部付近でより大きくなっている。

このような変化パターンは回転体の経線方向の曲率が負である場合 (鼓形: Waisted Type) でも見られる。 $\tau=-0.6$ の場合の解析結果 (Fig. 4) を見ると分かるように、薄さ比に相当するパラメーター β の影響は依然として TOP 部よりは境界部に大きく現れており、その変化性状も $\tau=0.6$ の場合とほぼ同じ傾向を示している。このような性状はいろんな諸要素 (支持条件、作用荷重状態などを含む) により、異なる傾向を示す場合もある。 $\tau=\pm 0.6$ の解析モデルに対して薄さ比 β の変化による最大変位の変化状態を Fig. 5 に示す。固定支持

Fig. 3 変位および応力の分布図 (樽形; $\tau=0.6$)

Fig. 4 変位および応力の分布図 (鼓形; $\tau=-0.6$)

Fig. 5 β の変化による最大変位の変化図

の場合における β による最大変位の変化状態と比べて、ローラー支持の場合の β による最大変位の変化範囲は非常に大きく、このような場合シェルにある程度の曲げ剛性を持たせる方が、シェルにおける変形の低減により効果的であるといえる。

(2) 長円回転面 (Rotational Ellipsoid)

ここからは解析モデルとして、自重の作用を受ける境界固定支持の長円回転面を取り上げて、パラメーター β の変化による変形および応力の分布状態を調べる。

$$e = (r_0^2 - H^2)^{1/2} / r_0 : \text{離心率} \quad (11)$$

$e = 0.87$ の場合における法線方向の変位および周方向の応力分布が Fig. 6 に示されている。変化パターンとしては前節とほぼ同じである。すなわち、パラメーター β の値が小さくなるにつれてシェルにおける引張応力および変位は境界部より次第に減少する傾向を示している。 $\beta = 20$ の場合になると、シェルの殆どの領域にわたって圧縮力のみになっている。 $e = 0.5, 0.7, 0.8$ のような形状を有する長円回転面が自重の作用を受ける場合に対

Fig. 6 変位および応力の分布図 (長円回転面)

して、 β の変化による法線方向変位の変化状態を Fig. 7 に示す。この結果は薄さ比の変化によるシェルの力学的性状の変化が大きいと思われるある特定点 ($\phi = 8^\circ$) におけるものであるが、薄さ比の減少に伴う変位の減少状態が非常に大きいことが分かる。

(3) $\beta_1 \neq \beta_2$ の場合

今までの解析は、与えられた曲げ剛性が等しい均質等方性 ($\beta_1 = \beta_2 = \beta$) シェルの場合の結果である。 $\beta_1 \neq \beta_2$ のように両方向 (s, θ) のパラメーターが独立に変化する場合については回転直交異方性シェルとして解析される。このような場合の応力解析では、構成パラメーター β の独立の変化による構造性能の優劣を比較検討するのが重要な内容になる。結果 (Fig. 8) から分かるように、自重の作用を受ける長円回転面の場合については、 β_2 (θ 方向) より β_1 (s 方向) の変化がシェルの力学的挙動に及ぼす影響が大きく、 θ 方向の曲げ剛性の変化による効果は解析範囲内で、ほとんど見られないことが分かり、 s 方向のみ大きい曲げ剛性をシェルに持たせることが、このような荷重条件では効率的であるといえる。しかし荷重の分布状態によっては β_2 の影響も大きく現れる場合がある (Fig. 9~10)。特に $p_n = p \cos 2\theta$ ($n=2$)

Fig. 7 シェルの形状と薄さ比の関係

Fig. 8 変位および応力の分布図 (長円回転面; $\beta_1 \neq \beta_2$)

Fig. 9 変位および応力の分布図 (長円回転面; $\beta_1 \neq \beta_2$)

のような荷重分布を受ける円筒形シェルの場合 (Fig. 10) では、 β_1 よりも β_2 の影響が大きく現れており、シェルに作用する荷重の分布状態によってシェルの力学的挙動は大きく変化することが分かる。

(4) 非線形解析

座屈荷重の解析や大たわみを伴う変形解析には非線形解析が必要となってくるが、その非線形殻理論は線形殻理論に比べて非常に複雑になり、その解析的处理も一段と難しくなる。パラメーター β の値が大きくなるにつれて (曲げ剛性が小さくなる)、非線形解と線形解との差が大きく現れることが予想される。ここでは Koiter⁵⁾ の有限変位理論 (Small Finite Deflection) に基づき、前述の解析モデルに対して非線形解析の結果について検討するが、(4) 式の曲げひずみ項に関しては線形化された Sanders⁶⁾ の式を用いて解析を行った。4 次以上の微小項を無視した非線形ひずみによるひずみエネルギーを U_{NL} として表すと、要素の力の釣合式は全体座標系に

おいて次のように表される。

$$\{Q^*\}_E = [K^*]_E \{\delta^*\}_E + \partial U_{NL} / \partial \{\delta^*\}_E \quad (12)$$

ただし $\{\delta^*\}$ は全体座標系における変位ベクトル、 $\{Q^*\}$ は外力ベクトル、 $[K^*]$ は剛性マトリックスを表している。(5) 式の係数 $\{A_i\}$ ($i=1 \sim 8$) を要素の変位成分 $\{\delta_i^*\}_E$ ($i=1 \sim 8$) で次のように表すことができる。

$$\{A_i\} = [TA] \{\delta_i^*\}_E \quad (13)$$

ここでマトリックス $[TA]$ は要素の節点位置 $s_i=0, 1$ で評価されるため (5) 式の未定係数 $\{B_i\}$ ($i=1 \sim 4$) は自動的に排除される。(13) 式から $\partial A_j / \partial \delta_i^* = TA_{ji}$ ($i, j=1 \sim 8$) の関係で表されるから (12) 式の要素のひずみの非線形項による力を次式のように表し、計算を比較的簡略化した。

$$\partial U_{NL} / \partial \{\delta^*\}_E = [TA]^T \partial U_{NL} / \partial \{A\}_E \quad (14)$$

この非線形問題に対する数値解法としては、Newton-Raphson 法が採用されており、要素の数値積分においては Newton-Cotes の 10 点公式が用いられた。Fig. 11 はある断面を有する長円回転面 ($e=0.9$) に対して、薄さ比の変化による荷重-変位曲線が示されているが、 β の値が大きくなるにつれて線形解と非線形解との差が大きくなることが分かる。今回の解析は曲げに関する有効厚さを独立に変化させる場合のものであり、非線形解析における荷重パラメーターを伸びに関する肉厚 t_E との関係で、 $\{Et_E/pr_0\}$ として表現するものとする。自重の作用を受ける長円回転面の場合 (荷重パラメーター $Et_E/pr_0=7500$: Fig. 11 の縦軸上の「a」荷重レベル) におけるシェル境界近傍の応力の分布 (Fig. 12) を見ると、薄さ比 $\beta=1500$ のときは線形解と非線形解との差がほとんどないのに対して、 $\beta=3000$ の場合はその解の差がより顕著に現れており、与えられた曲げ剛性に関するファクターの変化に大きく影響されることが分かる。このような傾向は、自重の作用を受ける鼓形 (Wa-

Fig. 10 変位および応力の分布図 (円筒形; $\beta_1 \neq \beta_2$)

Fig. 11 荷重-変位曲線

Fig. 12 合応力の分布図

Fig. 13 変位および応力の分布図

isted Type: $\tau = -0.6$) の回転曲面でも見られており (Fig. 13), 薄さ比 β の値が減少するに従って, 線形解と非線形解との差が大きくなっていることが分かる。

3. 半剛性構造 (Semi-Rigid Structure)

Tension Structure (張力構造) は外力の作用のもとで生じる力が引張力のみであり, 曲げモーメントおよび圧縮力は伝達せず, 座屈現象などは起こらない構造を意味する。引張力のみで作用荷重に抵抗するという有効性もあるが, その引張力が境界構造に達すると, そこで非常に大きい水平成分 (水平張力) を処理しなければならない。また逆対称成分を含むような部分荷重などによる変形を不当に大きくしないため, 初期荷重およびプレストレスを増加して追加荷重の影響を減少させる方法もあるが, それは引張材以下境界構造に至る部材の断面の増加を要求するので不経済になりやすく, 決して望ましいことではない。このため部分的あるいは全面的に引張材に曲げ剛性を与えて構造物の曲率変化に対する抵抗を高める方法が取られる。純粋な引張状態での張力構造の曲面の形状は張力の分布と境界の形状によって決定されるが, このように材に曲げ剛性を与えると, より自由な形態の構造形式の確保も可能であり, 屋根面の剛性の確保だけでなく造形的, 経済的であるという面から広い範囲で応用できる新しい構造形式のひとつである。このような目的を満たすため, 吊り屋根曲面にわずかな曲げ剛性を与えたものを, ここでは半剛性吊り屋根と呼ぶことにする。

3.1 解析概要

このような吊り屋根構造の解析法としては大別して“連続系解析”と“離散系解析”の2通りのアプローチが考えられる。前者については F. K. Schleyer^{[2], [3]} が2方向ケーブル屋根についての直交座標系による解析を与えており, 後者については Siev & Eidelman^[5] による解析法などがあるが, 本質的な差はなく等価剛性の評価を通じて相互変換できるのである。ここでは連続体概念に基づいて屋根面を構成材と等価断面をもつ薄膜面に置換し, 連続面として扱う。ここで, Fig. 15 のような吊り屋根構造の最も代表的な任意の長方形平面を有する鞍形の双曲放物面 (HP 曲面) を解析モデルとして取り上げて, 曲げ剛性の変化による変形および張力の変化状態の結果について検討する。変形前において, 屋根面はプレストレスおよび初期荷重 (p_0) のみを受けて初期形状を示すものとする。その屋根面の初期状態を z とすると座標軸と一致する平面曲線から形成される吊り屋根構造における釣合方程式は, 載荷後次のような式で表される ($' = \partial/\partial X$, $'' = \partial/\partial Y$)。

$$\left. \begin{aligned} h'_x + q_x &= 0, & h'_y + q_y &= 0 \\ h_x z'' + H_{x0} w'' + h_y z'' + H_{y0} w'' + m''_x & \\ & + m''_y + p_0 - q_x z' - q_y z'' &= 0 \end{aligned} \right\} \cdots (15)$$

ここで, H_{x0} , H_{y0} はそれぞれの方向における単位長さ当たりの初期張力, m_x , m_y は要素の曲げモーメントの変化を表している。また吊りおよび押え方向の張力変化の

水平成分 h_x, h_y は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} h_x &= B_x(u' + z'w') = C_1(Y) - \int_0^x q_x dX \\ h_y &= B_y(v' + z'w') = C_2(X) - \int_0^y q_y dY \\ B_x &= EA_x / [1 + (z')^2]^{3/2} \\ B_y &= EA_y / [1 + (z')^2]^{3/2} \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

(16) 式についてケーブルの全長にわたって積分を行うと、 $C_1(Y)$ は結局次のように求められる。

$$C_1(Y) = t_x \left\{ \int \left[B_x^{-1} \int_0^x q_x dX \right] dX + [z'_E w_E - z'_S w_S] + [u_E - u_S] - \int z'' w dX \right\} \dots (17)$$

ただし、(17) 式の添字 E, S はそれぞれ境界 ($X = \pm L_x/2$) の値を意味する。 Y 方向についても同じように積分して $C_2(X)$ を求め、(15) 式の Z 方向の釣合式に代入して境界での変位成分が零であると仮定すると、結局つぎのような式になる ($1/t_x = \int dX/B_x, 1/t_y = \int dY/B_y$)。

$$\begin{aligned} z'' t_x \int z'' w dX + z'' t_y \int z'' w dY - H_{x0} w'' \\ - H_{y0} w'' + D_x(w'') + D_y(w'') = p(X, Y) \end{aligned} \dots (18)$$

ただし D_x, D_y はそれぞれ吊りおよび押えケーブルの曲げ剛性を表しており、 $q_x = q_y = 0$ の場合は荷重項 $p(X, Y) = p$ として簡略化される。一方、初期張力 H_{y0} , H_{x0} の間には曲面の初期状態においてつぎのような関係が成立する。

$$H_{x0} \rho_x = H_{y0} \rho_y, \quad H_{x0} f_x L_y = H_{y0} f_y L_x \dots (19)$$

Fig. 14 半剛性構造

Fig. 15 解析モデル (HP 曲面)

また、ケーブルネットのサグおよびライズは次のように表される。

$$\tau_x = \rho_x L_x^2 / 8, \quad \tau_y = \rho_y L_y^2 / 8 \dots (20)$$

ただし f_x, f_y はそれぞれ屋根面のサグおよびライズ比を表しており、 ρ_x, ρ_y は屋根面の頂点における曲率の絶対値を示している。また屋根面に作用するプレストレスおよび2方向の諸寸法 (スパンおよび断面積など) を無次元化された比として表し、前章と同様に材の伸び剛性と曲げ剛性の関係を薄さ比 (thinness ratio) で表現する。

$$\varepsilon = H_{x0} / EA_x \quad (\text{初期ひずみ}) \dots (21)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_x &= L_x / i_x = \sqrt{EA_x L_x^3 / D_x} \\ \beta_y &= L_y / i_y = \sqrt{EA_y L_y^3 / D_y} \end{aligned} \right\} \dots (22)$$

上記の関係を (18) 式に代入して差分形式で表すものとし、薄さ比の変化に伴う構造物の静的挙動について調べる。

3.2 解析結果

一般的に吊り屋根構造は作用荷重パターン、サグおよびライズ比、プレストレスなどによって、その力学的挙動は大きく変化する。以下の結果 (Fig. 16~18) は初期ひずみ $\varepsilon = 1/10^3$ のプレストレスを受ける正方形平面を持つ吊り屋根構造の、パラメーター β ($\beta_x = \beta_y = \beta$) の変化による変形および張力の変化図である。

全面等分布荷重 p の作用を受ける場合 (Fig. 16), この種の荷重状態では伸び変形が支配的であり、屋根面の曲率変化が小さく生じるため、曲げ剛性の変化による鉛直変位および張力変化の水平成分 h_x の変化はそれほど大きくないが、変形モードから分かるように、 $\beta = \infty$ (曲げ剛性 0) の場合は、同様の荷重分布に対して生じるアー

Fig. 16 全面荷重 (Full Loading)

Fig. 17 β の変化による鉛直変位および張力変化の水平成分の分布図 (Half Loading)

Fig. 19 β の変化による鉛直変位および曲げモーメントの分布図 (Quarter Loading)

Fig. 18 1/4 面荷重 (Quarter Loading)

Fig. 20 β の変化による鉛直変位の変化図

チの变形に見られるような分布 (これをアーチ形あるいはその形状を具体的に表す意味で鍋底形と呼ぶ) を示すのに対して、薄さ比 β の値が減少するに従ってその分布曲線は次第に通常の梁の变形に相当する梁形(曲げ形)に変化している。

半面あるいは1/4面荷重分布状態になると (Fig. 17~18) パラメーター β の影響が一段と大きく現れる。特に1/4面荷重のような局部的に偏在している荷重分布の場合、薄さ比 β の減少に伴う变形の変化が更に大きく現れる。このような部分荷重は、それぞれ逆対称荷重ケースの重ね合わせによって得ることができ、逆対称成分を含むような荷重分布に対して、ある程度の曲げ剛性を与えることは、变形および付加張力の低減に非常に効

果的であることが分かる。また部分荷重などによって生じる大きい変形は、プレストレスを増加させることによって抑えることも可能であるが、非常に不経済になりやすく、不都合となる場合が多い。前述のごとく吊り屋根構造はプレストレスの変化によってその力学的挙動は非常に異なる性状を示す。初期ひずみ $\epsilon=1/10^4$ の場合になると、1方向のみ曲げ剛性を与えても ($\beta_v=\infty$) 変位および張力の追加分の低減に非常に効果的であり、構造物に作用するプレストレスの量が非常に小さい場合、薄さ比 β による構造物の力学的性状もより大きく変化することが分かる (Fig. 19)。

半面および 1/4 面荷重分布におけるプレストレスとサグおよびライズ比 f の変化に伴う特定点の変位の変化状態が Fig. 20 に示されている。前述のごとくこのような局所的な荷重分布ケースになると、薄さ比 β の影響が大きく現れており、プレストレスおよび形状の変化により、その変化状態が非常に異なっていることが分かる。結果として、サグおよびライズ比とプレストレスが小さくなるにつれて、 β による変位の変化状態が一段と著しくなっており、このような場合に構成材にある程度の曲げ剛性を与えることがより効果的であることがいえる。

吊り屋根構造においては変形や張力の処理問題が設計上重要なポイントとなるが、このように半剛性の概念を導入すると、屋根面の剛性確保という面だけでなく、引張構造の有効性を保ちながら、非対称変形に不利な吊り屋根構造の欠点を補うことができる。また屋根面の水平力あるいはそれから生じる大きな曲げモーメントの処理に必要な境界構造の断面も最小限に押さえることも可能である。

4. 結 論

以上軸対称回転体シェルおよび半剛性吊り屋根構造を取り上げ、主として薄さ比の変化による構造物の力学的性状の変化状態に関する検討を行った。構造形式にかかわらず、外力の作用の元で生じる存在応力が軸方向力のみであることは非常に合理的であり、設計上理想的な目標を与えるものであるが、実際には不可能な場合が多く、曲げ状態を伴うのが一般的である。このような曲げ状態は構成要素の曲げ剛性に大きく依存しており、構成要素に曲げ剛性を与えることは作用外力に対する抵抗能力の向上、変形および応力の低減、張力構造における形態上の有利性などを含む構造特性の改善に効果的であると推察される。

参考文献

- 1) Stricklin, J. A., et al. : Nonlinear Analysis of Shells of Revolution by the Matrix Displacement Method, AIAA J., Vol. 6, No. 12, pp. 2306~2312, 1968.
- 2) Cantin, G. : Rigid Body Motions in Curved Finite Elements, AIAA J., Vol. 8, No. 7, pp. 1252~1255, 1970.
- 3) Mebane, P. M. & Stricklin, J. A. : Implicit Rigid Body Motion in Curved Finite Elements, AIAA J., Vol. 9, No. 2, pp. 344~345, 1971.
- 4) Ashwell, D. G. & Gallagher, R. H. : Finite Elements for Thin Shells and Curved Members, John Wiley & Sons, Ltd., 1976.
- 5) Koiter, W. T. : On the Nonlinear Theory of Thin Elastic Shells, Proc. Kon. Ned. Ak. Wet., Amsterdam, B 69, 1966.
- 6) Sanders, J. L. : Nonlinear Theories for Thin Shells, Quart. Appl. Math., Vol. 21, No. 1, pp. 21~36, 1963.
- 7) Frei Otto : Tensile Structure Vol. 2, MIT Press, 1969.
- 8) Murray, K. H. : Comments on the Convergence of Finite Element Solutions, AIAA J., Vol. 8, No. 4, pp. 815~816, 1971.
- 9) Møllmann, H. : A Study in the Theory of Suspension Structures, Akademisk Forlog, Denmark, 1965.
- 10) Tsuboi, Y. & Kawaguchi, M. : Design Problems of a Suspension Roof Structure, Rep. Inst. Ind. Sci. Univ. Tokyo, Vol. 15, No. 2, 1965.
- 11) Kawaguchi, M. & Chin, Y. : On Nonlinearity of Prestressed Suspension Roofs, Rep. of Tech. College of Hosei Univ., No. 17, Tokyo, 1968.
- 12) Schleyer, F.-K. : Die Berechnung von Seilwerken, Hanging Roofs, Proc. IASS Colloquium, Paris, pp. 56~61, 1962.
- 13) Schleyer, F.-K. : Die Berechnung von Seilnetzen, Hanging Roofs, Proc. IASS Colloquium, Paris, pp. 48~55, 1962.
- 14) Kawaguchi, M. & Abe, M. : Study and Realization of a Hybrid Hanging Roof, Spatial Roof Strs., Proc. IASS Symposium, Dortmund, pp. 194~211, 1984.
- 15) Siev, A., et al. : Shapes of Suspended Roofs Hanging Roofs, Proc. IASS Colloquium, Paris, pp. 42~47, 1962.
- 16) Flügge, W. : Stresses in Shells, Springer-Verlag, 1973.
- 17) Zienkiewicz, O. C. : The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, 1971.

(1991年6月10日原稿受理, 1992年1月29日採用決定)