繰返し水平載荷を受ける多層多スパン平面骨組の塑性崩壊挙動

その1: 多層多スパン平面骨組の対称限界理論

PLASTIC COLLAPSE BEHAVIOR OF MULTISTORY MULTIBAY PLANAR
FRAMES SUBJECTED TO REPEATED HORIZONTAL LOADING

Part I : Symmetry limit theory for multistory multibay planar frames

上谷 宏二*

Koji UETANI

This paper deals with the symmetry limit and collapse behavior of multistory multibay planar frames subjected to repeated horizontal forced displacement. In the present article, Part I, the symmetry limit theory, which has originally been developed for beam-column members by the present author et al., is extended to the problems of elastic-perfectly plastic planar frames and the theoretical prediction of symmetry limits is made for some fishbone-shaped prototype frames by means of the extended theory. In Part II, the numerical response analysis will be performed to verify the symmetry limit theory for frames and clarify the collapse behavior under repeated loading beyond the symmetry limits.

Keywords : planar frames, repeated loading, symmetry limit, unstable phenomena,
plastic deformation, collapse behavior

平面骨組, 繰返し載荷, 対称限界, 不安定現象, 塑性変形, 崩壊挙動

1. 序 文

骨組の臨界現象および安定限界を明らかにすることは、建築構造物の設計の基礎となる重要な研究課題である。全体骨組の臨界現象や不安定現象は、いずれも $P-\Delta$ 効果と呼ばれる幾何学的非線形効果や塑性変形、またはその両者の複合作用によって引き起こされる。静的単調載荷の下でのこれらの現象については、すでに多数の理論的研究がなされ、実験結果との対応も示されている¹⁾。これらの研究は、主として鉛直荷重の比例載荷による分岐点座屈に関するもの^{2), 3)}と、鉛直荷重の作用している骨組に一方向水平力が加わるときの力-変形関係や安定限界を取り扱ったもの^{4), 5)}の2種類に大別される。一方、繰返し載荷を受ける骨組については、履歴挙動性状を明らかにすることを目的として、鋼構造骨組実験^{6), 7)}や、数値挙動解析^{8), 10)}、単調載荷時挙動との対応関係に関する研究^{11), 12)}などが行われている。しかし、骨組の繰返し載荷時挙動を臨界現象論または安定論の立場から取り扱った研究論文は、著者の知る限りこれまで発表されていない。

このような状況の下で、著者らは、振幅が連続的に増

加する COIDA と名付けた完全両振り曲げを受ける梁-柱 (beam-column) について、2種類の新しい臨界点を定義し、これらを予測するための理論を設立した。これらの臨界点は対称限界 (symmetry limit) および定常状態限界 (steady state limit) と名付けられ、対応する予測理論を対称限界理論^{13)~17)}および定常状態限界理論^{18), 19)}として発表した。これらの限界は、座屈現象と同じように、1個の柱部材ばかりでなく、繰返し塑性変形を受ける多くの種類の構造物において現れると考えられる。対称限界理論によれば、多層平面骨組においても COIDA 型の完全両振り繰返し水平変位の下で対称限界が存在し、限界を超える載荷条件の下では特定の逆対称たわみモードが現れ、載荷が繰り返されるごとに成長することが予想される。また、対称限界後の履歴挙動を解析した幾つかの例^{20), 21)}から、多層平面骨組の限界後の繰返し載荷時挙動についても、一方向載荷時の挙動からは予想できないような激しい劣化特性を示す可能性もあると考えられる。山田らは、10層3スパン鋼構造平面骨組模型の一定鉛直荷重下の漸増振幅完全両振り水平変位載荷実験を行い、水平力を加えた第7層床レベル以下の

* 京都大学工学部建築学科 助教授・工博

Dept. of Architecture, Faculty of Engineering, Kyoto Univ.,
Dr. Eng.

各層の柱端部に塑性変形が生じて、1 から 6 層までの部分が全体として弓形に湾曲してはらみ出す変形モードが発生する現象を見いだしている²²⁾。

建築構造骨組の設計では、各層の梁端に塑性ヒンジが生じる崩壊機構が形成されるように、すなわち梁降伏型の設計を行えば、骨組は繰返し水平力の作用に対しても安定した履歴復元力特性を示し、良好な耐震性能が期待できると一般に信じられている。ところが、対称限界理論によれば、柱降伏型骨組はもちろんのこと、梁降伏型骨組であっても対称限界が存在し、載荷条件が対称限界を超えた場合、柱が複数層にまたがって弓形にはらみ出す逆対称変形モードが繰返し載荷の度に一方向に累積される現象が発生すると予測される。

この論文の目的は、多層多スパン平面骨組について、対称限界の存在を検証するとともに、静的繰返し載荷の下での崩壊挙動の特性を解明することである。論文は 2 部構成である。その 1 では、多層多スパン骨組の下層部から数層を取り出した魚骨形部分骨組に対して対称限界理論を適用し、対称限界および逆対称変形モードの理論予測解を求める。その 2 では、その 1 の解析モデルと同じ部分骨組について、繰返し水平変位に対する履歴挙動解析を行い、対称限界理論解の検証を行うとともに、崩壊に至るまでの挙動の特性を詳細に解明する。

2. 解析モデルと基礎式

Fig. 1(a) に示すように水平方向に無限均等な部材配置をもつ多層多スパン骨組を考え、その下層部から s 層を取り出した Fig. 1(b) に示す s 層魚骨形部分骨組に対して対称限界理論解析を行う。魚骨形骨組の頂点に、一定鉛直荷重 p を作用させ、片側振幅 Ψ が 0 から連続的に単調増加する完全両振り水平変位 COIDA を加える。どの梁にも中間荷重は作用しないとしているから、

Fig. 1 Analytical model; (a) multistorey multibay planar frame, (b) fishbone-shaped unit frame with s stories.

部分骨組の各層について柱と梁の材軸線交点および梁の両端点は常に同一水平線上にあり、したがってこれらの点の鉛直変位は等しい。第 1 層柱脚に原点をとり、鉛直上向きに x 座標軸を、水平右向きに y 座標軸を置く。頂点鉛直荷重だけを作用させた状態において、第 j 層柱頭は $x=r_j$ の位置にあり、骨組の高さは H である。梁の長さ、すなわち多層多スパン骨組のスパン長の半分は l である。骨組はヤング係数 E の完全弾塑性材料で構成され、第 j 層の柱の弾性曲げ剛性は EL_{cj} 、全塑性モーメントは M_{cj}^p であり、第 j 層梁の弾性曲げ剛性は EL_{lj} 、全塑性モーメントは M_{lj}^p である。

対称限界理論では、定常状態とその変化率だけに着目し、定常状態から次の定常状態に達するまでの履歴挙動を追跡することなく対称限界を予測する。したがって、問題の定式化を、定常状態の状態量だけを用いて行う。さらに、1 個の定常状態はその中の 1 対の反転時状態量だけを用いて記述される²³⁾。

水平変位振幅 Ψ の下で、骨組が、正側反転時 Γ^I の変形状態と負側反転時 Γ^{II} の変形状態が柱の初期材軸線に関して対称をなす対称定常状態を呈し、 Γ^I および Γ^{II} では、Fig. 2 に示すように全層の柱両側の梁端と、第 1 層柱脚に塑性ヒンジが形成されている場合について考える。柱は、第 1 層柱脚部を除いて全域が弾性域にある。定常状態において、各塑性ヒンジは毎サイクル一定の Fig. 3 に示されるような交番塑性の曲げモーメント一回転角関係曲線を描く。塑性ヒンジの回転剛性は、塑性変形進行方向には 0、後退方向には無限大である。

反転時釣合状態 Γ^I において、柱は次の幾何学的境界条件と仮想仕事式を満たす。なお、 u, v は柱軸上の点

Fig. 2 A deformed configuration with plastic hinges at reversal point Γ^I .

注 1) どのような定常状態でも 1 対の反転時状態量だけで記述できるわけではないが、COIDA プログラムの下で定常状態限界に至るまでに生成されるすべての定常状態は、反転時状態量だけを用いて記述できることが文献 14) と同様の方法によって証明できる。

Fig. 3 Relationship between bending moment and angle of rotation of plastic hinge.

の x, y 軸方向変位を, σ, ϵ は柱内部の軸方向垂直応力, 垂直ひずみをそれぞれ表す。 $()^I, ()^{II}$ は Γ^I, Γ^{II} の状態量を表し, $\delta ()$ は変分量を表す。

幾何学的境界条件式:

$$u^I(0)=v^I(0)=0, \quad v^I(H)=\Psi \quad (1)$$

仮想仕事式:

$$\int_0^H \int_A \sigma^I \delta \epsilon^I dA dx + \sum_{j=1}^s [2 M_{gj}^P \delta v_{,x}(r_j)] + M_{cl}^P \delta v_{,x}(0) + p \delta u(H) = 0 \quad (2)$$

ここに,

$$\delta \epsilon^I = \delta u_{,x} + v_{,x}^I \delta v_{,x} - y \delta v_{,xx} \quad (3)$$

$$\delta u^I(0) = \delta v^I(0) = \delta v^I(H) = 0 \quad (4)$$

部分積分を用いて式 (2) を変形し, 以下の方程式を得る。

$$(r_{j-1} < x < r_j, \quad j=1, 2, \dots, s+1; \quad r_0=0, \quad r_{s+1}=H)$$

$$EI_{Cj} v_{,xxxx} + p v_{,xx} = 0, \quad (5)$$

$$(x=0) \quad v^I(0)=0, \quad EI_{C1} v_{,xx}(0)=M_{cl}^P, \quad (6a, b)$$

$$(x=r_j, \quad j=1, 2, \dots, s)$$

$$v^I(r_j-0)=v^I(r_j+0), \quad v_{,x}^I(r_j-0)=v_{,x}^I(r_j+0),$$

$$EI_{C(j+1)} v_{,xx}(r_j+0) - EI_{Cj} v_{,xx}(r_j-0) = 2 M_{gj}^P,$$

$$EI_{C(j+1)} v_{,xxx}(r_j+0) - EI_{Cj} v_{,xxx}(r_j-0) = 0,$$

$$(7a-d)$$

$$(x=H) \quad v^I(H)=\Psi, \quad EI_{C(s+1)} v_{,xx}(H-0)=0,$$

$$(8a, b)$$

Γ^{II} の方程式は, 式 (5)~(8) から, 式 (5)~(8) の中の v^I を v^{II} で置き換え, 式 (8a) の Ψ を $-\Psi$ で, 式 (6b) の M_{cl}^P を $-M_{cl}^P$ で, 式 (7c) の M_{gj}^P を $-M_{gj}^P$ で各々置き換えて得られる。

反転時状態の塑性ヒンジ分布が Fig. 2 に示される以外のパターンである定常状態についても, 同様の方針に従って基礎式をたてることができる。

3. 対称限界解析の基本的考え方

Fig. 1(b) に示された s 層魚骨形部分骨組に, 一定鉛直荷重の下で振幅が連続的に増加する完全両振り頂点水平変位プログラム COIDA が作用するとき, 骨組は頂点水平変位振幅 Ψ の増加に連れて次のような挙動を呈すると考えられる。 Ψ がある程度まで小さい領域では,

骨組が, 正側反転時 Γ^I の変形状態と負側反転時 Γ^{II} の変形状態が柱の初期材軸線に関して対称をなす対称定常状態を呈し, その対称定常状態は Ψ の増加に連れて連続的に変化する。しかし, 一定鉛直荷重がある程度大きい場合, Ψ がある限界値に達すると, Γ^I と Γ^{II} の変形状態の間の対称性が失われ, 定常状態が対称から非対称に移行するか, または柱の初期材軸線に関して逆対称な変形成分が繰返し载荷によって発散していくと予想される。このように対称定常状態が保持されなくなる最初の臨界点を対称限界と呼ぶ。対称限界理論では, 以下のような方針に従って対称限界の理論予測解を導く。

(a) 任意の頂点水平変位振幅に対する対称定常状態解を導く。

(b) 対称限界は, 対称定常状態から非対称定常状態への移行が初めて生じるか, 逆対称変形成分の発散が初めて生じるという条件によって特徴づけられる。ただし, 発散が起きる後者の対称限界は, 同時に定常状態限界でもある。この特性条件を定式化して対称限界条件式を導く。

(c) 対称定常状態解の中から, 対称限界条件式を最も小さい頂点水平変位振幅値で満足する解を見つける。これが対称限界予測解である。

4. 対称定常状態解

式 (5)~(8) で与えられる境界値問題を解くことによって, Γ^I の解 $v^I=f(x; \Psi)$ が得られる。また, $v^{II}=-f(x, \Psi)$ と置けば, 式 (5)~(8) に対応する Γ^{II} のすべての方程式は明らかに満足される。これらの解が表す左右の反転時たわみ形状は柱の初期材軸線に関して対称であるから, 次式は対称定常状態解である。

$$v^I = -v^{II} = f(x; \Psi) \quad (9)$$

ここで, 一例として Fig. 4 に示されるように高さ方向にも均等な骨組について考える。第 1 層柱脚はピン支持されている。すべての層の梁は同一で, その弾性曲げ

Fig. 4 Prototype uniform fishbone-shaped frame with hinged base.

Fig. 5 Three types of deformed configuration at Γ^1 of a single cruciform unit frame; (a) in elastic range, (b) with plastic hinges at beam ends, (c) with plastic hinges at column ends

剛性は EL_g , 全塑性モーメントは M_g^p である。柱は、全層にわたって同一の弾性曲げ剛性 EL_c と軸力 0 のときの全塑性モーメント $\bar{M}_c^p$ を有する理想化サンドウィッチ断面を持ち、柱長さは、最上層および最下層が h , 他のすべての層は $2h$ である。この均等骨組の定常状態に対する支配式は、Fig. 1(b) に示した一般モデルの支配式 (5)~(8) に次式の関係を入ることによって得られる。

$$\begin{aligned} r_{s+1} &= H, \quad M_{c1}^p = 0, \\ r_j &= (2j-1)h, \quad h = H/(2s), \\ M_{gj}^p &= M_g^p, \quad (j=1, 2, \dots, s) \\ EL_{cj} &= EL_c, \quad (j=1, 2, \dots, s+1) \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

各層はすべて同一の応力分布と変形状を持つ。Fig. 5 は、対称定常状態の反転時状態 Γ^1 における均等骨組のたわみ形状を、1 層分だけ取り出して示した図である。対称定常状態は次の 3 通りに分けられる。Fig. 5(a) は弾性域の定常状態を、Fig. 5(b) は梁端に塑性ヒンジが生じる定常状態を、Fig. 5(c) は柱端に塑性ヒンジが生じる定常状態を示している。均等骨組の対称定常状態解は、以下のように示される。骨組の頂点水平変位振幅が $\Psi (=H\psi)$ のときの Fig. 5 に示された単位骨組の柱の反転時たわみ関数 $\bar{v}^1(\xi)$ は、Fig. 5(a)~(c) の場合を通じて次式で表される。なお、対称定常状態の柱の部材回転角振幅を $\psi (= \Psi/H)$, Γ^1 状態における柱断面に作用する水平力を q^1 , 柱の材端たわみ角を ϕ_c^1 とする。

$$\bar{v}^1(\xi) = \frac{1}{\omega} \left(\phi_c^1 + \frac{q^1}{p} \right) \sin \omega \xi - \left(\psi + \frac{q^1}{p} \right) h \cos \omega \xi + h\psi + \frac{q^1}{p} (h - \xi) \dots\dots\dots (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{q^1}{p} &= \frac{\psi - \Omega \phi_c^1}{\Omega - 1}, \quad \omega = \sqrt{\frac{p}{EI_c}}, \quad \Omega = \frac{\tan \omega h}{\omega h}, \\ G &= \frac{3EI_g}{lhp} \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

Fig. 5(a)~(c) に示されている各々の場合について、頂点水平変位振幅 Ψ の領域と、(11), (12) 式中に現れ

Fig. 6 Classification of symmetric steady state solutions on plane of axial force v.s. top deflection amplitude.

る反転時柱端たわみ角 ϕ_c^1 の表現を以下に示す。なお、 p_y は柱の降伏軸力を表す。

a) 弾性領域解 (Fig. 5(a)) :

$$0 \leq p < p_{cg} \text{ のとき, } 0 \leq \Psi < \Psi_{yg}.$$

$$p_{cg} \leq p \leq p_y \text{ のとき, } 0 \leq \Psi < \Psi_{yc} \dots\dots\dots (13)$$

ここに、

$$p_{cg} = \left(1 - \frac{M_g^p}{M_c^p} \right) p_y, \dots\dots\dots (14)$$

$$\Psi_{yg} = \left\{ \frac{1}{G} + \left(1 - \frac{1}{\Omega} \right) \right\} \frac{M_g^p H}{ph}, \dots\dots\dots (15)$$

$$\Psi_{yc} = \left\{ \frac{1}{G} + \left(1 - \frac{1}{\Omega} \right) \right\} \frac{\bar{M}_c^p H}{ph} \left(1 - \frac{p}{p_y} \right) \dots\dots\dots (16)$$

反転時状態 Γ^1 の柱端たわみ角 ϕ_c^1 は、

$$\phi_c^1 = \frac{\Omega}{\Omega + G\Omega - G} \psi \dots\dots\dots (17)$$

b) 梁降伏領域解 (Fig. 5(b)) :

$$0 \leq p < p_{cg}, \quad \Psi_{yg} \leq \Psi \dots\dots\dots (18)$$

$$\phi_c^1 = \psi - \left(1 - \frac{1}{\Omega} \right) \frac{M_g^p}{ph} \dots\dots\dots (19)$$

c) 柱降伏領域解 (Fig. 5(c)) :

$$p_{cg} \leq p \leq p_y, \quad \Psi_{yc} \leq \Psi \cdots \cdots (20)$$

$$\varphi'_c = \psi - \left(1 - \frac{1}{\Omega}\right) \frac{\bar{M}_c^0}{ph} \left(1 - \frac{p}{p_y}\right) \cdots \cdots (21)$$

なお、式 (13), (18), (20) で表される 3 種類の領域を、Fig. 6 の (Ψ, p) 平面上に示した。

5. 対称限界条件式

頂点水平変位振幅 Ψ の対称定常状態において水平変位振幅の微小増分 $d\Psi$ を作用させると、これによって定常状態は微小に変化する。前節に示したように、対称定常状態については振幅 Ψ に対して一価かつ連続な解が存在する。このことは、どの振幅レベルの対称定常状態においても $d\Psi$ だけ大きい振幅レベルの対称定常状態に移行する定常状態変化率解が存在することを意味している。もしこれだけが唯一の解であれば、微小振幅増分 $d\Psi$ に伴う定常状態変化において対称性が維持されることになる。一方、通常の対称限界では非対称定常状態への移行が生じるか、または逆対称成分の発散が生じることになる。 Ψ の変化に伴う対称定常状態の変化が構造物内部の弾、塑性領域間境界の移動まで含めて連続的である場合には、前者のように非対称定常状態への移行が生じる。このときの対称限界は、0 でない逆対称成分を含む定常状態変化率解が初めて存在するようになるという条件^[3]か、または、定常状態変化率解が初めて唯一性を失う条件^[4]によって特徴づけられることになり、対称限界条件式がこれらの条件から等式として導かれる。他方、降伏や除荷が有限領域で同時に生じると仮定する通常の有限要素法や塑性ヒンジによる骨組モデル^[2]では、構造系の剛性が不連続に変化するため定常状態変化率解の唯一性限界点を不連続に飛び越えてしまうので対称限界条件式は不等式で与えられることになる。

対称限界条件式を求めるためには、まず定常状態変化率の支配式を誘導する必要がある。ここではまず、Fig. 2 に示すように反転時に第 1 層柱脚とすべての梁端に塑性ヒンジが形成される対称定常状態について考える。式 (5)～(8) を Ψ で微分することにより、 Γ^I 反転時の柱たわみ変化率 $\dot{v}^I (=dv^I/d\Psi)$ に関する支配方程式が以下のように得られる。

$$(r_{j-1} < x < r_j, \quad j=1, 2, \cdots, s+1; \quad r_0=0, \quad r_{s+1}=H) \\ EI_{Cj} \dot{v}_{,xxxx} + P \dot{v}_{,xx} = 0, \cdots \cdots (22) \\ (x=0) \quad \dot{v}^I(0)=0, \quad EI_{C1} \dot{v}_{,xx}(0)=0, \cdots \cdots (23a, b) \\ (x=r_j, \quad j=1, 2, \cdots, s) \\ \dot{v}^I(r_j-0)=\dot{v}^I(r_j+0), \quad \dot{v}_{,x}^I(r_j-0)=\dot{v}_{,x}^I(r_j+0),$$

$$EI_{C(j+1)} \dot{v}_{,xxx}(r_j+0) - EI_{Cj} \dot{v}_{,xxx}(r_j-0) = 0, \\ EI_{C(j+1)} \dot{v}_{,xxx}(r_j+0) - EI_{Cj} \dot{v}_{,xxx}(r_j-0) = 0, \cdots \cdots (24a-d)$$

$$(x=H) \quad \dot{v}^I(H)=1, \quad \dot{v}_{,xx}^I(H-0)=0 \cdots \cdots (25a, b)$$

Γ^II 反転時の柱たわみ変化率 $\dot{v}^II$ に関する支配方程式も同様に導かれ、それらは式 (22)～(25) 中の v^I を v^II で置き換え、式 (10a) を次式で置き換えて得られることがわかる。

$$\dot{v}^II(H) = -1 \cdots \cdots (26)$$

$\dot{v}^I$ の方程式 (22)～(25) には $\dot{v}^II$ が含まれず、逆も同様である。構造体の内部にシェイクダウン領域をもつ一般の対称限界解析問題では、定常状態変化率の支配方程式において Γ^I と Γ^II の反転時状態量が互いに連成してくるのが一つの特徴である。ところが、ここで扱っている完全塑性材料で構成された骨組モデルでは、Fig. 3 に示される交番塑性ループを描く塑性ヒンジですべての塑性変形が生じるため、 Γ^I と Γ^II の反転時状態量間の連成は現れない。この意味で、本報で扱う対称限界問題は、通常の弾塑性分岐座屈と本質的に異なるところの対称限界理論特有の性質が希薄である単純なケースと言える。また、両反転時状態量が連成しないという性質から、繰返し載荷のとき対称限界後に発生する逆対称たわみモードと類似のモードが、一方向載荷の下でも現れることが容易に説明できる。

反転時の柱たわみ変化率の、対称成分と逆対称成分を次式のように定義する。

$$\text{対称成分} \quad v' = (v^I - v^II)/2, \quad q' = (q^I - q^II)/2 \\ \cdots \cdots (27a, b)$$

$$\text{逆対称成分} \quad v^b = (v^I + v^II)/2, \quad q^b = (q^I + q^II)/2 \\ \cdots \cdots (28a, b)$$

(22)～(25) の各式について、 $\dot{v}^I$ に関する式と、これに対応する $\dot{v}^II$ に関する式の差をとることにより、対称成分 v' に関する支配方程式が次のように導かれる。

$$(r_{j-1} < x < r_j, \quad j=1, 2, \cdots, s+1; \quad r_0=0, \quad r_{s+1}=H) \\ EI_{Cj} \dot{v}'_{,xxxx} + P \dot{v}'_{,xx} = 0, \cdots \cdots (29) \\ (x=0) \quad \dot{v}'(0)=0, \quad EI_{C1} \dot{v}'_{,xx}(0)=0, \cdots \cdots (30a, b) \\ (x=r_j, \quad j=1, 2, \cdots, s) \\ \dot{v}'(r_j-0)=\dot{v}'(r_j+0), \quad \dot{v}'_{,x}(r_j-0)=\dot{v}'_{,x}(r_j+0), \\ EI_{C(j+1)} \dot{v}'_{,xxx}(r_j+0) - EI_{Cj} \dot{v}'_{,xxx}(r_j-0) = 0, \\ EI_{C(j+1)} \dot{v}'_{,xxx}(r_j+0) - EI_{Cj} \dot{v}'_{,xxx}(r_j-0) = 0, \cdots \cdots (31a-d)$$

$$(x=H) \quad \dot{v}'(H)=1, \quad \dot{v}'_{,xx}(H-0)=0 \cdots \cdots (32a, b)$$

(29)～(32) の式で構成される境界値問題を解くことにより、振幅 Ψ の基準対称定常状態から、 $\Psi + d\Psi$ 対称定常状態への定常状態変化率解が得られる。

次に、(22)～(25) の各式について、 $\dot{v}^I$ に関する式とこれに対応する $\dot{v}^II$ に関する式の和をとることにより、逆対称成分 v^b に関する支配方程式が次のように導かれ

注 2) 塑性ヒンジは部材内部のある有限な大きさをもつ領域で生じる塑性変形を幅のない断面に集中させた理想化概念である。故に、塑性ヒンジの発生は連続体モデルの中で、ある有限の広がりをもつ領域が一挙に降伏したことに相当する。

Fig. 7 Modified frame, whose buckling condition is equivalent to symmetry limit condition of original prototype frame (in case that plastic hinges form at beam ends); (a) equivalent frame, (b) anti-symmetric deformation mode.

る。

$$(r_{j-1} < x < r_j, \quad j=1, 2, \dots, s+1; \quad r_0=0, \quad r_{s+1}=H)$$

$$EI_{c,j} \dot{v}_{,xxxx} + P \dot{v}_{,xx} = 0, \dots \dots \dots (33)$$

$$(x=0) \quad \dot{v}^b(0)=0, \quad EI_{c,1} \dot{v}_{,xx}^b(0)=0, \dots \dots \dots (34 \text{ a, b})$$

$$(x=r_j, \quad j=1, 2, \dots, s)$$

$$\dot{v}^b(r_j-0)=\dot{v}^b(r_j+0), \quad \dot{v}_{,x}^b(r_j-0)=\dot{v}_{,x}^b(r_j+0),$$

$$EI_{c,j+1} \dot{v}_{,xx}^b(r_j+0) - EI_{c,j} \dot{v}_{,xx}^b(r_j-0) = 0,$$

$$EI_{c,j+1} \dot{v}_{,xxx}^b(r_j+0) - EI_{c,j} \dot{v}_{,xxx}^b(r_j-0) = 0, \dots \dots \dots (35 \text{ a-d})$$

$$(x=H) \quad \dot{v}^b(H)=0, \quad \dot{v}_{,xx}^b(H-0)=0 \dots \dots \dots (36 \text{ a, b})$$

(33)~(36) の方程式はすべて斉次式であり、固有値問題を構成する。荷重 p が離散的に存在する特別な値、すなわち固有値をとるときにだけ、方程式は自明解 $\dot{v}^b \neq 0$ 以外の解を持ち得る。固有値問題を解いて、正の最小固有値 p_{SL} を求める。非対称定常状態への移行の際に発生する逆対称たわみモードは、最小固有値に対応する固有関数である。また、式 (33)~(36) は、柱の逆対称たわみ関数 $\dot{v}^b$ を基本釣合状態からの付加たわみ関数 v で置き換えれば、Fig. 2 に示されたすべての塑性ヒンジ形成位置、すなわち第 1 層柱脚と全層の梁端に摩擦抵抗のないヒンジを設けて得られる Fig. 7(a) に示された骨組の柱の座屈方程式に一致する。このように、もとの骨組に対する対称限界条件式を座屈条件式としてもつ骨組を等価骨組と呼ぶことにする。すなわち、 p_{SL} はこの等価骨組の Euler 座屈荷重であり、逆対称変形モードは等価骨組の座屈モードである。

6. 対称限界理論解と対称限界曲線

Fig. 4 の均等骨組について、対称限界理論解を導き、対称限界曲線を求める。均等骨組の柱は全層にわたって

Fig. 8 Modified frame, whose buckling condition is equivalent to symmetry limit condition of original prototype frame (in case that plastic hinges form at column ends); (a) equivalent frame, (b) anti-symmetric deformation mode.

一様な断面をもつので (33)~(35) 式において、 $I_{c,j}=I_c$ ($j=1, 2, \dots, s+1$) と置く。式 (33)~(36) で与えられる固有値問題を解き、最小固有値およびそれに対応する固有モードとして、対称限界荷重 p_{SL} および柱の逆対称たわみモード $\dot{v}_{SL}^b$ が次式のように得られる。

$$p_{SL} = \pi^2 EI_c / H^2 \dots \dots \dots (37)$$

$$\dot{v}_{SL}^b = C \sin \omega x, \quad \omega^2 = p / (EI_c) \dots \dots \dots (38)$$

また、対称限界で生じる逆対称変形モード、すなわち等価骨組の座屈モードの概略図を Fig. 7(b) に示す。定常状態変化率が唯一解を持つための十分条件を文献¹³⁾に従って導き、その結果を適用すれば次の結論を得る。

R1. Γ^I 反転時に Fig. 2 または Fig. 5(b) に示される位置に塑性ヒンジが生じる対称定常状態からは、 $p < p_{SL}$ であれば非対称定常状態への移行や逆対称変形モードの発散が起きることはなく、 $p_{SL} \leq p$ のときには起きる可能性がある。

つぎに、Fig. 5(c) に示されるように均等骨組のすべての柱端に塑性ヒンジが生成される対称定常状態における対称限界条件式について考える。この場合も、塑性ヒンジの位置が異なるという点を除き、(33)~(36) 式と同様の誘導方法に従って逆対称成分を支配する斉次方程式の組を導くことができ、それらの支配方程式は塑性ヒンジが形成されるすべての位置に摩擦抵抗のないヒンジを設けて得られる Fig. 8(a) の等価骨組の座屈方程式に一致することがわかる。この等価骨組は不安定であるから、座屈荷重は 0 であり、したがって対称限界荷重も 0 である。また、等価骨組の座屈モード、すなわち対称限界で生じる逆対称変形モードの 1 例を Fig. 8(b) に示す。以上の検討から、次の結論が述べられる。

R2. Γ^I 反転時に Fig. 5(c) に示される位置に塑性ヒン

ジが生じる対称定常状態からは、 $0 < p$ であればいつでも、Fig. 8(b) に示される逆対称変形モードの発生や発散が起きる可能性がある。

式(13), (18), (20) および Fig. 6 に示された対称定常状態のパターンの移り変わりと、対称限界条件の検討から得られた結果 R1, R2 を総合すれば、Fig. 4 の均等骨組について対称限界曲線を描くことができる。梁降伏と柱降伏を分ける鉛直荷重値 p_{cg} と、梁端に塑性ヒンジが形成される対称定常状態に対する対称限界荷重値 p_{SL} との大小関係によって、次の 2 ケースに場合分けされる。

1) $p_{SL} \leq p_{cg}$ の場合の対称限界曲線：Fig. 9(a) に示した太い実線は、このケースの対称限界頂点水平変位振幅を鉛直荷重値に対してプロットして描いた対称限界曲線である。

i) $p < p_{SL}$ ならば、変位振幅をいかに増加させても対称定常状態から非対称定常状態への移行または逆対称変形成分の発散は生じない。

ii) $p_{SL} \leq p < p_{cg}$ ならば、水平変位振幅 Ψ が梁端に塑性ヒンジが初めて生じる弾性限界値 Ψ_{yg} に達したとき、非対称定常状態への移行や逆対称変形モードの発散が生じる可能性がある。

Fig. 9 Symmetry limit curves; (a) $p_{SL} \leq p_{cg}$, (b) $p_{SL} > p_{cg}$.

iii) $p_{cg} \leq p$ ならば、水平変位振幅 Ψ が柱端に塑性ヒンジが初めて生じる弾性限界値 Ψ_{yc} に達したとき、非対称定常状態への移行や逆対称変形モードの発散が生じる可能性がある。

2) $p_{SL} > p_{cg}$ の場合の対称限界曲線：Fig. 9(b) に示した太い実線が、このケースの対称限界曲線である。

i) $p < p_{cg}$ ならば、変位振幅をいかに増加させても対称定常状態から非対称定常状態への移行または逆対称変形成分の発散は生じない。

ii) $p_{cg} \leq p$ ならば、水平変位振幅 Ψ が柱端に塑性ヒンジが初めて生じる弾性限界値 Ψ_{yg} に達したとき、非対称定常状態への移行や逆対称変形モードの発散が生じる可能性がある。

7. 結 語

完全塑性材料で構成された多層多スパン平面骨組に対称限界理論を適用し、対称限界の理論予測解を導いた。ここで展開した対称限界理論は、次の点において従来の理論を拡張するものである。

i) ひずみ硬化材料で構成された梁-柱部材について展開されていたこれまでの対称限界理論を、完全塑性材料で構成され塑性ヒンジが形成される部材に拡張した。

ii) これまで単一の梁-柱部材だけを対象としていた対称限界理論を、複数部材から構成される平面剛接骨組にも適用する方法を示した。

柱軸力一定の下で完全両振り頂点水平変位が作用する魚骨型多層部分骨組について行った対称限界理論解析の結果は次のように要約される。

(1) 一定鉛直荷重がある限界値を超えないならば、頂点水平変位振幅をいかに増加させても対称限界には至らない。この限界荷重値は、塑性ヒンジが生じているすべての位置に摩擦抵抗のないヒンジを設けて得られる等価骨組の座屈荷重値に等しい。

(2) 一定鉛直荷重が限界値を超える場合、水平変位振幅が増大して第 1 層柱脚と梁端部に塑性ヒンジがつぎつぎと形成されることによって対称限界に達すると予測される。その後の繰返し载荷により、逆対称変形モードが一方向に累積していく可能性がある。その逆対称変形モードは、柱が複数層にまたがって弓形にたわむモードであり、等価骨組の座屈モードに等しい。

(3) 鉛直荷重値が大きく柱軸力が降伏軸力値に近い場合は、水平変位振幅の増加過程で柱端に塑性ヒンジが生じてから対称限界に達する。

参考文献

- 1) 松井千秋：鉄骨構造学詳論（丸善，著：若林 實），第 15 章；骨組の静的挙動，pp. 381~403, 1985.
- 2) Lu, L. W. : Plastic Design of Multi-Story Frames, Lecture 15 Frame Buckling, Fritz Engineering Labora-

- tory Report, No. 273. 20, Lehigh University, pp. 15.1~15.16, 1965.
- 3) 坂本 順, 宮村篤典, 小浜 朗: Systematic Method for Inelastic Buckling Analysis of Steel Frames, 日本建築学会論文報告集, 第 165 号, pp. 21~32, 1969.
 - 4) 横尾義貴, 坂本 順, 宮村篤典: 鉛直荷重と水平荷重を受ける弾・塑性架構の安定限界耐力について, 日本建築学会論文報告集, 第 124 号, pp. 1~7, 1966.
 - 5) R. Tanabashi, Tsuneyoshi Nakamura and S. Ishida, : Overall Force Deflection Characteristics of Multi-Story Frames, *Proc. 1969 Symposium on Ultimate Strength of Structures and Their Components, Tokyo*, pp. 87~100, 1971.
 - 6) 若林 實, 松井千秋, 南 宏一, 三谷 勲: 実大鉄骨ラーメンの弾塑性性状について, 日本建築学会論文報告集, 第 198 号, pp. 7~17, 1972.
 - 7) 松井千秋, 三谷 勲: 繰返し水平力を受ける高張力鋼骨組の弾塑性性状に関する研究, 日本建築学会論文報告集, 第 250 号, pp. 31~41, 1976.
 - 8) 藤本盛久, 須藤福三, 和田 章: 任意平面骨組の非線形応力解析, 日本建築学会論文報告集, 第 189 号, pp. 59~70, 1971.
 - 9) Y. Yokoo, Tsuneyoshi Nakamura, S. Ishida, and Takashi Nakamura: Cyclic Load-Deflection Curves of Multi-Story Strain-Hardening Frames Subjected to Dead and Repeated Alternating Lateral Loads, *Preliminary Report of IABSE Symp. on Resistance and Ultimate Deformability of Structures Acted on by Well Defined Repeated Loads*, Lisbon, pp. 81~87, 1973.
 - 10) 石田修三, 森迫清貴: 増分摂動法を導入した一次元複合非線形有限要素法, 日本建築学会構造系論文報告集, 第 397 号, pp. 73~82, 1989.
 - 11) 加藤 勉, 秋山 宏: 鋼構造部材の耐力 (その 4), 日本建築学会論文報告集, 第 151 号, pp. 15~20, 1968.
 - 12) 秋山 宏: 建築物の耐震極限設計, 東大出版会, 1980.
 - 13) K. Uetani, Tsuneyoshi Nakamura: Symmetry Limit Theory for Cantilever Beam-columns Subjected to Cyclic Reversed Bending, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 31, No. 6, pp. 449~484, 1983.
 - 14) K. Uetani: Uniqueness Criterion for Incremental Variation of Steady State and Symmetry Limit, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 37, No. 4, pp. 495~514, 1989.
 - 15) 上谷宏二: 京都大学博士論文, 第 3, 6, 9, 10 章, 1984.
 - 16) 中村恒善, 上谷宏二: 鋼構造柱材に対する対称限界理論 (その 1: 一般的定式化), 日本建築学会構造系論文報告集, 第 398 号, pp. 109~119, 1989.
 - 17) 中村恒善, 上谷宏二, 以頭秀司: 鋼構造柱材に対する対称限界理論 (その 2: 有限要素法を用いた対称限界解析法), 日本建築学会構造系論文報告集, 第 408 号, pp. 43~54, 1990.
 - 18) 上谷宏二: 京都大学博士論文, 第 4, 5 章, 1984.
 - 19) 中村恒善, 上谷宏二, 榎間隆之: 非線形応力~ひずみ関係に従う梁-柱モデルの定常状態限界解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (北海道), 構造 21059, pp. 805~806, 1986.
 - 20) 森迫清貴, 上谷宏二, 石田修三: 定鉛直荷重下で繰返し水平載荷を受ける 2 層 1 スパン平面骨組の崩壊挙動解析, 構造工学論文集, Vol. 38 B, pp. 531~536, 1992.
 - 21) 上谷宏二: 梁-柱の単調曲げ挙動と繰返し曲げ挙動, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (九州), 構造 II, 21399, pp. 1293~1294, 1989.
 - 22) M. Yamada, K. Iwanaga: Besonderheiten im Verformungsverhalten eines Mehrstockigen, Mehrferdrigen unter der Traglast, Teil I: Versuch, der Stalbau, 3, pp. 85~88, 1987.
- (1991 年 11 月 10 日原稿受理, 1992 年 3 月 4 日採用決定)

英文要約 (Summary)

1. Introduction

On the behavior of building frames subjected to repeated horizontal loading, no theoretical study from the viewpoints of the critical theory or stability theory has been developed, while a certain number of experimental and computational studies have been done to clarify the characteristics of their hysteretic behavior.

The present author et al. have defined a pair of new critical states for the hysteretic behavior of beam-columns under repeated loading and established new theories for predicting them. These critical states have been named *symmetry limit* and *steady-state limit* and the critical theories, *symmetry limit theory*^{13)~17)} and *steady-state limit theory*^{18), 19)}, respectively. It can be predicted by the symmetry limit theory that there would exist a symmetry limit in a multistory planar frame with a symmetric configuration subjected to completely reversed cyclic lateral displacement and that a particular anti-symmetric deformation mode would appear and grow in one direction at every cycle when the loading condition is in excess of the symmetry limit. It seems also possible that the cyclic growth of the deformation mode would induce so severe deterioration in restoring force property as not to be imagined from the behavior under one-way loading. If these predictions are true, some new design formula should

be proposed in order to prevent such severe deterioration caused by repeated loading.

The purposes of the present paper are to verify the existence of the symmetry limit solutions on multistory multibay planar rectangular frames and to clarify the characteristics of their collapse behavior. In Part I, the symmetry limit theory for beam-column members will be extended to the frame problems and theoretical prediction of symmetry limits will be made for some prototype frames. In Part II, the numerical response analysis will be performed to verify the theoretical predictions given in Part I and clarify the unstable behavior under repeated loading beyond the symmetry limits.

2. Analytical Model

The model frame, whose symmetry limit is to be analyzed, is the fishbone-shaped subframe cut off from a multistory multibay frame, which is made of elastic-perfectly plastic material, as shown in Fig.1(b). The model frame is subjected to an idealized completely reversed top lateral displacement program with continuously increasing amplitude, referred to as COIDA, under constant axial compression. The characteristics of a plastic hinge is shown in Fig. 3.

3. Outline of Symmetry Limit Analysis

Under the action of COIDA, the frame exhibits a continuous sequence of symmetric steady states, in each of which the right and left reversal-point configurations denoted by Γ^I and Γ^II , respectively, are symmetric with respect to the initial column axis, during some range of smaller top deflection amplitude Ψ . But when Ψ reaches a certain limit, transition from a symmetric steady state to an asymmetric steady state would occur. Symmetry limit has been defined as the critical state, at which this transition occurs first, and can be predicted by the following procedure :

- (a) Solution to the symmetric steady state is obtained for each value of Ψ . (Section 4)
- (b) The symmetry limit condition is derived from the condition that to the problem of finding possible rates of steady-state variables with respect to Ψ , there exists a solution involving non-vanishing anti-symmetric component. (Section 5)
- (c) A symmetry limit solution is found as the symmetric steady state, at which the characterizing condition is satisfied at the smallest top deflection amplitude. (Section 6)

4. Symmetric Steady State Solution

Steady states can be represented by the variables of reversal-point states only. The equations of the reversal-point column deflections v^I and v^{II} are given by (5)~(9). The deformed configuration of the frame at Γ^I in a symmetric steady state can be constructed by joining the equally deformed single-story unit frames shown in Fig. 5. The symmetric steady state solution can be derived as (11)~(21).

5. Symmetry Limit Condition

In order to derive the symmetry limit condition, the equations for the incremental variation of steady state must be formulated. The rate equations for Γ^I and Γ^{II} in case of weak-beam frames are given by (22)~(26) and transformed into the equations (29)~(32) and (33)~(36) in terms of the symmetric and anti-symmetric components, defined as (27) and (28). The equations (33)~(36) of the anti-symmetric column deflection $\dot{v}^b$ can have non-vanishing solutions only for the special values, so-called eigen values, of axial force p . As the smallest eigen-value and the associated eigen-function, the symmetry limit axial force p_{SL} and anti-symmetric deflection mode $\dot{v}_{SL}^b(x)$ can be determined and given by (37) and (38).

6. Symmetry Limit Solution and Symmetry Limit Curves

From the results obtained in section 5 together with a proper consideration on the basis of a sufficient condition for uniqueness of the incremental variation of steady state¹⁴⁾, the following predictions can be derived.

P1. When the axial force is smaller than a certain limit, which is identical to the Euler buckling load of the

equivalent frame modified from the original frame by inserting idealized mechanical hinges at all the plastic hinge located sections, no anti-symmetric deflection component should appear at any value of ψ .

P2. Under an axial force in excess of the limit level, transition to an asymmetric steady state or divergence of the anti-symmetric deformation component is possible to occur, when the top deflection amplitude reaches the elastic limit.

The results of the above theoretical prediction can be summarized as the symmetry limit curves in Figs 9(a), (b).

7. Concluding Remarks

The symmetry limit theory, which had first been developed for a cantilever beam-column subjected to cyclic bending, has been extended to the problems on planar frames made of elastic-perfectly plastic material. By means of the extended theory, symmetry limit solutions have exactly been derived in closed form for fishbone-shaped unit frames subjected to completely reversed cyclic top deflection with continuously increasing amplitude under constant column axial compression. It has been predicted from the theoretical study that anti-symmetric deformation component could appear at some finite level of top deflection amplitude only when the column axial compression is greater than or equal to a certain limit.