単杭の鉛直・水平振動特性の一簡易評価法

A SIMPLIFIED ESTIMATION FOR CHARACTERISTICS OF SINGLE PILES UNDER VERTICAL AND HORIZONTAL VIBRATIONS

野添久視*, 日下部 馨**, 福住忠裕***

Hisashi NOZOE, Kaoru KUSAKABE and Tadahiro FUKUSUMI

For single piles under vertical and horizontal vibrations, dynamic Winkler stiffnesses of subgrade reaction on pile circumference and at pile tip are proposed as simple expressions. A simplified estimation for vibrational characteristics of impedances and receptances at pile head presented by solving equations of motion of the pile as rod and Timoshenko's beam and by introducing the proposed subgrade reactions. It is verified that this method is sufficiently accurate in the practical situation from comparison with the rigorous and other solutions and this application to a building supported on piles in a case history is readily useful.

Keywords : simplified estimation, impedance, receptance, soil-pile interaction, vertical vibration, horizontal vibration

簡易評価法, インピーダンス, 伝達関数, 杭と地盤の相互作用, 鉛直振動, 水平振動

1. 序 論

軟弱な地盤上に建設される杭基礎で支持された構造物の地震時の挙動を把握する上で、杭-地盤系における杭頭での複素剛性（インピーダンス）および地盤入力による杭頭の応答（伝達関数）が構造物との連成時に重要な役割を演じるため、近年、動的相互作用を考慮した杭-地盤系のこれらの動的特性に関して数多くの研究が報告されている。解析パラメータが数多く含まれ複雑な構造物-杭-地盤系の動的相互作用問題において、さまざまな動的特性の評価を精度よく得るには一般に膨大な演算時間と経費が伴うので、系統的な洞察を要する耐震設計等において基本的な動的特性をより簡便に把握できる実用的評価法が切望されている。本論文では杭-地盤系の弾性解析に立脚し、杭先端が基盤に固定された杭を支持杭（end bearing pile）、杭先端が可動する杭を浮杭（floating pile）と称し、振動数領域における相互作用問題を取扱う。

既往の杭-地盤系の解析的研究において、その解析結果から得られる動的特性の表現として、図表や数表によるものが一般に多く見られるが、ここでは構造物との連成時に必要な杭頭での動的特性を簡便に得られる実用的な評価法に関する研究に注目して取り上げる。杭頭でのインピーダンス（またはコンプライアンス）、伝達関数

などの動的特性の簡便な評価法として、1) Winkler タイプ評価法、2) 統計的評価法の2つに大別してとらえる。

1) Winkler タイプ評価法は、Terzaghi の先駆的な研究¹⁾に見られるように、杭周に作用する地盤反力（相互作用力）をその作用点にのみ依存する地盤反力係数（ウィングラバね）と変位の積で表現できるとする Winkler の概念（1867）に基づく力学的モデルの近似解法から得られる評価法で、古くから静的問題において弾性支承梁の曲げ理論として展開し、地盤反力係数の評価の問題として取り上げられてきた。実験的研究から地盤反力係数の実用的な経験式が種々提案されており、この評価法は現在では取扱いの簡便さから、無限長の杭を対象とした Chang や杭頭・杭先端の境界条件を考慮した杉村²⁾などの理論解を適用して実施設計^{3), 4)}にも取り入れられている。杭周の横（水平）方向地盤反力係数の半解析的な簡易式としては、地表面上の無限長梁の柔性を考慮した Vesić による評価値を2倍し柔で長い杭に適用可能にした Francis⁵⁾の研究がある。半無限地盤中の浮杭の弾性解析に関して、軸方向荷重を受ける浮杭では、Butterfield ら⁶⁾が杭周に作用するせん断応力（鉛直方向地盤反力）分布について、横方向荷重を受ける浮杭では、Banerjee ら⁷⁾が杭周の横方向地盤反力分布について触れているが、横方向地盤反力係数の簡易評価としては、

* 広島工業大学工学部建築学科

** 神戸大学工学部建築学科

*** 神戸大学工学部建築学科

Dept. of Architecture, Faculty of Engineering, Hiroshima Institute of Technology

Dept. of Architecture, Faculty of Engineering, Kobe Univ.

Dept. of Architecture, Faculty of Engineering, Kobe Univ.

Poulos⁸⁾が弾性支承梁理論の結果と比較検討し、剛な浮杭に対する簡易式の1例を示している程度である。その後、杭周の鉛直方向地盤反力係数の簡便な評価法がRandolphら⁹⁾によって静的平面ひずみ解から杭の長さ径比と地盤のポアソン比を取り入れた簡易式として提案されているが、柔で長い杭に対して問題が残されている。このように杭周における鉛直方向および水平方向の地盤反力係数に杭の長さ径比や杭の柔性などを考慮した簡便な評価法に関して十分ではない。

一方、動的問題において、Penzienら¹⁰⁾は水平振動する支持杭に対して地盤反力をMindlin解による静的ウィンクラバネとして集中質量系モデルに取り入れている。Novakは水平振動または鉛直振動する支持杭¹¹⁾に対してBranovの動的平面ひずみ解による動的ウィンクラバネを適用し、さらに杭先端には半無限弾性地盤上の剛円盤に対するBycroftの動的解による複素バネを取り入れて鉛直振動する浮杭¹²⁾にも適用している。また、水平振動する多層地盤中の支持杭の杭頭加振および地動入力に関して、Takemiyaら¹³⁾は動的平面ひずみ解による動的ウィンクラバネによる結果の有用性を述べている。しかし、杭周の動的ウィンクラバネの簡便な評価法において、静的ウィンクラバネ系では高振動数領域での適用性に問題が残されており、また、静的剛性が零となる動的平面ひずみ解による動的ウィンクラバネ¹⁴⁾の低振動数領域での評価において、Novakら¹⁵⁾はより厳密な解析結果による数表または図表から得られる静的剛性で補正する提案を行っているものの十分とは言えない。

2) 統計的評価法は無限要素法による系統的な解析結果から得られた杭頭での振動特性を主要な解析パラメータの回帰式として統計的に直接処理する評価法で、一樣地盤中の水平振動する杭に関して、Kuhlemeyer¹⁶⁾は杭先端の支持条件に影響されない長い杭の杭頭でのコンプライアンスに対して、静的特性を杭と地盤のヤング係数比のべき関数で、振動特性を無次元振動数の多項式で評価し、Dobryら¹⁷⁾は長い杭の杭頭インピーダンスを同様な回帰式で表現し、地盤反力係数も同様に取扱っている。水平振動する支持杭の応答に関して、Gazetas¹⁸⁾は3種類の層状地盤に対する杭頭インピーダンスを柔な杭と地盤のヤング係数のべき関数で表される静的特性で規準化し、杭頭での伝達関数を無次元振動数、杭と地盤のヤング係数比のべき関数および杭の長さ径比のべき関数の積として評価しており、地震観測された建物の応答と比較し評価式の有用性を示している。これらの評価法は水平振動する長い（または柔な）杭に対して有用で実用的ではあるが、使用した解析の数値結果および解析パラメータの範囲に左右される傾向にあり、より多くの解析パラメータに依存する短い（または剛な）浮杭や鉛直（またはロッキング）振動する杭の振動特性の評価にも至って

いない。

本論文は、文献19)および20), 21)の一部を整理し、さらに詳細な検討を加えたものである。ここでは、基盤上の粘弾性表層地盤中に設置された単杭の鉛直・水平振動において、杭-地盤系の基本的な振動特性を簡便に評価する目的から、多くの解析パラメータを容易に導入できるWinklerタイプ評価法を用いる。この評価法においては、動的ウィンクラバネの簡便な評価が重要な課題となる。これを解決するために本論文では、3次元全無限弾性体の内部点加振解である簡便な動的Kelvin解を用い、低振動数領域にも適用でき、地盤の材料特性および杭長さ径比に依存する動的ウィンクラバネを誘導し、その評価式が杭と地盤の剛性比に依存する有効杭長・層厚の概念を導入した簡便な表現で提案される。さらに、提案する動的ウィンクラバネを用い、杭のせん断変形を考慮した杭の運動方程式を解くことにより、杭-地盤系の振動特性を簡易に評価できる手法を示す。広範囲のパラメトリックスタディから、弾性波動論に基づく浮杭-地盤系の厳密解および他の解析結果との比較によって、提案する簡易評価法の精度を検証し、地震観測されたある杭基礎建物に本簡易評価法を適用しその有用性について述べる。

2. 解析モデルとパラメトリックスタディ

ここで取扱う杭-地盤系の解析モデルは、Fig.1に示すように浮杭と基盤上にある表層地盤からなる。表層地盤は履歴型の内部減衰を有する均質等方の3次元粘弾性連続体とし、周辺地盤と杭下部に位置する杭と同径の土柱に分けて考える。杭を1次元弾性棒またはせん断変形を考慮したTimoshenko梁として取扱う。鉛直・水平調和外乱として杭頭加振力および基盤入力地動を想定する。

杭は地盤と完全に密着して振動するものとして、その

Fig.1 Model of a soil-pile system

運動方程式および構成式は、 z (鉛直)方向と x (水平)方向の絶対変位 W_P , U_P および回転角 R_P によって次式のように表現される。時間因子 $e^{i\omega t}$ は便宜上省略すれば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_P}{dz} - p_v &= -\rho_P A_P \omega^2 W_P; \quad \frac{N_P}{E_P A_P} = \frac{dW_P}{dz} \\ \frac{dQ_P}{dz} - p_H &= -\rho_P A_P \omega^2 U_P; \quad \frac{Q_P}{\kappa G_P A_P} = \frac{dU_P}{dz} + R_P \\ \frac{dM_P}{dz} - Q_P - r_0 p_M &= -\rho_P I_P \omega^2 R_P; \quad \frac{M_P}{E_P I_P} = \frac{dR_P}{dz} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 i =虚数単位、 ω =円振動数、 r_0 =杭の半径、 ρ_P =杭の密度、 E_P =杭のヤング係数、 G_P =杭のせん断弾性係数、 κ =杭のせん断に対する形状係数、 A_P =杭の断面積、 I_P =杭の断面2次モーメントで、 N_P , Q_P , M_P はそれぞれ杭の軸方向力、せん断力、曲げモーメントである。杭周には地盤の鉛直方向反力 p_v 、水平方向反力 p_H 、回転反力 p_M が作用し、杭頭には N_{PL} , Q_{PL} , M_{PL} の振幅で加振され、基盤入力変位振幅として W_G , U_G を想定している。また杭先端には土柱の反力として N_B , Q_B , M_B が作用することになる。

この解析モデルに対して著者らは既に、有限フーリエ・ハンケル変換法を用いて(1)式の厳密解を定式化し、積分方程式を用いずに複素連立1次方程式によって混合境界値問題を処理し、地盤の鉛直振動と水平振動の連成による一般化されたレイリー波の効果を含んだ解を得ている^{22), 23)}。その解は、積分方程式によって混合境界値問題を処理した支持杭に対する厳密解^{24), 25)}と比較してその有効性を確認している。

杭基礎で支持された構造物の地震時における応答を求める問題を、構造物の慣性力による相互作用(inertial interaction)問題と杭基礎の地動拘束による相互作用(kinematic interaction)問題に分けて考えることができ、前者は杭頭インピーダンスを、後者は伝達関数を求める問題に相当している。つまり、構造物との連成時に重要な役割を演じる地動入力のない杭頭でのインピーダンス $[K]$ および基礎入力地動による自由な杭頭での伝達関数 $[S]$ は次式によって定義される。

$$\begin{Bmatrix} N_{PL} \\ Q_{PL} \\ M_{PL} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{vv} & 0 & 0 \\ 0 & K_{HH} & K_{HR} \\ 0 & K_{RH} & K_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{PL} \\ U_{PL} \\ R_{PL} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

$$\begin{Bmatrix} W_{PL} \\ U_{PL} \\ R_{PL} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{vG} & 0 \\ 0 & S_{HG} \\ 0 & S_{RG} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_G \\ U_G \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (3a)$$

$$= \begin{bmatrix} S_{vF} & 0 \\ 0 & S_{HF} \\ 0 & S_{RF} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_F \\ U_F \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (3b)$$

ここで、相反定理から連成項 $K_{HR}=K_{RH}$ となり、 W_{PL} , U_{PL} , R_{PL} は杭頭での絶対変位と回転角である。また、(3b)式で示すように、杭の存在しない表層自由地盤の地表面での絶対変位応答 W_F , U_F に対しても表現できる。 $[K]$, $[S]$ などの関数は次のように10個の解析パラメータで構成される。

$$K \text{ or } S = F \left(\frac{L_P}{r_0}, \frac{L_S}{r_0}, \frac{V_P}{V_H}, \frac{A_P}{\pi r_0^2}, \frac{I_P}{\pi r_0^4}, \frac{E_P}{\kappa G_P}, \frac{\rho_P}{\rho}, \frac{V_V}{V_H}, \xi, b_1 \right) \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 L_P =杭長、 L_S =土柱長、層厚 $H=L_P+L_S$ で、杭の縦波速度 $V_P=\sqrt{E_P/\rho_P}$ 、地盤の横波速度 $V_H=\sqrt{\mu/\rho}$ 、地盤の縦波と横波の速度比 $V_V/V_H=\sqrt{2(1-\nu_s)/(1-2\nu_s)}$ であり、 μ , ρ , ν_s はそれぞれ地盤のせん断弾性係数、密度、ポアソン比である。地盤の履歴減衰比 ξ はLaméの定数の複素表現 $\mu^*=\mu(1+2i\xi)$, $\lambda^*=\lambda(1+2i\xi)$ で定義され、無次元振動数 $b_1=\omega/\omega_m$ (または層厚に関係しない $a_1=b_1 r_0/H$)で、表層地盤の基本振動数 $\omega_m=\pi V_H/(2H)$ で無次元化される。

提案する簡易評価法の精度を検証するために、厳密解によるパラメトリックスタディを行う。解析パラメータの範囲として、表層地盤では軟弱土層を想定し、縦波と横波の速度比 $V_V/V_H=2.0\sim 5.0$ ($\nu_s=1/3\sim 0.479$)で、一般的な $V_V/V_H=2.5$ ($\nu_s=0.405$)および履歴減衰比 $\xi=0.05$ を主として用いている。一方、杭では中実な円形断面の場所打コンクリート杭を想定し、ポアソン比 $\nu_P=1/6$ 、形状係数 $\kappa=6(1+\nu_P)/(7+6\nu_P)$ ²⁶⁾、ヤング係数 $E_P=2.1\times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ とし、密度比を一般的な $\rho_P/\rho=4/3$ とする。杭と地盤の剛性比 E_P/μ を反映する杭と地盤の速度比を $V_P/V_H=7.5\sim 960$ とし、通常の表層地盤剛性を網羅している。杭長さ径比 $L_P/r_0=10\sim 80$ 、杭長と層厚の比 $L_P/H=1\sim 1/3$ (または土柱長さ径比 $L_S/r_0=0\sim 80$)の範囲を考える。

厳密解の数値解析では、有限フーリエ・ハンケル逆変換形としての級数解の項数を鉛直振動では25項、水平振動では35項までとった結果を示す。この数値解析結果は鉛直、水平振動共に数%程度の誤差内で収束することを確認している。

3. 杭-地盤系の近似解析

3.1 動的 Winkler モデルと解析仮定

表層地盤の変位解は、入反射場(上付添字I)である基盤入力地動による杭の存在しない自由地盤の変位と散乱場(上付添字S)である杭周、杭先端地盤の加振による変位の和として表現することができる。つまり、

$$W=W'+W^S, U=U'+U^S, R=R'+R^S \dots\dots\dots (5)$$

杭周および杭先端(下付添字B)に作用する地盤反力

も変位と同様にそれぞれ重ね合わせて、次のように表現できる。

$$\left. \begin{aligned} p_v &= p_v' + p_v^s, \quad p_h = p_h' + p_h^s, \quad p_m = p_m' + p_m^s \\ N_b &= N_b' + N_b^s, \quad Q_b = Q_b' + Q_b^s, \quad M_b = M_b' + M_b^s \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

入反射場における絶対変位、回転角は次式のようになり、

$$\left. \begin{aligned} W' &= W_F \cos \kappa_v^* (H-z); \quad W_F = W_c / \cos(\kappa_v^* H) \\ U' &= U_F \cos \kappa_h^* (H-z); \quad U_F = U_c / \cos(\kappa_h^* H) \\ R' &\equiv 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

また、杭周および杭先端に作用する地盤反力は、杭部分を地盤に置換した1次元土柱の運動方程式(1)から容易に求めることができ、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} p_v' &\equiv 0, \quad p_h' \equiv 0, \quad p_m' = -Q'/r_0, \quad M_b' \equiv 0 \\ N_b' &= E_v A_s \frac{dW'}{dz}, \quad Q_b' = G_s A_s \frac{dU'}{dz}; \quad z = L_s \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 $E_v = \lambda^* + 2\mu^*$, $G_s = \mu^*$, $A_s = \pi r_0^2$ で、波数 $\kappa_v^* = \omega \sqrt{\rho/E_v}$, $\kappa_h^* = \omega \sqrt{\rho/G_s}$ である。

しかし、散乱場における杭周および杭先端に作用する地盤反力を、厳密な解析では杭と地盤の複雑な動的相互作用により簡単な形で表現することができない。そこで、簡便な評価を行うために、地盤を Winkler タイプの粘弾性体モデルとして仮定する。つまり、杭周および杭先端に作用する地盤反力は、それぞれ杭周および杭先端地盤の動的ウインクラばねを用いて次のように定義される。

$$\left. \begin{aligned} p_v^s &= K_{cv}^* W^s; \quad N_b^s = K_{bv}^* W_b^s \\ p_h^s &= K_{ch}^* U^s; \quad Q_b^s = K_{bh}^* U_b^s \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここに、添字を $v=V$, H とおき、複素ばね剛性を $K_{cv}^* = K_{cv}(1+2i\xi)$, $K_{bv}^* = K_{bv}(1+2i\xi)$ で近似し、 K_{cv} , K_{bv} は弾性体の動的ウインクラばね剛性とする。

さらに、近似解析において、次の仮定を設ける。

- 1) $L_P/r_0 \geq 20$ の杭においては、杭頭インピーダンスに及ぼす杭周地盤の回転反力の影響は比較的小さく²¹⁾、また浮杭先端はヒンジの状態に近いので、 $p_m^s=0$, $M_b^s=0$ として無視する。ただし、 $p_m' \neq 0$ は取り入れる。
- 2) ここで取扱う振動数範囲において杭の回転慣性力による影響は小さいので、これを考慮しない。
- 3) 杭周地盤の動的ウインクラばねは深さ方向に関して一定とする。
- 4) 支持杭先端の境界条件³⁾は、良質な支持層に杭の直径程度の根入れがあるとしてピン支持とする。

3.2 杭頭インピーダンスおよび伝達関数

杭周地盤と杭との変位の連続条件： $W_P = W$, $U_P = U$, $R_P = R$ および前節の(5)~(9)式を考慮して杭の運動方程式(1)を解くことにより、杭の変位および応力が得られる。解析パラメータを次のように表現すること

にする。

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{K_{cv}^*}{E_P A_P}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{K_{ch}^*}{4 E_P I_P}}, \quad \zeta = \lambda_h^2 \frac{E_P I_P}{\kappa G_P A_P}, \\ \eta_v &= \lambda_v \frac{E_P A_P}{K_{bv}^*}, \quad \eta_h = 2 \lambda_h^3 \frac{E_P I_P}{K_{bh}^*} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに、波数を $\kappa_P = \omega/V_P$, $\kappa_b = \sqrt{\kappa_P^2 A_P/I_P}$ とおけば、杭の特性パラメータが次のように決定される。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_v &= \alpha \sqrt{1 - \kappa_P^2 / \alpha^2}; \quad \text{Re}(\lambda_v) \geq 0 \\ \lambda_h &= \beta \sqrt{1 - \kappa_b^2 / (4\beta^2)}; \quad \text{Re}(\lambda_h) \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

したがって、杭頭インピーダンスは次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} K_{vv} &= \lambda_v E_P A_P \cdot \frac{D_{vv}}{D_{vk}}, \quad K_{hh} = 4 \lambda_h^3 E_P I_P \cdot \frac{D_{hh}}{D_{hk}} \\ K_{hr} &= 2 \lambda_h^2 E_P I_P \cdot \frac{D_{hr}}{D_{hk}}, \quad K_{rr} = 2 \lambda_h E_P I_P \cdot \frac{D_{rr}}{D_{hk}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 $\lambda_1 = \lambda_h \sqrt{1+\zeta}$, $\lambda_2 = \lambda_h \sqrt{1-\zeta}$ として、 $C_h = \cosh(2\lambda_1 L_P)$, $S_h = \sinh(2\lambda_1 L_P)/\sqrt{1+\zeta}$, $C_0 = \cos(2\lambda_2 L_P)$, $S_i = \sin(2\lambda_2 L_P)/\sqrt{1-\zeta}$ とおけば、

$$\left. \begin{aligned} D_{vv} &= 1 + \eta_v \tanh(\lambda_v L_P) \\ D_{vk} &= \eta_v + \tanh(\lambda_v L_P) \\ D_{hh} &= [C_h + C_0] + \eta_h [S_h + S_i] \\ D_{hr} &= [S_h + S_i] + \eta_h \left[\frac{C_h}{1+\zeta} - \frac{C_0}{1-\zeta} + \frac{2\zeta}{1-\zeta^2} \right] \\ D_{rr} &= [C_h - C_0] + \eta_h [S_h - S_i] \\ D_{hk} &= [(1+2\zeta)S_h - (1-2\zeta)S_i] \\ &\quad + \eta_h \left[\frac{1+2\zeta}{1+\zeta} C_h + \frac{1-2\zeta}{1-\zeta} C_0 + \frac{2}{1-\zeta^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

支持杭の場合には $\eta_v, \eta_h \rightarrow 0$ とおくことにより得られる。また、杭のせん断変形が無視できる場合には $\zeta \rightarrow 0$ とすればよく、一般に行われている弾性支承梁の曲げ理論解に相当する結果が得られる。

さらに、杭の特性パラメータ $\lambda_v L_P$, $\lambda_h L_P$ に関して(13)式を関数近似することにより、杭頭インピーダンスが次のような簡易な形で表現される。

1) 剛短杭

[浮杭： $|\lambda_v L_P| \leq 0.3$, $|\lambda_h L_P| \leq 0.5$]

$$\left. \begin{aligned} K_{vv} &= K_{bv}^* + K_{dv}^*, \quad K_{hh} = K_{bh}^* + K_{dh}^* \\ K_{hr} &= \left(K_{bh}^* + \frac{1}{2} K_{dh}^* \right) L_P, \quad K_{rr} = \left(K_{bh}^* + \frac{1}{3} K_{dh}^* \right) L_P^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (14a)$$

[支持杭： $|\lambda_v L_P|, |\lambda_h L_P| \leq 1$]

$$\left. \begin{aligned} K_{vv} &= K_{pv} + \frac{1}{3} K_{dv}^*, \quad K_{hh} = K_{ph} + \frac{1}{2} K_{dh}^* \\ K_{hr} &= \left(K_{ph} + \frac{1}{10} K_{dh}^* \right) L_P, \quad K_{rr} = \left(K_{ph} + \frac{1}{30} K_{dh}^* \right) L_P^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (14b)$$

ここに、 $K_{pv} = E_P A_P / L_P$, $K_{ph} = 3 E_P I_P / L_P^3$ は地盤の存在

しない自立杭の杭頭インピーダンスである。 $K_{dv}^*=(K_{cv}^*-\rho_p A_p \omega^2)L_p$, $K_{dh}^*=(K_{ch}^*-\rho_p A_p \omega^2)L_p$ は総杭周動的ばね剛性で、杭頭インピーダンスへのその寄与は浮杭に比べ支持杭ではかなり小さくなっている。

2) 柔長杭

[浮杭, 支持杭: $Re(\lambda_v L_p), Re(\lambda_h L_p) \geq 3$]

$$\left. \begin{aligned} K_{vv} &= \lambda_v E_p A_p, K_{hh} = \frac{4}{1+2\xi} \lambda_h^3 E_p I_p \\ K_{hr} &= \frac{2}{1+2\xi} \lambda_h^2 E_p I_p, K_{rr} = \frac{2}{1+2\xi} \lambda_h E_p I_p \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

静的問題では、杭の特性パラメータは $\xi=0$ とすれば、

$$\alpha_0 = \sqrt{K_{cv}/(E_p A_p)}, \beta_0 = \sqrt[3]{K_{ch}/(4 E_p I_p)} \dots\dots\dots (16)$$

になり、文献3)に示されるものに対応する。また、柔長杭 (long-flexible pile) は杭の水平抵抗に関して慣用として分類されている「長い杭」($\beta_0 L_p \geq 3$)^{2), 3)}に相当するが、(15)式はさらに鉛直問題および杭のせん断変形を考慮した動的表現になっている。この杭の限界長さを次のように定義する。

$$L_c = 3/\alpha_0 \text{ または } L_c = 3/\beta_0 \dots\dots\dots (17)$$

この限界長さより短いものが杭の水平抵抗に関して慣用として分類されている「短い杭」であるが、剛短杭 (short-rigid pile) および剛短杭と柔長杭の間にある中間杭 (intermediate pile) がこれに相当している。このように杭の特性を3種に分類してとらえることができ、 $\alpha_0 L_p$, $\beta_0 L_p$ が杭の挙動を把握する上で重要な特性パラメータとなる。

一方、自由な杭頭での伝達関数は、(3b)式の表現で示せば次のように得られる。

$$\begin{aligned} S_{vf} &= a_v + \frac{1}{D_{vs}} b_v T_{bv} \\ \begin{Bmatrix} S_{hf} \\ S_{rf} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} a_h \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{1}{D_{hs}} \begin{bmatrix} D_{h1} & D_{h2} & D_{h3} \\ D_{r1} & D_{r2} & D_{r3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_r \\ b_h T_{bh} \\ b_r T_{bh} \end{Bmatrix} \end{aligned} \dots\dots\dots (18)$$

ここに、

$$\begin{aligned} a_v &= \frac{\alpha^2}{\lambda_v^2 + \alpha^2} \\ a_h &= \frac{1}{D_{h0}} \left[4\beta^4 \left(1 + \xi \frac{\alpha_h^{*2}}{\lambda_h^2} \right) - \alpha_h^{*2} \frac{G_s A_s}{E_p I_p} \right] \\ a_r &= -\frac{1}{D_{h0}} \left[4\beta^4 - (\alpha_h^{*2} + 4\xi \lambda_h^2) \frac{G_s A_s}{E_p I_p} \right] \\ D_{h0} &= 4\lambda_h^4 + 4\xi \lambda_h^2 \alpha_h^{*2} + \alpha_h^{*4} \\ b_v &= 1 - a_v + \frac{\eta_v}{\lambda_v} \left(a_v - \frac{E_v A_s}{E_p A_p} \right) \alpha_v^* \tan(\alpha_v^* L_p) \\ b_h &= 1 - a_h - \frac{\eta_h}{2\lambda_h^3} a_r \alpha_h^{*3} \tan(\alpha_h^* L_p) \\ b_r &= -\frac{1}{2\lambda_h^2} a_r \alpha_h^{*2} \end{aligned}$$

$$T_{bv} = \frac{\cos(\alpha_v^* L_p)}{\cosh(\lambda_v L_p)},$$

$$T_{bh} = \frac{\cos(\alpha_h^* L_p)}{2 \cosh(\lambda_1 L_p) \cos(\lambda_2 L_p)}$$

$$D_{vs} = D_{vv}$$

$$D_{hs} = [S_h - S_d] + \eta_h \left[\frac{C_h}{1+\xi} + \frac{C_0}{1-\xi} - \frac{2}{1-\xi^2} \right]$$

$$D_{h1} = D_{hr}$$

$$D_{h2} = S_h(C_0+1) - S_d(C_h+1)$$

$$D_{h3} = -[S_h(C_0+1) + S_d(C_h+1) + 2\eta_h S_h S_d]$$

$$D_{r1} = -2\lambda_h D_{hh}$$

$$D_{r2} = 2\lambda_h S_h S_d$$

$$D_{r3} = 2\lambda_h [(C_h+1)(C_0+1) + \xi S_h S_d]$$

$$+ \eta_h [S_h(C_0+1) + S_d(C_h+1)] \dots\dots\dots (19)$$

ここに、 a_v , a_h , a_r は $K_{cv}^* W^I$, $K_{ch}^* U^I$, p_m^I による特殊解で、 b_v , b_h , b_r の項は杭頭と杭先端の境界条件を満たす余解である。剛短杭では杭先端の影響により余解の項による効果が現れるが、柔長杭では杭先端からの影響(係数 T_{bv} , T_{bh}) が小さくなるため、次のような簡単な形で表現でき、杭長、層厚に依存しなくなる。

$$S_{vf} = a_v, S_{hf} = a_h + b_r, S_{rf} = -2\lambda_1 b_r \dots\dots\dots (20)$$

4. 動的ウインクラばねの簡易評価

4.1 杭先端地盤のウインクラばね

杭先端地盤の静的なウインクラばねは、剛基礎にある表層地盤地表面の剛円形基礎に対する Kausel の静的ばね剛性の半解析式²⁷⁾を参考にして、杭周地盤反力の影響による低減効果を考慮した補正(鉛直: 5/8 倍, 水平: 6/8 倍程度)を行った次式によって簡易評価される。

$$[L_s/\tau_0 \geq 5, L_p/\tau_0 \geq 10]$$

$$K_{bv} = \frac{2.56 \mu \tau_0}{1 - \nu_s} \left(1 + \frac{2\tau_0}{L_s} \right), K_{bh} = \frac{6 \mu \tau_0}{2 - \nu_s} \dots\dots\dots (21)$$

提案する簡易式(21)の精度を検証するために、剛短杭における L_s と ν_s に対して、厳密解 (K_{bv} ; $b_1=0.5$, $V_p/V_h=60$, $L_p/\tau_0=10, 20$, K_{bh} ; $b_1=0.2$, $V_p/V_h=960$, $L_p/\tau_0=10$) による剛性および Butterfield ら⁶⁾の静的解 ($V_p \rightarrow \infty$, $L_p/\tau_0=10, 20$) から得られる剛性との比較を Fig. 2 に示す。この図から、(21)式の評価は K_{bv} , K_{bh} 共に 10% 程度の誤差を有しているが、 $N_b/N_{pl}=0.18$ ($L_p/\tau_0=10$), 0.12 ($L_p/\tau_0=20$), $Q_b/Q_{pl}=0.19$ ($U_{pl}=0$), 0.09 ($R_{pl}=0$) を考慮すれば、杭頭インピーダンスへのその誤差による影響はわずかである。

杭先端地盤の動的なウインクラばねにおいて、ここで取扱う振動数範囲では、その実部で表される剛性はあまり振動数に依存せずほぼ一定値で、虚部で表される減衰は振動数に比例する逸散減衰を示す傾向にあるが²⁸⁾、杭頭インピーダンスの簡便な評価において、杭先端地盤反力の及ぼす影響は比較的小さいので、ここでは杭先端地

Fig. 2 Comparison of stiffnesses at pile tip by proposed method with those by rigorous and other solutions in static case

盤の動的ウインクラバねを静的ウインクラバねで評価することにする。

4.2 杭周地盤のウインクラバね

杭周地盤の動的なウインクラバねの評価は杭頭インピーダンスに大きな影響を及ぼす重要な因子であり、物理的に評価することにする。鉛直・水平振動において、動的 Kelvin 解に鏡像の方法²⁹⁾を適用し、半無限弾性体の内部点加振の近似解として応用する。半無限地盤中の仮想的な浮杭の軸 ($r=0$) に沿って、Fig. 3 に示すように、三角形分布 (杭頭で 1, 杭先端で 0 となる直線分布) と一様分布する 2 種類の分布加振力を仮定し、鉛直・水平方向の動的ウインクラバねを杭周 ($r=r_0$) において次式で定義する。

$$\left. \begin{aligned} K_{CV} &= 2\pi r_0 k_V; k_V = -\tau/W \\ K_{CH} &= \pi r_0 k_H; k_H = -\sigma/U \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

ここに、 τ, σ は z, x 方向杭周表面力である。 k_H を誘導するにあたり、分布加振解²¹⁾に動的平面ひずみ解を重

ね合わせることで、杭周地盤の円形保持の仮定を地表面付近で近似的に満足させ、さらに一様分布加振では杭先端に点加振力を作用させることにより解の改善を図っている。三角形分布加振解 (下付添字 1) および一様分布加振解 (下付添字 2) の 1 例を無次元振動数 a_0 ($=\frac{\pi}{2} a_1$) = 0.01, 0.5 に対して Fig. 3 に示す。ここに、 $U=(u-v)/2$, $V=(u+v)/2$ で、 u, v は Fig. 1 で定義された r, θ 方向の地盤変位であり、地表面での杭周表面力 $\tau_{0\nu}, \sigma_{0\nu}$ ($\nu=1, 2$) で規準化している。この図から、杭周の動的ウインクラバね係数 k_V, k_H は、杭長に沿って変化するもののほぼ一様に分布し、地表面での値が代表的な値を示しており、 $a_0=0.5$ といった高振動数では動的平面ひずみ解による結果¹⁴⁾によく一致している。そこで、杭周地盤の動的ウインクラバねを深さ方向に関して一定値とし、その値を地表面での値で評価することにする。

分布加振解の地表面での値は、 $L_P/r_0 \geq 10$ に対する関数近似を行うことによって、次のように簡易表現される。

1) 三角形分布加振解

[低域近似: $a_P \leq 2$]

$$\left. \begin{aligned} \frac{W_1}{A_1 r_0} &= -\left[\ln\left(\frac{2L_P}{r_0}\right) - \frac{1}{4(1-\nu_s)} - 1 \right] \\ &\quad + \frac{1}{24} a_P^2 + \frac{1}{3} i a_P \left(1 - \frac{1}{60} a_P^2\right) \\ \frac{U_1}{B_1 r_0} &= -\frac{3-4\nu_s}{8(1-\nu_s)} \left[\ln\left(\frac{2L_P}{r_0}\right) + \frac{1}{2(3-4\nu_s)} - 1 \right] \\ &\quad + \frac{1}{32} a_P^2 \left(1 - \frac{1}{36} a_P^2\right) + \frac{1}{6} i a_P \left(1 - \frac{1}{30} a_P^2\right) \\ \frac{\tau_1}{A_1 \mu} &= 1 - \frac{3-2\nu_s}{2(1-\nu_s)} \cdot \frac{r_0}{L_P} \\ \frac{\sigma_1}{B_1 \mu} &= 1 - \frac{3-4\nu_s}{4(1-\nu_s)} \cdot \frac{r_0}{L_P} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23a)$$

[高域近似: $a_P > 2$]

$$\left. \begin{aligned} \frac{W_1}{A_1 r_0} &= \frac{W_0}{r_0} + \frac{1}{a_P^2} \left\{ e^{-i b_P} \right. \end{aligned} \right\}$$

Fig. 3 Distribution of displacements and stresses on pile circumference by approximate solutions along depth ($V_1/V_2=2.5$, $\xi=0.05$, $L_P/r_0=40$, $L_s \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned}
& + \frac{L_P}{r_0} [(1 - ia_0)e^{-ia_0} - e^{-ib_0}] \\
\frac{U_1}{B_1 r_0} = & \frac{U_0}{r_0} + \frac{1}{4 a_P^2} \left\{ 2 e^{-ia_P} \right. \\
& \left. - \frac{L_P}{r_0} [(1 + ia_0)e^{-ia_0} - (1 - ib_0)e^{-ib_0}] \right\} \\
\frac{\tau_1}{A_1 \mu} = & \frac{\tau_0}{\mu} - \frac{r_0}{L_P} e^{-ia_0} - \frac{2}{a_P^2} \cdot \frac{L_P}{r_0} [(1 + ia_0)e^{-ia_0} \\
& - (1 + ib_0)e^{-ib_0}] \\
\frac{\sigma_1}{B_1 \mu} = & \frac{\sigma_0}{\mu} - \frac{r_0}{2 L_P} [e^{-ia_0} + e^{-ib_0}] \\
& + \frac{1}{a_P^2} \cdot \frac{L_P}{r_0} [(1 + ia_0)e^{-ia_0} \\
& - (1 + ib_0)e^{-ib_0}]
\end{aligned} \quad (23b)$$

2) 一様分布加振解

[低域近似: $a_P \leq 2$]

$$\begin{aligned}
\frac{W_2}{A_2 r_0} = & - \left[\ln \left(\frac{2 L_P}{r_0} \right) - \frac{1}{4(1 - \nu_s)} \right] \\
& + \frac{1}{8} a_P^2 + \frac{2}{3} ia_P \left(1 - \frac{1}{30} a_P^2 \right) \\
\frac{U_2}{B_2 r_0} = & - \frac{3 - 4 \nu_s}{8(1 - \nu_s)} \left[\ln \left(\frac{2 L_P}{r_0} \right) + \frac{1}{2(3 - 4 \nu_s)} \right] \\
& + \frac{3}{32} a_P^2 \left(1 - \frac{5}{108} a_P^2 \right) \\
& + \frac{1}{3} ia_P \left(1 - \frac{1}{15} a_P^2 \right) \\
\frac{\tau_2}{A_2 \mu} = & 1, \quad \frac{\sigma_2}{B_2 \mu} = 1
\end{aligned} \quad (24a)$$

[高域近似: $a_P > 2$]

$$\begin{aligned}
\frac{W_2}{A_2 r_0} = & \frac{W_0}{r_0} + \frac{1}{a_P^2} [2 e^{-ia_P} - (1 + ib_P)e^{-ib_P}] \\
\frac{U_2}{B_2 r_0} = & \frac{U_0}{r_0} + \frac{1}{2 a_P^2} [e^{-ib_P} - 2 i e^{-ia_P} \\
& - \frac{i}{a_P} \left(1 - \frac{2}{a_P} \right) [(1 + ia_P)e^{-ia_P} \\
& - (1 + ib_P)e^{-ib_P}]] \\
\frac{\tau_2}{A_2 \mu} = & \frac{\tau_0}{\mu}, \quad \frac{\sigma_2}{B_2 \mu} = \frac{\sigma_0}{\mu}
\end{aligned} \quad (24b)$$

3) 動的平面ひずみ解

$$\begin{aligned}
\frac{W_0}{r_0} = & \frac{\pi}{2} i H_0^{(2)}(a_0), \quad \frac{\tau_0}{\mu} = -\frac{\pi}{2} ia_0 H_1^{(2)}(a_0) \\
\frac{U_0}{r_0} = & \frac{\pi^2}{32} b_0^2 [H_2^{(2)}(b_0) H_0^{(2)}(a_0) \\
& + H_2^{(2)}(a_0) H_0^{(2)}(b_0)] \\
\frac{\sigma_0}{\mu} = & -\frac{\pi^2}{16} b_0^2 a_0 [H_2^{(2)}(b_0) H_1^{(2)}(a_0)
\end{aligned}$$

$$+ \frac{\kappa_H}{\kappa_V} H_2^{(2)}(a_0) H_1^{(2)}(b_0) \quad (25)$$

ここに、 A_1, A_2, B_1, B_2 は任意定数で、波数 $\kappa_H = \omega / V_H$, $\kappa_V = \omega / V_V$ で、 $a_0 = \kappa_H r_0$, $b_0 = \kappa_V r_0$, $a_P = \kappa_H L_P$, $b_P = \kappa_V L_P$ で、 $H_\nu^{(2)}$ は ν 次の第 2 種 Hankel 関数である。 $L_P \rightarrow \infty$ とすれば、(23b), (24b) 式の結果は高振動数領域において有効性のある動的平面ひずみ解 (25) 式による結果¹⁴⁾に一致することが分かる。

分布加振解による杭周地盤の静的なウィングラばね係数と厳密解および他の静的解析から得られる結果との比較を Fig. 4 に示す。厳密解による結果は、杭頭インピーダンス ($\xi = 0.05$, 鉛直振動: K_{VV} , $b_1 = 0.5$, 水平振動: K_{HH} , $b_1 = 0.2$) の剛性を用い、静的状態とした (12) 式から逆算した等価なウィングラばね係数であり、浮杭における杭先端地盤のウィングラばねには (21) 式を用いている。一方、半無限地盤中の浮杭に関する Butterfield ら⁶⁾, Banerjee ら⁷⁾, Poulos ら⁸⁾, Randolph ら⁹⁾ および柔長杭に関する Kuhlemeyer¹⁶⁾, Dobry ら¹⁷⁾, Gazetas¹⁸⁾ の解析結果から同様に $K_{BH} = 0$ として逆算したものを、 V_P / V_H ($\rho_P / \rho = 4/3$) に対して示す。柔長杭では V_P / V_H に対応した杭長として限界長さ L_c (Gazetas の結果では文献 18) による有効杭長) を用いている。

この図から、三角形分布または一様分布加振による静的ウィングラばね係数の評価には、支持杭 ($L_s = 0$) の場合または浮杭 ($L_s \neq 0$) が剛で半無限地盤中 ($L_s \rightarrow \infty$) にある場合にそれぞれよく一致する結果が見られる。三角形分布加振の場合では一様分布加振の場合より静的ウィングラばね係数が大きくなっており、これを L_s (または層厚 H) による効果として評価することができる。柔長杭において、三角形分布加振による評価が支持杭の場合の静的ウィングラばね係数を小さく見積る傾向にあるが、杭長 L_P を限界長さ L_c で評価 (L_0 評価) することにより破線で示すようによい結果が得られ、同様に柔長な浮杭の場合に対しても三角形分布加振による評価が適合することが分かる。

また、この図には鉛直問題で柔長でない杭に有効性のある Randolph らの簡易式⁹⁾ (付録 A.1) による結果を点線で示している。この簡易式は一様分布加振解による結果とよい対応を示している。

以上の考察から、鉛直・水平振動に関する表層地盤中の浮杭の場合を含む動的ウィングラばね係数の一般化された一簡易評価法として、

1) 柔長杭の支持杭的な評価:

$$\begin{aligned}
& \text{有効杭長 } L_0 = \min(L_P, L_c) \\
& \text{有効層厚 } H_0 = \min(H, L_c)
\end{aligned} \quad (26)$$

2) 支持杭および半無限地盤中の浮杭に対する分布加振解による評価の適合性:

Fig.4 Comparison of stiffness coefficients on pile circumference by proposed method with those by rigorous and other solutions in static case

$$A_1 = B_1 = L_0/H_0, \quad A_2 = B_2 = 1 - L_0/H_0 \quad \dots\dots\dots (27)$$

を導入することにより, L_p を L_0 で置換した分布加振解 (23), (24) 式の重ね合わせから物理的に得られる次式を提案する。

$[L_0/r_0 \geq 10]$

$$k_v = \frac{\tau_1 + \tau_2}{W_1 + W_2}; \quad k_h = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{U_1 + U_2} \quad \dots\dots\dots (28)$$

(28) 式による静的ウインクラばね係数の簡易評価式は, 次のように簡単な表現として得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{k_v} &= \frac{r_0}{\mu} \left[\ln \left(\frac{2L_0}{r_0} \right) - \frac{1}{4(1-\nu_s)} - \frac{L_0}{H_0} \right] \\ &\quad / \left[1 - \frac{3-2\nu_s}{2(1-\nu_s)} \cdot \frac{r_0}{H_0} \right] \\ \frac{1}{k_h} &= \frac{r_0}{\mu} \cdot \frac{3-4\nu_s}{8(1-\nu_s)} \left[\ln \left(\frac{2L_0}{r_0} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2(3-4\nu_s)} - \frac{L_0}{H_0} \right] \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & / \left[1 - \frac{3-4\nu_s}{4(1-\nu_s)} \cdot \frac{r_0}{H_0} \right] \\ & \dots\dots\dots (29) \end{aligned} \right\}$$

杭の限界長さ L_c は支持杭の静的ウインクラばね係数 ($H = L_p = L_c$) の評価式 (29) を使い, (17) 式の数回の反復試行により精度よく求まるが, 次の回帰式を提示しておく。

$$\frac{L_c}{r_0} = \frac{5}{2} \left[\frac{E_p A_p}{\mu A_s} \right]^{1/2} : \text{鉛直}, \quad \frac{36}{11} \left[\frac{E_p I_p}{E_s I_s} \right]^{1/3} : \text{水平} \quad \dots\dots\dots (30)$$

ここに, E_s = 地盤のヤング係数, $I_s = \pi r_0^4/4$ である。(30) 式の簡易式は $\nu_s \geq 0.3$ に対して, 鉛直問題では $\pm 2\%$ ($E_p A_p/\mu A_s = 35 \sim 750$), 水平問題では $\pm 1\%$ ($E_p I_p/E_s I_s = 15 \sim 10000$) の誤差内に納まっている。

また, (30) 式を (17) 式に代入すれば, 柔長杭に対する静的ウインクラばね係数が次のように得られる。

Fig. 5 Variation of complex stiffness coefficients on pile circumference due to three excitations with frequency ($V_v/V_H=2.5$, $\xi=0$)

$$k_v \frac{r_0}{\mu} = \frac{18}{25} \cdot \sqrt{\frac{\mu A_s}{E_p A_p}}, \quad k_H \frac{r_0}{E_s} = \left[\frac{11}{12} \right]^{1/2} \cdot \sqrt{\frac{E_s I_s}{E_p I_p}} \quad (31)$$

(31) 式の簡易式には k_v , k_H 共に $\pm 4\%$ 内の誤差がある。提案するこの簡易式は、水平問題の柔で長い杭に有効な Francis の簡易式⁵⁾ (付録 A.2) と $\nu_s=0.5$ においてはほとんど一致した表現 (差異 0.5%) となっている。

一方、表層地盤中の浮杭の場合に対する (29) 式の簡易評価と厳密解による結果の比較もまた Fig. 4 に示されている。この図から、 L_0/H_0 に対する関数の連続性および H_0 評価を考慮した (29) 式の結果が妥当であることが分かる。この静的な簡易評価法は、 $L_0/r_0=10$ と言った非常に短い杭を除けば k_v , k_H 共に 10% 程度の誤差に納まっており、実用上十分な精度を有し有用であると言える。

鉛直・水平振動における三角形分布、一様分布加振解および動的平面ひずみ解¹⁴⁾ による動的ウィングラバネ係数の振動数に対する変化を L_p/r_0 とともに Fig. 5 に示す。

この図から、三角形分布と一様分布加振解による結果は、低振動数領域では実部がほぼ一定の剛性を表してい

るが、動的平面ひずみ解による結果では実部が静的になるとともに零に近づく傾向を示す。また、虚部は振動数とともにほぼ直線的に増加する逸散減衰を表している。実部、虚部共に高振動数になると一様分布の場合にはわずかな変化が現れるが、細長い杭になるほど三者の結果はほとんど一致するようになる。

このように、(28) 式で提案された杭周地盤のウィングラバネ係数 k_v , k_H の簡易評価法は、静的・動的問題に対して既往の簡易評価法^{5), 9), 14)} とそれぞれよく対応しており、さらに柔長杭の特性を表す杭と地盤の剛性比に依存した L_0 評価および杭長と層厚の比 L_0/H_0 による効果 (H_0 評価) が考慮され、柔長杭はもとより表層地盤中の柔長でない支持杭、浮杭にも適用可能で、より一般化された一簡易評価法として位置づけられる。

5. 単杭の振動特性の簡易評価

杭頭インピーダンスおよび伝達関数などの振動特性を、3, 4 節から簡易に評価することができる。ここでは提案する単杭の振動特性の簡易評価法の精度の検証を行う。

Fig. 6 Comparison of stiffnesses at pile head by proposed method with those by rigorous and other solutions in static case

5.1 杭頭インピーダンス

静的な杭頭インピーダンスの剛性に対して、簡易評価法と添字*で表示した厳密解および他の解析結果との比較を杭の特性パラメータ $\alpha_0 L_p$, $\beta_0 L_p$ とともに Fig. 6 に示す。解析パラメータは Fig. 4 で用いたものに対応する。

この図から、 K_{vv} の簡易評価は、Butterfield らによる $L_p/r_0=10$ の剛短杭の結果を除き $\pm 10\%$ 程度の誤差に納まることが分かる。 K_{hh} の簡易評価は、柔長杭に近い $\beta_0 L_p=3$ 付近の $L_p/r_0=10$ に対して若干精度が悪くなるものの、 $\pm 10\%$ 程度の誤差に納まっている。 K_{hr} の簡易評価では、 $\beta_0 L_p=0.5$ 程度以下にある $L_p/r_0=10$, 20 の剛短な浮杭および Kuhlemeyer による $V_p/V_h=14.49$ ($L_c/r_0=11.5$) に対して精度の悪いものが見られ、 K_{rr} の簡易評価では、全般的に過小評価の傾向にあり、剛短杭の $L_p/r_0=10$, 20 においてその傾向が顕著である。この原因は、本簡易評価法には杭周地盤の回転反力の影響を無視したために生じたもので、回転に関する K_{rr} に特に大きな影響を及ぼしたものであると考えられる²¹⁾。また、 $L_p/r_0=80$ における $\beta_0 L_p=20$ と言った非常に柔長な杭に対しても、 K_{hr} , K_{rr} 共に過小評価となっているが、これは厳密解の数値解析精度に依存するものとみられ、 $L_0/H \leq 11.6/80$ といった非常に小さい部分（有効杭長）にわたる実質的なフーリエ級数の項数が不十分となり、回転に関するインピーダンスに顕著に現れたためと考えられる。よって、 K_{hr} は $\pm 10\%$ 程度の誤差にあり、 K_{rr} においても剛短杭を除けば 10% 程度の誤差にとどまっている。

以上から、提案する静的な杭頭インピーダンスの簡易評価法は、おおむね $\pm 10\%$ 程度の誤差に納まっており、実用上十分な精度を有し有用なものとなる。

柔長杭における静的な杭頭インピーダンスの簡易式は、(31)式の静的ウインクラばね係数を考慮すれば、(15)式から次のように得られる。

$$\frac{K_{vv}}{\mu \tau_0} = \frac{6}{5} \pi \left[\frac{E_p A_p}{\mu A_s} \right]^{\frac{5}{12}}, \quad \frac{K_{hh}}{E_s \tau_0} = \left[\frac{11}{12} \right]^3 \pi \left[\frac{E_p I_p}{E_s I_s} \right]^{\frac{3}{8}}$$

$$\frac{K_{hr}}{E_s \tau_0^2} = \left[\frac{11}{12} \right]^2 \frac{\pi}{2} \left[\frac{E_p A_p}{E_s A_s} \right]^{\frac{11}{4}}, \quad \frac{K_{rr}}{E_s \tau_0^3} = \frac{11}{24} \pi \left[\frac{E_p I_p}{E_s I_s} \right]^{\frac{35}{8}}$$

.....(32)

ただし、 $\xi=\xi=0$ としている。(32)式の簡易表現は水平問題における Gazetas¹⁸⁾ などによる統計的評価法でよく用いられる表現形式に相当している。

動的な杭頭インピーダンスの簡易評価法と厳密解による解析効果との比較を、無次元振動数 $a_1(b_1)$ とともに Fig. 7 に示す。ここで、文献 21), 28) でも考察しているように、杭頭インピーダンスに及ぼす $V_p/V_h=2.0$, 2.5, 5.0 ($\nu_s=1/3$, 0.405, 0.479: 以下に示す振動数はそれぞれこれに対応している) による影響は、厳密解

Fig.7 Comparison of pile head impedances by proposed method with those by rigorous and plane strain solutions in frequency domain ($V_p/V_H=2.5$, $\xi=0.05$)

Fig.8 Comparison of pile head receptances by proposed method with those by rigorous solution in frequency domain ($V_p/V_H=2.5$, $\xi=0.05$)

の表面波による共振点 ($b_1=1.95, 2.31, 2.81$) および群速度の極小点 (Airy 相: $b_1=1.88, 1.98, 2.07$) 付近までの比較的低い振動数領域に現れ、高振動数領域では少なくなる。また、 L_p/H による効果もこれらの振動数を超える高振動数領域では小さく、 $L_p/H=4/5, 2/3, 1/3$ の結果は $1/2$ の結果とよく似た傾向を示す。したがって、Fig.7 には代表的な $V_p/V_H=2.5$ ($\nu_s=0.405$); $L_p/H=1, 1/2$; $L_p/r_0=10, 40$ における結果のみを示している。この図には動的平面ひずみ解¹⁴⁾による結果も示している。図中に示す ($\times n$) は実際の値が図中の値の n 倍であることを表す。

この図から、提案する簡易評価法による結果は、厳密解における表層地盤の 1 次共振点 (水平振動: $b_1=1.0$) および Airy 相 (鉛直振動: $b_1=1.98$) 付近の急激に変

化する部分を除けば、全般的に厳密解による結果によく近似しており、複雑な動的特性が評価できているのが分かる。しかし、 K_{RR} の実部には静的な場合と同様に精度の悪化が見られるものの、虚部では比較的良好な結果が得られ、杭周地盤の回転反力の無視による影響が少ないことが分かる。一方、動的平面ひずみ解による評価には、高振動数領域では剛短杭になるほど精度のよい結果が得られるが、杭が柔長になるとその精度は本簡易評価法に比べあまりよくなく、また振動数が低くなるとともに用いることができなくなることが分かる。

以上から、提案する動的な杭頭インピーダンスの簡易評価法は、表層地盤の 1 次共振点および Airy 相付近を除いて、実用上十分な精度を有しており有用なものとなり、既往の動的平面ひずみ解による評価法¹⁴⁾を柔長杭お

よび低振動数領域まで適用可能にした一簡易評価法として位置づけられる。

5.2 伝達関数

杭頭での伝達関数の簡易評価法と厳密解による解析結果との比較を杭頭インピーダンスと同様に無次元振動数 $a_1(b_1)$ とともに Fig. 8 に示す。

この図から、提案する簡易評価法による結果において、 $|S_{VC}|$ (S_{VF} の振幅と位相) の評価は支持杭、浮杭共に非常に精度がよく、 V_P/V_H の変化に対して、支持杭では杭先端拘束の効果が、浮杭では地動拘束の効果がよく表現できており、 $|S_{VF}| < 1$ となる入力損失の現象が現れている。 $|S_{HC}|$ (S_{HF} の振幅と位相) においても、支持杭、浮杭共によい結果が得られ、また、 b_1 および V_P/V_H の増加とともに入力損失の現象 ($|S_{HF}| < 1$) が見られるものの、低振動数領域では逆に入力の増幅 ($|S_{HF}| > 1$) が起こっているのが分かる¹⁸⁾。しかし、杭が柔で長くなると S_{HF} の振幅では振動数の増加とともに過大評価になっており、これは本簡易評価法では杭周地盤の回転反力を無視したために生じたものである。一方、 $|S_{RC}|$ (S_{RF} の振幅と位相) においても、支持杭、浮杭共によい結果がみられるものの、 S_{HF} の振幅と同じ原因から柔で長い杭ほど高振動数領域でかなり過大評価する傾向にある。位相特性から、 S_{HF} と S_{RF} はほぼ逆位相の関係にあることが分かる。

以上から、提案する伝達関数の簡易評価法は、柔で長い杭の S_{HC} 、 S_{RC} において高振動数になると精度が悪くなるものの、 S_{VC} 、 S_{HC} 、 S_{RC} において実用上十分な精度を有し有用なものとなる。

6. 本簡易評価法の適用例

本簡易評価法の有用性を検討するために、Fig. 9 に示すような入力データがよく整備された地震観測の行われたある杭基礎(場所打ちコンクリートのベノト杭)建物³⁰⁾に本簡易評価法を適用する。適用にあたって、次のよう

な処理を行う。

- 1) GL-44.6 m を支持層の支持杭 ($L_P=43.2$ m) とする。
- 2) 基礎スラブ、基礎梁は剛とし、それによる根入れ部分 (GL~GL-1.4 m) の影響は小さいとして無視する。
- 3) 自由地盤応答および群杭基礎の伝達関数の評価では、全層 (GL~GL-44.6 m) にわたって平均化された次の値を有する一様地盤とみなし、単杭におけるものを用いる。

$$V_H=164 \text{ m/sec}, \rho=1.74 \text{ g/cm}^3; \mu=478 \text{ kgf/cm}^2 \\ \nu_s=0.483$$

- 4) 杭頭インピーダンスの評価では、杭の変位分布を考慮して、有効杭長 L_0 にわたる三角形分布の重み付け平均値を採用する。

$$\text{鉛直振動: } L_c=107 \tau_0=53.5 \sim 58.9 \text{ m}; L_0=43.2 \text{ m}$$

$$\mu=487 \text{ kgf/cm}^2, \rho=1.74 \text{ g/cm}^3, \nu_s=0.482$$

$$\text{水平振動: } L_c=11.7 \tau_0=5.9 \sim 6.4 \text{ m} \doteq 6.2 \text{ m} \\ ; L_0=6.2 \text{ m}$$

$$E_s=2690 \text{ kgf/cm}^2, \rho=1.93 \text{ g/cm}^3, \nu_s=0.466$$

- 5) 群杭基礎のインピーダンス K_{HH}^G , K_{HR}^G , K_{RR}^G は既知の単杭の杭頭インピーダンスを利用して群杭のインピーダンスを求める Dobry らによる簡易法³¹⁾に、本簡易評価法から得られる単杭の杭頭インピーダンスを用いて評価される。ただし、群杭の回転ばね $K_{RR}^G = K_{RR}^{GV} + K_{RR}^{GH}$ において、 K_{RR}^{GV} には K_{VV} のロッキングによる群杭効果を取り入れるが、 K_{RR}^{GH} は単杭の K_{RR} の単純和とする。杭心間隔は大まかに $S_x=6.3$ m, 6.7 m; $S_y=9.0$ m とする。

- 6) 内部減衰は建物、地盤共に履歴型とし、建物: $\xi_b=0.02$, 地盤: $\xi=0.02, 0.03$ を想定する。杭には内部減衰はなく、杭頭は基礎スラブに剛に接合されているとする。

解析モデルは Fig. 10 に示すように、建物をせん断系の 3 質点モデルとし、群杭による複素ばね $[K^G]$ で支持された 1 階部分に、次式で表される杭頭を静止させるに必要な駆動力 (driving force) の振幅で調和加振され

Soil profile and property

Depth (m)	Soil Description	Thick (m)	ρ (g/cm ³)	ν_s	E_s (kgf/cm ²)	μ (kgf/cm ²)
GL	Debris & Clay	1.0	1.45	0.43	3320	1160
2.8	Sandy Silt	1.8	2.00	0.43	4580	1600
4.9	Fine Sand	2.1	1.85	0.49	1430	480
7.6	Silty Sand	2.7	1.95	0.49	1430	510
10.7	Silt	3.1	1.85	0.49	800	270
27.9	Silt	6.8	1.55	0.49	390	130
30.5	Sandy Silt	3.9	1.55	0.49	980	330
33.6	Clay	6.5	1.75	0.49	1910	640
36.8	Clayey Sand	5.7	1.70	0.46	2690	920
39.4	Sandy Clay	3.2	1.80	0.45	3340	1150
42.3	Clay	7.8	1.80	0.48	3400	1150
44.6	Fine Sand	7.2	2.00	0.47	7350	2500

Fig. 9 Outline of a soil-pile-building system in case history

Fig. 10 Analytical model of soil-pile-building system

る時の建物の短辺 (x) 方向の応答を求める。

$$\begin{Bmatrix} Q_D \\ M_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{HH}^c & K_{HR}^c \\ K_{HR}^c & K_{RR}^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{HF} \\ S_{RF} \end{Bmatrix} U_F \dots \dots \dots (33)$$

基礎固定時の建物の非減衰固有振動数は $f_1=8.6$ Hz, $f_2=19.6$ Hz である。また、観測結果に用いられた地震は 20 回で、1 階 (B_2) 短辺方向の最大加速度は 4~75 gal 程度である。次の Figs. 11, 13 において、それらの地震による観測結果の平均値を点線で、No. 32 の地震 (B_2 での最大加速度 13 gal 程度) の観測結果を実線で表示する。

1 階 (B_2) に対する 3 階 (B_1) の観測フーリエスペクトル比および本簡易評価法による伝達関数の振幅を Fig. 11 に示す。この図には杭基礎のばねの評価に群杭効果を無視し、単杭の杭頭インピーダンスの単純和とした場合の結果も示している。この図から、本簡易評価法による結果において、地盤-杭基礎-建物連成系の卓越振動数は、観測結果による 7.5 Hz に近い値を示しており、杭基礎のばねの評価としては妥当と考えられるが、振幅特性から群杭効果を考慮する必要があることが分かる。また、Fig. 12 に示すように群杭基礎のばねは、7 Hz あたりから実部、虚部共に非常に大きくなり、群杭効果の影響が強く現れ、建物の応答振幅が小さくなったと考えられる。

次に GL-44.4 m で観測された波形 (G_3) に対する 1, 3 階の観測フーリエスペクトル比と本簡易評価法による伝達関数の振幅の比較を Fig. 13 に示す。この図から、本簡易評価法による結果において、ピークの振動数は 1, 2, 3 および 5 次モードではよく近似しており、群杭基礎での伝達関数の評価に用いた入力データの処理が妥当であると考えられるが、高次モードになると差異が生じ層状地盤の影響が現れている。また、4 モードの振動数は地盤-杭基礎連成による影響が現れ、正確にはとらえられていない。ピークの振幅特性では、地盤の内部減衰の評価によりかなりの変化が見られ、地震入力の大さきに対する地盤の内部減衰の評価が重要な課題となるが、1 次モードを除けば観測された入力地震に対して、大略 $\xi=0.02\sim0.03$ 程度でよく模擬できることが分かる。しかし、Fig. 11 に示すように地盤-杭基礎-建物連成系の

Fig. 11 Comparison of recorded and predicted Fourier acceleration spectrum ratios of $B_1(\ddot{U}_s)$ to $B_2(\ddot{U}_i)$

振幅特性の若干の差異により、3 階における 4, 5 次モードの振幅特性ではかなりの過大評価として現れており、群杭効果および基礎の根入れ効果などのより精度の高い評価による検討が今後の課題となる。

以上のように、実建物への適用例から、本簡易評価法

Fig. 12 Predicted impedances of pile group considered or ignored group effect ($\xi=0.03$)

Fig. 13 Comparison of recorded and predicted Fourier acceleration spectrum ratios of $B_1(\ddot{U}_s)$ or $B_2(\ddot{U}_i)$ to $G_3(\ddot{U}^*)$

は実用上かなりよい精度で模擬でき、解析パラメータの変化に伴う地盤-杭基礎-建物連成系の複雑な動的特性の評価において十分有用性があると考えられる。

7. 結 論

単杭の鉛直・水平振動において、杭周と杭先端地盤のウィングラバねを簡単な表現で提案し、杭のせん断変形を考慮した杭頭のインピーダンスおよび伝達関数の振動特性の一簡易評価法を提示した。提案する簡易評価法の有用性は、広範囲のパラメトリックスタディから、厳密解および他の解析結果との比較により精度の検証が行われ、また、杭基礎で支持された実建物への適用例により確認された。本論文で取扱ったパラメータ範囲において、結論として次のように要約する。

- 1) 杭先端地盤のウィングラバねを (21) 式の簡易式として提案し、その評価は 10 % 程度の誤差内にある。
- 2) 杭周地盤のウィングラバねの (28) 式で提案する簡易評価法は、有効杭長・層厚の概念を導入することにより、静的・動的問題におけるそれぞれの既往の簡易評価法を、柔長杭はもとより表層地盤中の柔長でない支持杭、浮杭にも適用可能にし、静的・動的にも一貫したより一般化された一簡易評価法として位置づけられる。
- 3) 杭周地盤のウィングラバねの (29) 式による静的な簡易評価は、非常に短い杭を除けば 10 % 程度の誤差に納まっている。
- 4) 静的な杭頭インピーダンスの簡易評価は、おおむね ± 10 % 程度の誤差に納まっている。
- 5) 動的杭頭インピーダンスの簡易評価法は、表層地盤の 1 次共振点および Airy 相付近を除けば実用上十分な精度を有しており、既往の動的平面ひずみ解による評価法を柔長杭および低振動数領域まで適用可能にした一簡易評価法として位置づけられる。
- 6) 伝達関数の簡易評価法は、水平振動における柔で長い杭ではその精度が高振動数領域で悪くなるものの、実用上十分な精度を有している。
- 7) 地震観測された杭基礎建物への本簡易評価法の適用例から、実用上かなりよい精度で模擬でき、解析パラメータの変化に伴う地盤-杭基礎-建物連成系の複雑な動的特性の評価においても十分有用となる。

謝 辞

本研究を進めるにあたり、終始有益な御助言を頂きました神戸大学名誉教授 堯天義久博士、神戸大学元教授故水畑耕治博士に深甚の謝意を表します。

最後に、貴重な解析結果および地震観測結果を引用させて頂いた方々に対して心より御礼申し上げます。

引用・参考文献

- 1) Terzaghi, K. : Evaluation of Coefficients of Subgrade

- Reaction, *Geotechnique*, Vol. 5, No. 4, pp. 297~326, 1955.
- 2) 杉村義広：杭頭回転拘束度および杭長を考慮した杭の水平抵抗理論解, 日本建築学会構造系論文報告集, 第 365 号, pp. 132~143, 昭和 61 年 7 月.
- 3) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説, IV 下部構造編, 丸善, 昭和 55 年 5 月.
- 4) 日本建築学会：建築基礎構造設計指針, 丸善, 1988.
- 5) Francis, A. J. : Analysis of Pile Groups with Flexural Resistance, *Journal of Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, Vol. 90, No. SM 3, pp. 1~32, 1964.
- 6) Butterfield, R. and Banerjee, P. K. : The Elastic Analysis of Compressible Piles and Pile Groups, *Geotechnique*, Vol. 21, No. 1, pp. 43~60, 1971.
- 7) Banerjee, P. K. and Davies, T. G. : The behaviour of axially and laterally loaded single piles embedded in nonhomogeneous soils, *Geotechnique*, Vol. 28, No. 3, pp. 309~326, 1978.
- 8) Poulos, H. G. : Behavior of Laterally Loaded Piles : I-Single Piles, *Journal of Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, Vol. 97, No. SM 5, pp. 711~731, 1971.
- 9) Randolph, M. F. and Wroth, C. P. : Analysis of Deformation of Vertically Loaded Piles, *Journal of Geotechnical Engineering Division, ASCE*, Vol. 104, No. GT 12, pp. 1465~1488, 1978.
- 10) Penzien, J., Scheffey, C. F. and Parmelee, R. A. : Seismic Analysis of Bridges on Long Piles, *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 90, No. EM 3, pp. 223~254, 1964.
- 11) Novak, M. : Dynamic Stiffness and Damping of Piles, *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 11, No. 4, pp. 574~598, 1974.
- 12) Novak, M. : Vertical Vibration of Floating Piles, *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 103, No. EM 1, pp. 153~168, 1977.
- 13) Takemiya, M. and Yamada, Y. : Layered Soil-Pile-Structure Dynamic Interaction, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 9, pp. 437~457, 1981.
- 14) Novak, M., Nogami, T. and Aboul-Ella, F. : Dynamic Soil Reaction for Plane Strain Case, *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 104, No. EM 4, pp. 953~959, 1978.
- 15) Novak, M. and El Sharnouby, B. : Stiffness Constants of Single Piles, *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, Vol. 109, No. 7, pp. 961~974, 1983.
- 16) Kuhlemeyer, R. L. : Static and Dynamic Laterally Loaded Floating Piles, *Journal of Geotechnical Engineering Division, ASCE*, Vol. 105, No. GT 2, pp. 289~304, 1979.
- 17) Dobry, R., Vicente, E., O'Rourke, M. J. and Roesset, J. M. : Horizontal Stiffness and Damping of Single Piles, *Journal of Geotechnical Engineering Division, ASCE*, Vol. 108, No. GT 3, pp. 439~459, 1982.
- 18) Gazetas, G. : Seismic response of end-bearing single piles, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*,

- Vol. 3, No. 2, pp. 82~93, 1984.
- 19) Nozoe, H., Gyoten, Y., Mizuhata, K. and Fukusumi, T. : A Physical Approximation for the Pile-Head Impedances of a Soil-Pile System in the Low Frequency Range, 第 7 回日本地震工学シンポジウム, pp. 997~1002, 1986.
 - 20) Nozoe, H., Gyoten, Y., Mizuhata, K. and Fukusumi, T. : Characteristics of Pile Head Impedance and Its Approximate Estimation in Vertical Vibration, 神戸大学大学院自然科学研究科紀要, No. 6-A, pp. 7~22, 1988.
 - 21) Nozoe, H., Gyoten, Y., Mizuhata, K. and Fukusumi, T. : Estimation of Impedance and Transfer Functions for End Bearing and Floating Piles, Proceedings of 9th World Conference on Earthquake Engineering, Vol. III, pp. 563~568, 1988.
 - 22) Nozoe, H., Gyoten, Y. and Fukusumi, T. : Dynamic Analysis of a Soil-Pile System by the Finite Fourier-Hankel Transformation Method —Case of a Floating Pile in Horizontal Vibration—, Theoretical and Applied Mechanics, University of Tokyo Press, Vol. 33, pp. 377~392, 1985.
 - 23) Nozoe, H., Gyoten, Y. and Fukusumi, T. : Dynamic Analysis of a Soil-Pile System by the Finite Fourier-Hankel Transformation Method —Case of a Floating Pile in Vertical Vibration—, 神戸大学大学院自然科学研究科紀要, No. 3-A, pp. 35~48, 1985.
 - 24) Kobori, T., Minami, R. and Bada, K. : Dynamic Behavior of a Pile under Earthquake Loading, Proceedings of International Conference on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics, Vol. II, pp. 795~800, 1981.
 - 25) 小堀鐸二, 南井良一郎, 馬場研介 : 基礎入力を受ける杭の上下振動特性について, 第 31 回応用力学連合講演会講演論文抄録集, pp. 347~348, 1981.
 - 26) Coper, G.R. : The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory, Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 33, No. 2, pp. 335~340, 1966.
 - 27) Gazetas, G. : Analysis of machine foundation vibrations : state of the art, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol. 2, No. 1, pp. 2~42, 1983.
 - 28) 野添久視, 日下部馨, 福住忠裕 : 粘弾性表層地盤中に設置された単杭の鉛直振動特性, 日本建築学会構造系論文報告集, 第 424 号, pp. 143~155, 1991 年 6 月.
 - 29) 松岡 理, 八幡夏恵子 : 三次元均質等方弾性体動問題の基本解とその応用 Mindlin 問題その 1, 日本建築学会論文報告集, 第 288 号, pp. 73~84, 昭和 55 年 2 月.
 - 30) 日本建築学会 : 構造物と地盤の動的相互作用シンポジウム, pp. 77~92, 1985. 4. 16.
 - 31) Dobry, R. and Gazetas, G. : Simple Method for Dynamic Stiffness and Damping of Floating Pile Groups, Geotechnique, Vol. 38, No. 4, p. 557~574, 1988.

Appendix

A. 1 Randolph らの簡易式⁹⁾

Randolph らは、杭周の鉛直方向ウィングラばね係数を静的平面ひずみ解から次式のように簡易評価している。

$$\frac{1}{k_v} = \frac{r_0}{\mu} \ln \left(\frac{r_m}{r_0} \right); r_m = 2.5 L_p (1 - \nu_s) \dots \dots \dots (A1)$$

A. 2 Francis の簡易式⁵⁾

Francis は、杭周の水平方向地盤反力係数として、Vesic の簡易式を 2 倍した次式によって簡易評価している。

$$K_{CH} = 1.30 \frac{E_s}{1 - \nu_s^2} \cdot \sqrt{\frac{E_s B^4}{E_p I_p}}; \text{杭幅 } B = 2 r_0 \dots \dots \dots (A2)$$

(1991 年 8 月 21 日原稿受理, 1992 年 5 月 19 日採用決定)