バイリニア型履歴系の地震応答に及ぼす減衰の影響

EFFECT OF DAMPING ON SEISMIC RESPONSE OF BILINEAR HYSTERETIC SYSTEMS

松島 豊*

Yutaka MATSUSHIMA

The nonlinear random response of the single-degree-of-freedom system having the elasto-plastic hysteretic restoring force together with the viscous damping is presented. The Gaussian white noise is assumed as the ground acceleration. Two types of damping where the coefficient of viscosity is taken proportional to the elastic stiffness and to the instantaneous stiffness are dealt with. The analysis aims at finding the approximate solutions for the expectation and the variance of displacement, velocity, ductility factor, cumulative ductility factor and damping energy. The solutions are compared and well agree with the digital estimates in many cases.

Keywords : *nonlinear response, random response, viscous damping, bilinear hysteresis, white noise, seismic design*

非線形応答, ランダム応答, 粘性減衰, バイリニア履歴, 白色雑音, 耐震設計

1. 序

筆者は文献1)で非減衰のバイリニア型履歴1自由度系にホワイトノイズが地動として作用した場合の非線形ランダム応答を考察した。そこでは変位応答を履歴中心の移動量とその中心まわりの変位から成るものとした。前者を正負の累積塑性変形の差に基づくランダムウォークとみなし、後者を振動する成分としてその固有振動数を評価した。変位と速度の分散, 最大変形と累積塑性変形の期待値と分散も閉じた形の単純な関数で表現し, それらが数値実験値とよく一致することを確認した。

本論文でもこの方法をそのまま踏襲し, 同じ完全弾塑性型のバイリニア履歴特性をもつ1自由度系にホワイトノイズが作用する場合を扱うが, 系には速度に比例する粘性減衰があるものとする。減衰の型としては粘性減衰係数が弾性剛性に比例する場合と, 時間とともに変わる局所的な剛性, いわゆる瞬間剛性に比例する場合の2種類を想定する。構造物の応答解析や耐震設計では多く前者が仮定されるが, ときには後者が採用されることもある。同じ減衰定数が用いられても, 減衰の型が異なると応答は変化する。その差を解析的に求めた研究はほとんどないので, ここではとくに減衰の大きさと型が応答にどのような影響を及ぼすかに注目する。実際の構造物に付与されている減衰の機構がどちらの型に近いということには触れない。それはまた別の課題である。関連す

る他の既往の研究で採られている方法と本論の方法との関係については文献1)で詳述されているので再録しない。

変位と速度の分散, 塑性率, 累積塑性率および減衰エネルギーの期待値と分散を単純な関数で表現する。解の妥当性はモンテカルロ・シミュレーションによる数値実験によって検証される。サンプルサイズが十分大きければ, 数値実験値は正解に近づくので, これもできるだけ実用的な形でとりまとめる。

2. 入出力系

静止している粘性減衰をもつ1自由度系の基部に, 突然ガウス型ホワイトノイズが地動加速度として作用する場合を扱う。粘性減衰には弾性剛性に比例するものと瞬間剛性に比例するものの2つの型を考える。前者は減衰力 $c\dot{x}$ において, 粘性減衰係数 c が $(2h/\omega_0)k_0 = 2h\omega_0 m$ となるものをいう。ここで h は減衰定数, $k_0 (= \omega_0^2 m)$ は弾性剛性, ω_0 は弾性時の固有角振動数, m は質量である。以後簡単のためにこれを線形減衰と呼ぶ。後者は k_t を瞬間剛性としたとき, $c = (2h/\omega_0)k_t$ となるものをいう。以後これを非線形減衰と呼ぶ。力の釣合いより, 単位質量あたりの運動方程式が次のように得られる。

$$\ddot{x} + 2h\omega_0\dot{x} + f(x, \dot{x}) = -U(t)W(t) \cdots \cdots (1)$$

* 筑波大学構造工学系 教授・工博

Prof., Institute of Engineering Mechanics, Univ. of Tsukuba, Dr. Eng.

ここで、 x は質点の変位、 $\dot{}$ は時間 t に関する微分を表す。 $U(t)$ は単位階段関数、 $W(t)$ は一定スペクトル密度 S_0 をもつ平均値ゼロの定常ホワイトノイズとする。 $f(x, \dot{x})$ は復元力関数を表し、完全弾塑性型のバイリニア履歴をもつものとする。降伏変位を Δ とし、降伏加速度 $\alpha (= \omega_0^2 \Delta)$ で完全な塑性流れを起こす。線形減衰では ω_t は常に一定値 ω_0 に等しい。非線形減衰では応答が ω_0^2 の勾配をもつ第 1 分枝上にあるとき $\omega_t = \omega_0$ 、勾配がゼロの第 2 分枝上にあるとき $\omega_t = 0$ とする。

3. 応答が弾性限に達する期待時間

(1) 式の初期条件は、 $t=0$ で $x=\dot{x}=0$ とする。応答は非定常となり、系はある時間内では弾性的に挙動する。弾性限界に達するまでの時間の期待値 t_0 は近似的に次のようにして求められる。

弾性変位の最大値の期待値は、

$$|\bar{\eta}|_{\max} = a\sigma_\eta \quad (2)$$

と書ける。ここで、 η は降伏変位で規準化された変位 x/Δ を表す。上つきの $-$ は期待値、 σ は標準偏差を表す。 a の値は近似的に次式で表される。

$$a = \sqrt{2} f(h\tau) \quad (3)$$

ここで、

$$f(h\tau) = \sqrt{0.424 + \ln(4\pi h\tau + 1.78)} \quad (4)$$

τ は弾性時の固有周期 T_0 で規準化された時間 t/T_0 を表す。(4) 式で与えられる関数は、 $h=0$ のとき 1、 $h>0$ で 1 より大きくなるもので、Rosenblueth らによる減衰応答の補正係数²⁾に相当している。

σ_η は近似的に次式で与えられる。

$$\sigma_\eta = \sqrt{\frac{\pi\xi}{2h}} (1 - e^{-4\pi h\tau}) \quad (5)$$

ここで、 $\xi \equiv \omega_0 S_0 / \alpha^2$ である。 ξ は構造物の強度に対する入力強度の比に相当する無次元量である。

$\tau_0 \equiv t_0/T_0$ は $|\bar{\eta}|_{\max} = 1$ となるような時間であり、(3) ~ (5) 式より $a\sigma_\eta = 1$ を満足する τ の値として求められる。この方程式は τ に関して陽には解けないので、解を得るには反復計算が必要である。ただし、通常使われる ξ と h の範囲、例えば、 $\xi \geq 0.025$ 、 $h \leq 0.1$ では τ_0 はおおむね 1 以下という小さな値となり、 $f(h\tau)$ は 1 に近い。

t が t_0 より大きくなると、系は塑性域に入る。系に供給されるエネルギーと粘性減衰および履歴によって消費されるエネルギーは釣り合うが、完全弾塑性履歴の場合には応答変位が定常になることはない。履歴ループの中心が原点から移動し、質点は移動した中心のまわりで振動する。時間 $t' (\equiv t - t_0)$ における履歴中心の移動量を x_c 、その中心まわりの変位を x_0 とすると、近似的に、

$$x = x_c + x_0 \quad (6)$$

である。 x_c は非常に低い振動数をもつ成分、 x_0 はある

等価な固有角振動数 ω_e をもつ成分である。供給されたエネルギーは専ら x_0 に基づく履歴ループと粘性減衰によって消費される。以後の考察は、とくに断らない限り、 $\tau' (\equiv \tau - \tau_0) \geq 0$ の場合についてのものとする。

4. 履歴中心まわりの振動成分

履歴中心まわりの振動成分 x_0 を近似的にある等価な期待固有角振動数 ω_e をもつ正弦振動であるとみなす。線形減衰の場合、等価な期待周期 $T_e (= 2\pi/\omega_e)$ 当たりのエネルギーの釣合いは、

$$\bar{x}_{p1}\alpha + 2h\omega_0 V_{\dot{x}} \frac{2\pi}{\omega_e} = \pi S_0 \frac{2\pi}{\omega_e} \quad (7)$$

である。ここで、 $\bar{x}_{p1}$ は 1 周期 T_e 間での累積塑性変形の期待値を表す。累積塑性変形とは塑性変形の絶対値の総和を表し、塑性変形とは質点が $f = \pm \alpha$ の線上を移動する量をいう。 V は分散 σ^2 を表す。

$\dot{x}_c$ は $\dot{x}_0$ に比べて十分小さいので、(6) 式より $\dot{x}$ は近似的に $\dot{x}_0$ に等しい。 $t' \geq 0$ では $\dot{x}_0$ は振幅 $\omega_e(\bar{x}_{p1}/4 + \Delta)$ の正弦振動をしているとみなされるから、履歴ループがその中心に関して対称で、ループの対角線の勾配が ω_e^2 に対応するものとする、

$$\omega_e^2 = \frac{4\alpha}{\bar{x}_{p1} + 4\Delta} \quad (8)$$

である。 $\beta \equiv \omega_e/\omega_0$ 、 $\bar{\lambda}_1 \equiv \bar{x}_{p1}/\Delta$ として (8) 式を無次元表現に改めれば、次式が得られる。

$$\beta^2 = \frac{4}{\bar{\lambda}_1 + 4} \quad (9)$$

$\dot{x}$ の分散 $V_{\dot{x}}$ は、

$$V_{\dot{x}} = \frac{\omega_e^2}{\alpha_0^2} \left(\frac{\bar{x}_{p1}}{4} + \Delta \right)^2 \quad (10)$$

と書ける。ここで、 $\tau = \tau_0$ における連続性を考慮し、

$$a_0 = \sqrt{2} f(h\tau_0) \quad (11)$$

とする。

(10) 式を (7) 式の $V_{\dot{x}}$ に代入し、すべての量を無次元化すれば、次式が得られる。

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{2\pi}{\beta^3} \left(\pi\beta^2\xi - \frac{2h}{\alpha_0^2} \right) \quad (12)$$

(9)、(12) 式は $\bar{\lambda}_1$ と β に関する連立方程式である。これを解析的に解くことはできないが、反復計算によって解を得ることは容易である。

線形減衰の粘性減衰係数に対する非線形減衰のその比は平均的に $\omega_e^2/\omega_0^2 = \beta^2$ であると考えられるから、非線形減衰の場合には、(12) 式の右辺の第 2 項にある h のかわりに平均的に $h\beta^2$ を使い、以下同様にして $\bar{\lambda}_1$ と β を求めればよい。

このようにして β を具体的に求めてみると、 β が h によりそれほど変化せず、また減衰の型にもあまり依存しないことがわかる。

$\dot{\eta} \equiv \dot{x}/(\omega_0 \Delta)$ として (10) 式を無次元表現に書き改め、(9) 式を利用すると、

$$V_{\dot{\eta}} = \frac{1}{a_0^2 \beta^2} \quad (13)$$

となる。減衰の型に応じて β が変わるので、 $V_{\dot{\eta}}$ もそれに従って変化する。

なお (13) 式を使えば、(12) 式は、

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{4\pi h}{\beta} \left(\frac{\pi \xi}{2h} - V_{\dot{\eta}} \right) \quad (14)$$

と書ける。弾性限界である $\tau' = 0$ 、 $\beta = 1$ では (5) 式より、 $V_{\dot{\eta}} = V_{\dot{\eta}} < \pi \xi / (2h)$ となることがわかるので、(14) 式の右辺は常に正である。これは、 $\tau' > 0$ で系が常に弾塑性域にあることと対応している。

履歴減衰を等価な粘性減衰に置きかえたい場合には、等価な減衰定数を h_e とすると、

$$\bar{x}_1 \alpha = 2 h_e \omega_e V_{\dot{x}} \frac{2\pi}{\omega_e} \quad (15)$$

であるから、これを無次元表現に改めて整理すれば、

$$h_e = \frac{a_0^2 \beta^2 \bar{\lambda}_1}{4\pi} \quad (16)$$

となる。この等価減衰定数の値はあとでピークファクター p を求めるときに使われる。

5. 累積塑性率と減衰エネルギーの期待値と分散

$t' \geq 0$ における累積塑性変形 x_a の期待値は、

$$\bar{x}_a = \bar{x}_{p1} t' \frac{\omega_e}{2\pi} \quad (17)$$

であるから、上式を無次元化すれば、累積塑性率 $\lambda \equiv x_a / \Delta$ の期待値は次のようになる。

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_1 \beta \tau' \quad (18)$$

t' 間で粘性減衰によって消費されるエネルギー D の無次元量 $\delta \equiv D / (\alpha \Delta)$ の期待値は、供給される全エネルギーを $\alpha \Delta$ で除した無次元量 ε の期待値 $2\pi^2 \xi \tau'$ から $\bar{\lambda}$ を差し引いたものに等しいから、

$$\bar{\delta} = (2\pi^2 \xi - \bar{\lambda}_1 \beta) \tau' \quad (19)$$

(12) 式と (13) 式からわかるように、線形減衰の場合にはこれを次のように書いてもよい。

$$\bar{\delta} = 4\pi h \tau' V_{\dot{\eta}} \quad (20)$$

このとき、全エネルギーの期待値に対する履歴吸収エネルギーの期待値の比は (18)、(20) 式より、

$$\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} + \bar{\delta}} = \frac{1}{1 + \frac{4\pi h V_{\dot{\eta}}}{\bar{\lambda}_1 \beta}} \quad (21)$$

となり、 τ' に依存しない。非線形減衰の場合には、(20)、(21) 式で h のかわりに $h\beta^2$ を入れればよい。

速度応答が振幅 A をもつ角振動数 ω_e の正弦振動をしているとすると、線形減衰の場合、半周期あたりの減衰エネルギー D_H の期待値は $(\pi h \omega_0 / \omega_e) \bar{A}^2$ 、2 乗平均値は $(\pi h \omega_0 / \omega_e)^2 \bar{A}^4$ と書けるので、 D_H の分散は、

$$(\pi h \omega_0 / \omega_e)^2 (\bar{A}^4 - \bar{A}^2)^2$$

に等しい。速度応答は必ずしも狭帯域のガウス過程ではないが、近似的にそう考えることができれば、振幅 A をレーリー分布をもつ確率変数と仮定できることになり、近似的に、

$$\bar{A}^4 - \bar{A}^2 = 8\sigma_A^4 - (2\sigma_A^2)^2 = 4\sigma_A^4$$

である。速度が正の場合の累積塑性変形と速度が負の場合の累積塑性変形は互いに独立であるとみなしてよいので、大ざっぱに半周期ごとの減衰エネルギーも互いに独立であると仮定すると、 t' 間における減衰エネルギーの分散は近似的に次式で与えられる。

$$V_D = \frac{4\pi h^2 \omega_0^2}{\omega_e} V_{\dot{x}}^2 t' \quad (22)$$

(22) 式を無次元化すれば、

$$V_D = \frac{8\pi^2 h^2 \tau'}{\beta} V_{\dot{\eta}}^2 \quad (23)$$

である。(23) 式でも非線形減衰の場合には、 h のかわりに $h\beta^2$ を使う。

λ と δ には正の強い相関があると考えられる。確率変数 ε が増減すると、それに伴って λ と δ が共に増減するとみなされるからである。そこで、近似的に λ と δ の間に完全な相関があると仮定すると、

$$\sigma_\varepsilon = \sigma_\lambda + \sigma_\delta \quad (24)$$

である。 ε の分散は、

$$V_\varepsilon = 4\pi^2 \xi \tau' V_{\dot{\eta}} \quad (25)$$

で与えられるから¹⁾、(23)、(25) 式を (24) 式に適用すれば、線形減衰の場合、

$$\sigma_\lambda = 2\pi \sqrt{\tau'} \left(\sqrt{\xi} - h\sigma_{\dot{\eta}} \sqrt{\frac{2}{\beta}} \right) \sigma_{\dot{\eta}} \quad (26)$$

となる。(26) 式でも非線形減衰の場合には、 h のところに $h\beta^2$ を代入すればよい。

6. 変位の分散と塑性率の期待値と分散

変位の無次元量 η の分散は、 η_c と η_0 が確率的に独立であるという仮定を導入することにより、

$$V_\eta = V_\lambda + \frac{V_{\dot{\eta}}}{\beta^2} \quad (27)$$

と得られる¹⁾。上式の V_λ に (26) 式を適用すれば、線形減衰の場合、具体的に次のように書ける。

$$V_\eta = \left\{ 4\pi^2 \tau' \left(\sqrt{\xi} - h\sigma_{\dot{\eta}} \sqrt{\frac{2}{\beta}} \right)^2 + \frac{1}{\beta^2} \right\} V_{\dot{\eta}} \quad (28)$$

非線形減衰の場合には、 h のところに $h\beta^2$ を代入する。

塑性率 μ の期待値は、同様に $|\eta_c|_{\max}$ と $|\eta_0|_{\max}$ が独立であるとして、

$$\bar{\mu} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} V_\lambda + \frac{p^2}{\beta^2} V_{\dot{\eta}} \quad (29)$$

である¹⁾。ここで、 p はいわゆるピークファクターを表す。 $\tau = \tau_0$ における連続性を保つようにし、また塑性領域に

入ることによって見かけ上減衰が増加することを考慮すれば、線形減衰の場合、

$$p = \sqrt{2} f(h\tau_0 + (h/\beta + h_e)\beta\tau') \\ = \sqrt{2} f(h\tau + \beta h_e\tau') \dots\dots\dots (30)$$

とすることができる。 ω_0 に対応する h を ω_e に対応するものに変換したのが上式の h/β という項である。 h_e は(16)式で与えられる。非線形減衰の場合には、上式で h のところに $h\beta^2$ を代入する。

(26)式を用いて(29)式を具体的に書けば、

$$\bar{\mu} = \sqrt{2\pi^3\tau' \left(\sqrt{\xi} - h\sigma_{\dot{\eta}} \sqrt{\frac{2}{\beta}} \right)^2 + \frac{p^2}{\beta^2} \sigma_{\dot{\eta}}^2} \dots\dots\dots (31)$$

非線形減衰の場合には、上式で h のところに $h\beta^2$ とする。

μ の分散は近似的に $|\eta_c|_{\max}$ の分散と $|\eta_0|_{\max}$ の分散の和になるが、後者は前者に比べて十分小さいと考えられるので¹⁾、これを無視すると次式が得られる。

$$V_{\mu} = \left(2C - \frac{\pi}{2}\right) V_{\lambda} \dots\dots\dots (32)$$

ここで、 C はカタランの定数で、 $C \approx 0.9160$ である。

7. シミュレーションによる検証と考察

以上の近似的表現式の妥当性を検証するために、モンテカルロ・シミュレーションによる数値実験が行われた。異なる振動数とランダムな位相をもつ正弦関数を多数重ね合わせるによってホワイトノイズと同等の特性をもつサンプルが300個作成された¹⁾。それらによる非定常な非線形応答が数値的に計算され、結果は統計的に処理された。 ξ の値は0.025, 0.05, 0.075, 0.10の

Fig.1 Time change of standard deviation of velocity

Fig.2 Time change of standard deviation of velocity

4種類、 h の値は、0, 0.01, 0.02, 0.05, 0.10の5種類とした。

Figs. 1, 2に $\sigma_{\dot{\eta}}-\tau$ 関係を示す。前者が線形減衰、後者が非線形減衰の場合であり、いずれも ξ が0.05のときの例である。この ξ の値は非常に強い地震動をうける中低層建造物の典型的なものに相当している。例えば、

$S_0 = 200 \sim 300 \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-3}$, $T = 0.3 \sim 0.5 \text{ s}$, $\alpha = 300 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$ とすると、

$$\xi = \frac{2\pi}{(0.3 \sim 0.5)} \times \frac{(200 \sim 300)}{300^2} = 0.03 \sim 0.07$$

という数値が得られる。以後の図でも代表例として多くこの場合を示す。5つの実線は近似解で、それぞれ5種類の h に対するものである。それらに近接する細い線で結ばれた黒丸が数値実験の結果を表す。実線と黒丸は比較的良好に一致している。減衰の型は $\sigma_{\dot{\eta}}$ の値にあまり大きな影響を与えない。

文献1)でも述べたように、 $\sigma_{\dot{\eta}}$ の解は他の ξ に対しては必ずしも十分な精度をもたない。 ξ が小さい場合に過大評価、 ξ が大きい場合に過小評価となる傾向にある。 $\sigma_{\dot{\eta}}$ は各種の応答量を直接支配する重要な量なので、試みに数値実験値により合うような実験式を次のように作成してみた。まず速度応答が十分定常となる範囲、 $5\tau_0 < \tau \leq 40$ での $\sigma_{\dot{\eta}}$ の平均値に近似解の β を乗じたものを計算した。それを h を横軸に、 ξ をパラメータとしてFig.3に黒丸で示す。 $\beta\sigma_{\dot{\eta}} = 1/a_0$ の値は理論的にも数値上も減衰の型に依存しないので、2つの減衰の型の平均をとってある。実線は近似解を表し、黒丸とは必ずしもよく合わないことがわかる。

$\beta\sigma_{\dot{\eta}}$ は h に対して双曲線状に減少し、 ξ に対して直線状に増加するようにみえる。そこでこれを単純に、

$$\beta\sigma_{\dot{\eta}} = u \frac{1+v\xi}{1+wh} \dots\dots\dots (33)$$

とおき、 u, v, w の値を最小2乗法で求めてみると、

$$u = 0.590, \quad v = 3.60, \quad w = 1.42 \dots\dots\dots (34)$$

という値が得られた。これが同図の点線である。こうすれば ξ の広い範囲でより精度の高い値が得られる。なお文献1)では、 $h=0$ の場合の実用式として次式が提示されている。

Fig.3 Semi-empirical expression for standard deviation of velocity

Fig. 4 Time change of expectation of cumulative ductility factor

Fig. 7 Time change of expectation of damping energy

Fig. 5 Time change of expectation of cumulative ductility factor

Fig. 8 Time change of expectation of damping energy

Fig. 6 Time change of expectation of cumulative ductility factor

Fig. 9 Comparison of σ_ϵ with $\sigma_\lambda + \sigma_\delta$

$$\sigma_{\bar{\eta}} = i\xi + j\beta \dots \dots \dots (35)$$

ここで、 $i=5.31$, $j=0.597$

この形式は (33) 式と事実上同等であり、(33), (34) 式による値と (35) 式による値は $0.25 \leq \xi \leq 0.1$ の範囲で 3% 以下の相対誤差で一致する。

Figs. 4, 5 に $\xi=0.05$ の場合の $\bar{\lambda}-\tau$ 関係を示す。近似解は数値実験値とよく一致している。他の ξ に対してどうなるかをみるために、 h が 0.05 である線形減衰の場合の $\xi=0.025 \sim 0.1$ における $\bar{\lambda}-\tau$ 関係を Fig. 6 に示す。 ξ が変化すれば一致の程度も変わるが、試みに $\sigma_{\bar{\eta}}$ に (33), (34) 式を使ってみると、点線のような結果となり、解の精度が向上することがわかる。

なお、以後の図では $\sigma_{\bar{\eta}}$ の近似解としてすべて (13) 式によるものを用いている。(33), (34) 式による $\sigma_{\bar{\eta}}$ をかわりに使えば、他の ξ に対して一般に解の精度は向

上する。向上する度合いは Fig. 3 からわかるように、 h が小さいほど大きい。 h がゼロの場合にどの程度精度がよくなるかは文献 1) に詳述されているので、このことについてはその部分を参照していただくこととし、これ以上の詳細は紙面の都合で割愛する。

Figs. 7, 8 は $\bar{\delta}-\tau$ の関係を示したもので、近似解と数値実験値が一致する度合いは満足すべきものである。

λ と σ の相関が強く、(24) 式が近似的に成り立つことを検証したのが Fig. 9 である。 h が 0.05 である線形減衰の場合の例である。(24) 式がよい精度で成立しており、近似解ともよく一致していることがわかる。図は省略するが、非線形減衰の場合にも、大体 (24) 式が成り立ち、 σ_ϵ の近似解も数値実験の値とよく一致することが確認できた。

Figs. 10, 11 に $\sigma_\lambda-\tau$ 関係を、Figs. 12, 13 に $\sigma_\delta-\tau$

Fig. 10 Time change of standard deviation of cumulative ductility factor

Fig. 14 Time change of standard deviation of displacement

Fig. 11 Time change of standard deviation of cumulative ductility factor

Fig. 15 Time change of expectation of ductility factor

Fig. 12 Time change of standard deviation of damping energy

Fig. 16 Time change of expectation of ductility factor

Fig. 13 Time change of standard deviation of damping energy

Fig. 17 Time change of standard deviation of ductility factor

関係を示す。線形減衰の場合には、 σ_λ 、 σ_σ の近似解が比較的よい精度をもつことがわかる。非線形減衰の場合には、 σ_σ の近似解がやや過大評価となり、その結果 δ_λ の解が過少評価となっている。

Fig. 14 に線形減衰の場合の $\sigma_\eta - \tau$ 関係を示す。近似

解は数値実験値とよく合っている。図は省略するが、非線形減衰の場合には h が大きいところで解はやや小さい値を与える。

Figs. 15, 16 に $\bar{\mu} - \tau$ 関係を示す。 σ_η の場合と似た傾向を指摘することができる。Fig. 17 は線形減衰の場合

の $\sigma_\mu - \tau$ 関係である。

Figs. 18, 19 は $\bar{\mu}$ と λ の関係を示したものである。線形減衰の場合には近似解と数値実験値は大体よく合うが、非線形減衰の場合には両者が一致する度合いはあまりよくない。なお後者の数値実験値では h による差が小さく区別するのが困難なので、 h との対応は指示されていない。

非減衰の場合¹⁾と同様に、試みに数値実験値が次のような簡単な関係、

$$\bar{\mu} = b\sqrt{\lambda+1} \quad (36)$$

にあるものとし、 b の値を各 ξ と h に対して最小2乗法で求めてみた。使用されたデータはそれぞれ $\tau=1, 2, \dots, 40$ の場合の40個である。その結果が Figs. 20, 21 に黒丸で示されている。 b は ξ に対して直線状に増加し、 h に対して双曲線状に減少するので、更にこれを、

$$b = c \frac{1+d\xi}{1+eh} \quad (37)$$

Fig. 18 Relation between expectations of ductility and cumulative ductility factor

Fig. 19 Relation between expectations of ductility and cumulative ductility factor

Fig. 20 Coefficient b appearing in Eq. $\bar{\mu} = b\sqrt{\lambda+1}$

と書き表す。両図に示されているデータをすべて使い、再び最小2乗法によって c, d の値を決定すると、

$$c=0.622, \quad d=18.7 \quad (38)$$

という数値が得られた。また、 e の値は線形減衰の場合、

$$e=2.92 \quad (39)$$

非線形減衰の場合、

$$e=0.908 \quad (40)$$

となった。(37)~(40)式による b の値が同図の実線である。 b に与える h の影響は小さく、とくに非線形減衰の場合にそうである。実用的には、(36)~(40)式を $\bar{\mu}-\lambda$ 関係を表す近似式としてもよい。なお、文献1)によれば、 $h=0$ の場合、 $c=0.649, d=17.7$ である。これと(38)式によるものとは、 $0.025 \leq \xi \leq 0.1$ の範囲で約3%以下の相対誤差で一致する。このことは、 ξ と h が互いに無関係に b に寄与するという(37)式の形が妥当であることを示している。

Figs. 22, 23 に σ_μ と σ_λ の関係を示す。 h による差が

Fig. 21 Coefficient b appearing in Eq. $\bar{\mu} = b\sqrt{\lambda+1}$

Fig. 22 Relation between standard deviations of ductility and cumulative ductility factor

Fig. 23 Relation between standard deviations of ductility and cumulative ductility factor

Fig. 24 Coefficient q appearing in Eq. $\sigma_\mu = q\sigma_\lambda$

少なく、区別するのが困難なので、数値実験値には h との対応は指示されていない。実線は h に依存しない。近似解と数値実験値の対応は非常によいとはいえないが、おおむね解は妥当な値を与える。試みに、数値実験値が次のような簡単な関係、

$$\sigma_\mu = q\sigma_\lambda \dots\dots\dots (41)$$

にあるものとし、前の場合と同様な手法に従って q の値を求めてみた。ただし、 q は減衰の型と h には依存せず、 ξ にだけよるものとした。その結果が Fig. 24 に黒丸で示されている。 q は ξ に対して直線状に増加するので、

$$q = r\xi + s \dots\dots\dots (42)$$

と書き表し、同様にパラメータの値を決定すると、

$$r = 1.72, \quad s = 0.429 \dots\dots\dots (43)$$

となった。これが同図の実線である。実用的には (41) ~ (43) 式を $\sigma_\mu - \sigma_\lambda$ 関係を表す近似式としてもよい。なお、文献 1) によれば、 $h=0$ の場合、 $r=2.14$, $s=0.406$ である。これと (41) ~ (43) 式によるものとは、 $0.025 \leq \xi \leq 0.1$ の範囲で約 3% 以下の相対誤差で一致する。(32) 式によると、 ξ にかかわらず、 $q \approx 0.511$ である。これが点線で示されている。 ξ は q に対してあまり強いパラメータではないので、この一定値を q の値と考えても大きな誤りはない。

以上のように近似解と数値実験値は多くの場合よく一致するが、そうともいえない場合もある。そこで、以下に近似解に含まれる問題点を要約し、より詳細な分析は将来の課題として残すこととする。

1) 非減衰の場合¹⁾と同様に、 σ_h の近似解は ξ の小さいところで数値実験値よりやや小さく、 ξ の大きいところでやや大きい値を与える。その理由は必ずしも明らかでないが、 σ_h の解の精度が他の多くの量を直接支配するので、その解を理論的に改良することが望まれる。

2) 実際にはピークファクターに相当する a および p の値をこのように単純に扱うことはできない。数値実験値で具体的にこの値がどのようになっているかをより詳細に分析する必要がある。

3) σ_σ を評価するときに、速度振幅 A がレーリー分布をもち、半周期ごとの減衰エネルギーが互いに独立であると仮定したが、これが実際にどの程度適切であるかをより詳細に検討する必要がある。非線形減衰の場合に σ_σ の表現が、とくに h が大きいところであり適切でない理由もこれに関連して分析すべきである。

4) 一般に平均値の解はよい精度をもち問題が少ないが、とくに非線形減衰の場合におけるいくつかの分散の表現には改良の余地がある。

8. 要約と結び

粘性減衰をもつ完全弾塑性型のバイリニア履歴特性をもつ 1 自由度系に、ホワイトノイズが地動加速度として作用した場合の非線形ランダム応答を論じた。粘性減衰としては弾性剛性比例型と瞬間剛性比例型の 2 種類を想定した。変位、速度、塑性率、累積塑性率および減衰エネルギーの期待値と分散の解析的表現を近似的に求めた。近似解は数値実験値と大体においてよく一致した。ただし、解を求めるときに導入された仮定にはより詳細に分析する必要があるものがある。それに関連してとくにいくつかの分散の表現には改良の余地がある。塑性率と累積塑性率の関係を一層実用的な形でとりまとめた。応答は一般に減衰定数の値に強く影響されるが、減衰の型にはあまり依存しない。

謝 辞

この論文を作成するのに必要な電算機による計算は、大和総合研究所の弘中秀之氏（当時筑波大学学生）に負う。ここに記して感謝する。

参考文献

- 1) 松島 豊：バイリニア型履歴をもつ 1 自由度系のランダム応答，日本建築学会構造系論文報告集，第 420 号，pp. 101~110，1991. 2.
- 2) Rosenblueth, E. and Bustamante, J. I. : Distribution of Structural Response to Earthquakes, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, EM 3, pp. 75~106, 1962. 6.

(1991 年 10 月 28 日原稿受理，1992 年 4 月 2 日採用決定)