繰返し両振り曲げを受ける片持梁-柱の定常状態限界理論

その1:基礎理論及び離散化モデルを用いた数値解析法

STEADY-STATE LIMIT THEORY FOR CANTILEVER BEAM-COLUMNS
SUBJECTED TO CYCLIC REVERSED BENDING

Part 1: Basic theory and a numerical method for discretized model analysis

上谷 宏二*, 中村 恒善**

Koji UETANI and Tsuneyoshi NAKAMURA

A cantilever beam-column subjected to completely reversed tip deflection cycling with continuously increasing amplitude under constant axial compression consecutively exhibits a sequence of symmetric steady states, a sequence of asymmetric steady states and finally a divergent behavior. The first critical point, at which a transition from a symmetric steady state to an asymmetric steady state occurs has been named the symmetry limit and the symmetry limit theory has been established by the present authors. The second critical point, at which the deflection divergence occurs, is referred to as a steady-state limit. This paper presents a new theory for predicting the steady-state limit of a bi-linear strain-hardening sandwich beam-column model. A Steady-state limit solution can be found as the first limit point of the steady-state path, which can be traced by a step-by-step analysis based upon a set of linearized equations for the incremental variation of steady state.

Keywords: plastic instability, plastic collapse, limit state, repeated loading, beam-column, theoretical analysis

塑性不安定現象, 塑性崩壊, 限界状態, 繰返し載荷, 柱部材, 理論解析

1. 序 文

鋼構造柱材が高い軸力比の下で交番繰返し曲げを受けるとき, 終局的にどのような挙動を呈するかを調べるために行った角形鋼管片持梁-柱供試体の一定軸力下・一定振幅完全両振り曲げ実験において, 軸力値と曲げ振幅値の組み合わせによって供試体は異なる挙動を呈し, これらは次の2種類に分類されることがわかった^{1), 2)}。一つは, 一对の反転時変形状態が梁-柱の初期材軸線に関して対称である対称定常状態と名付けた定常状態に収束していく挙動であり, もう一つは初期材軸線に関する逆対称な変形成分が載荷サイクルごとに累積し崩壊に至る発散挙動である。この実験結果は, 軸力比と曲げ振幅を軸とする平面において, 収束と発散の2種類の挙動領域と, 両領域を分ける限界とが存在することを示唆するものであった。これを確かめるために行った剛体とばねから成る4自由度片持梁-柱モデルの履歴挙動解析によっ

て, 定常状態には初期材軸線に関して対称なもののほかに, 非対称なものも存在することが明らかになった³⁾。すなわち, 一定軸力の下で一定振幅完全両振り曲げを受ける片持梁-柱の挙動は次の3種類に分類されることになる。

SC. 対称定常状態への収束挙動

AC. 非対称定常状態への収束挙動

DV. 発散挙動

一定の静的繰返し載荷に対し梁-柱が SC, AC, DV 以外の挙動を呈することは通常考えられないから, これらの挙動領域間に明確な限界が存在するであろう。著者らは, 各振幅レベルで定常状態に収束させながら振幅を0から連続的に増加させる理想化された繰返し強制変位プログラム COIDA を定義し, COIDA に対する梁-柱挙動が対称定常状態への収束挙動 (SC) から非対称定常状態への収束挙動 (AC) に移行する臨界点を対称限

本論文は, 上谷宏二著・博士学位論文^{3), 4)}第5章および文献14) で発表した内容の一部を再整理してまとめたものである。

* 京都大学工学部建築学科 助教授・京大工博

Assoc. Prof., Dept. of Architecture, Faculty of Engineering, Kyoto Univ., Dr. Eng.

** 京都大学工学部建築学科 教授・京大工博, Ph.D.

Prof., Dept. of Architecture, Faculty of Engineering, Kyoto Univ., Dr. Eng., Ph.D.

界と名付けた。さらに、梁-柱の履歴挙動のすべてを追跡することなく、振幅の増加に伴う定常状態の連続的変化に着目して対称限界の予測解を直接求めることができる対称限界理論を設立した^{(4)~(8)}。

振幅が対称限界値を超えると梁-柱は非対称定常状態を呈するが、さらに振幅を増加させるといかなる定常状態にも収束せず、逆対称変形成分が発散して崩壊に至る場合がある。このように非対称定常状態への収束挙動 (AC) から発散挙動 (DV) に移行する臨界点を定常状態限界と呼ぶ。対称限界振幅を超えて定常状態が対称から非対称になっても、梁-柱が定常状態を保持し続ける限り、挙動はいわば「安定」な状態にあるといえる。これに対し、逆対称変形成分が無制限に累積され崩壊にいたる発散挙動は明らかに「不安定」を意味する。この意味において、定常状態限界は実質的安定限界であり、設計に際して最も重要視すべき限界状態の一つである。

本論文は定常状態限界を予測するための理論を提示することを目的とするものであり、2編から構成される。本報 (その1) では、線形ひずみ硬化・サンドウィッチ片持梁-柱モデルについて基礎理論を提示する。さらに、この基礎理論に基づいて定常状態限界解を近似的に求めるための数値解析法を提案する。次報 (その2) では、定常状態限界の理論予測解を求めて提示し、特徴を明らかにする。さらに、同一モデルの精確な履歴挙動解析を行うことによって定常状態限界理論を検証する。

2. 基礎概念と理論解析の基本方針

真直な初期形状を持つ片持梁-柱が、ある程度以上の一定軸力の作用下で、振幅が連続的に単調増加するよう

Fig. 1 Steady-state path of a cantilever beam-column subjected to tip deflection cycling program of COIDA type

な完全両振り繰返し頂点横変位を受けるときの履歴挙動を考える。各振幅レベルでは、定常状態に収束するまで振幅を一定に保って载荷サイクルを繰り返す。このような強制変位プログラムを COIDA と呼ぶ^{(4), (5)}。振幅の増加に連れて連続的に生成されていく定常状態列は、空間内の1点が1個の定常状態を表す定常状態空間内の線として描かれる。これを定常状態経路と呼ぶ^{(4), (5)}。Fig. 1 は、頂点横変位振幅 Ψ を縦軸、逆対称たわみ成分の大きさ V^b を横軸とする平面上に描かれた定常状態経路の模式図である。初期状態から振幅の増加に連れて生成される対称定常状態列は、縦軸に沿う直線分 OF によって表される。

経路は点 S で分岐し、そこから非対称定常状態列を表す一対の経路 SB, SB' が発する。分岐点 S は定常状態が対称から非対称に移行する対称限界を表す。これに対し、発散挙動が生じる定常状態限界は定常状態経路の極限点 (limit point) B および B' によって表されると考える。本報で提示する理論は、対称限界から発する定常状態経路を追跡し、その極限点を求め、これを定常状態限界予測解とするものである。

3. 解析モデルと基礎式

この論文では、Fig. 2 に示された様な理想化サンドウィッチ断面を有する一次元連続体梁-柱モデルについて定常限界理論を展開する。軸力と曲げモーメントは、

Fig. 2 Idealized analytical model of cantilever beam-column

Fig. 3 Bi-linear stress-strain relation of flanges

材軸から距離 H 離れて配置された断面積 $A/2$ を持つ 2 枚のフランジだけによって伝達され、せん断力はフランジ間を満たすせん断変形しない物質によってだけ伝達される。フランジは Fig. 3 に示された線形ひずみ硬化履歴応力・ひずみ関係に従う。

任意の釣合状態が満たすべき基礎方程式を以下に提示する。固定端から x 離れた位置に断面を持つ Fig. 2 の自由体を考える。断面 x におけるたわみを $V(x)$ 、左右フランジの圧縮応力を $\hat{\sigma}_L(x)$ 、 $\hat{\sigma}_R(x)$ で表し、頂点 $x = L$ に作用する一定鉛直荷重を N 、水平反力を Q で表せば、自由体の釣合式は次のように書ける。

$$N = \frac{A}{2} (\hat{\sigma}_L + \hat{\sigma}_R) \dots\dots\dots (1)$$

$$N \{V(L) - V(x)\} + (L - x)Q = \frac{AH}{2} (\hat{\sigma}_R - \hat{\sigma}_L) \dots\dots\dots (2)$$

左右フランジの圧縮ひずみ $\epsilon_L(x)$ 、 $\epsilon_R(x)$ とたわみ関数 $V(x)$ との間には次の関係が成り立っている。

$$\frac{1}{2H} (\epsilon_R - \epsilon_L) = \frac{d^2 V}{dx^2} \dots\dots\dots (3)$$

フランジの応力とひずみの関係は、ヤング係数 E 、降伏応力 $\hat{\sigma}_Y$ 、残留塑性ひずみ ϵ^r 、および、ひずみ硬化率 α ($=E_T/E$) を用いて、次のように書ける。

$$\text{弾性域: } \hat{\sigma} = E\epsilon \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{圧縮側ひずみ硬化域: } \hat{\sigma} = \alpha E\epsilon + (1 - \alpha)\hat{\sigma}_Y \dots\dots\dots (5)$$

$$\text{引張側ひずみ硬化域: } \hat{\sigma} = \alpha E\epsilon - (1 - \alpha)\hat{\sigma}_Y \dots\dots\dots (6)$$

$$\text{除荷域: } \hat{\sigma} = E(\epsilon - \epsilon^r) \dots\dots\dots (7)$$

諸量を次式のように無次元化する。

$$\left. \begin{aligned} \xi = \frac{x}{H}, \quad l = \frac{L}{H}, \quad v = \frac{V}{H}, \quad \psi = \frac{\Psi}{H}, \quad n = \frac{N}{EA}, \\ q = \frac{Q}{EA}, \quad \sigma_L = \frac{\hat{\sigma}_L}{E}, \quad \sigma_R = \frac{\hat{\sigma}_R}{E}, \quad \sigma_Y = \frac{\hat{\sigma}_Y}{E} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

基礎式 (1)~(3) は、以下のように無次元化表示される。

(釣合式)

$$n = \frac{1}{2} (\sigma_L + \sigma_R) \dots\dots\dots (9)$$

$$n \{v(l) - v(\xi)\} + (l - \xi)q = \frac{1}{2} (\sigma_R - \sigma_L) \dots\dots\dots (10)$$

(ひずみ・変位関係式)

$$\frac{1}{2} (\epsilon_R - \epsilon_L) = \frac{d^2 v}{d\xi^2} \dots\dots\dots (11)$$

(応力・ひずみ関係式)

$$\text{弾性域: } \sigma = \epsilon \dots\dots\dots (12)$$

$$\text{圧縮側ひずみ硬化域: } \sigma = \alpha\epsilon + (1 - \alpha)\sigma_Y \dots\dots\dots (13)$$

$$\text{引張側ひずみ硬化域: } \sigma = \alpha\epsilon - (1 - \alpha)\sigma_Y \dots\dots\dots (14)$$

$$\text{除荷域: } \sigma = \epsilon - \epsilon^r \dots\dots\dots (15)$$

定常状態限界理論も対称限界理論と同様に、定常状態だけに着目して展開される。頂点たわみ振幅 ψ の定常

Fig. 4 Classification of steady-state behavior of flange elements

状態は、その一周周期挙動における $v(l) = \psi$ の反転時状態 Γ^I と $v(l) = -\psi$ の反転時状態 Γ^{II} の状態量 $(\cdot)^I$ と $(\cdot)^{II}$ を用いて記述できる。これらの反転時状態もまた一個の釣合状態であるから、(9)~(15)の基礎式を満たす。

定常状態におけるフランジ要素の周期挙動は、応力・ひずみ平面上に描かれる状態点の閉じた軌跡として表され、Fig. 4 に示される定常状態線 E, C, U, T および定常状態ループ P の 5 種類に分類される。各定常状態において、梁・柱はその材軸線方向に、左右フランジ要素がそれぞれ同種の定常周期挙動を呈する領域に Fig. 5 のように分割できる。つまり、こうして分割された個々の領域内では左右フランジ要素の定常周期挙動の種類の組み合わせは同じになる。

4. 定常状態経路解析の基礎式

定常状態限界を求めるためには、2. で述べたように、対称限界理論^{4)~6)}によって求められる対称限界点 S から発する非対称定常状態経路に沿って定常状態の連続的変化を追跡しなければならない。定常状態経路解析は、弾塑性構造物の釣合い経路解析と同様に履歴依存型の問題であるから、解析に用いる基礎式は変化率量関係式として与えられる。定常状態経路パラメータを τ とすれば、定常状態変数 D は τ の関数であり、基礎式は D の τ に関する変化率 $\dot{D} = dD/d\tau$ の関係式となる。本節ではこの基礎式を誘導する。対称限界において $\tau = 0$ とすれば、対称限界後の $\tau = \tau_1$ (> 0) における非対称定常状態 $D(\tau_1)$ は次式で表される。

$$D(\tau_1) = \int_0^{\tau_1} \dot{D} d\tau \dots\dots\dots (16)$$

4.1 変化率量に関する基礎式

$\alpha > 0$ であるから、フランジ要素の定常周期挙動を表す応力・ひずみ状態点の閉軌道は材軸線方向に連続的に変化し、定常状態経路パラメータ τ に対しても連続的に変化する。すなわち、Fig. 5 に示される状態領域間の境界は定常状態の変化に伴って材軸線方向に連続的に移動する。

Fig. 5 Division into state regions

定常状態経路パラメータ増分 $\Delta\tau$ に伴う定常状態の微小な変化に際して、領域内におけるフランジ要素の定常周期挙動は、領域間境界のごく近傍を除いて $E \rightarrow E$, $U \rightarrow U$, $C \rightarrow C$, $T \rightarrow T$, $P \rightarrow P$ など同種の状態へと変化する。領域間境界近傍のごく限られた部分領域のフランジ要素では、 $E \rightarrow C$, $C \rightarrow P$, $C \rightarrow U$ などの異種状態への変化が生じ得る。しかし、これらの境界近傍領域は、有限増分量を変化率量に収れんさせる数学的プロセスとして $\Delta\tau$ を 0 に限りなく近づける極限において消滅し、この領域の影響は以下で導く変化率量関係式の中には現れない。この理由により、定常状態変数の変化率に関する釣合式、および、ひずみ・変位関係式は、(9)～(11) 式を τ で微分することにより次のように導かれる。反転時 Γ^I の状態量については、

$$0 = \frac{1}{2}(\dot{\sigma}_L^I + \dot{\sigma}_R^I) \dots \dots \dots (17)$$

$$n(\dot{\psi} - \dot{v}^I) + (l - \xi)\dot{q}^I = \frac{1}{2}(\dot{\sigma}_R^I - \dot{\sigma}_L^I) \dots \dots \dots (18)$$

$$\frac{d^2 \dot{v}^I}{d\xi^2} = \frac{1}{2}(\dot{\varepsilon}_R^I - \dot{\varepsilon}_L^I) \dots \dots \dots (19)$$

反転時 Γ^{II} の状態量については、

$$0 = \frac{1}{2}(\dot{\sigma}_L^{II} + \dot{\sigma}_R^{II}) \dots \dots \dots (20)$$

$$n(-\dot{\psi} - \dot{v}^{II}) + (l - \xi)\dot{q}^{II} = \frac{1}{2}(\dot{\sigma}_R^{II} - \dot{\sigma}_L^{II}) \dots \dots \dots (21)$$

$$\frac{d^2 \dot{v}^{II}}{d\xi^2} = \frac{1}{2}(\dot{\varepsilon}_R^{II} - \dot{\varepsilon}_L^{II}) \dots \dots \dots (22)$$

たわみ関数および頂点横反力の対称成分および逆対称成分をそれぞれ次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} v^I &= \frac{1}{2}(v^I - v^{II}), & v^b &= \frac{1}{2}(v^I + v^{II}) \\ q^I &= \frac{1}{2}(q^I - q^{II}), & q^b &= \frac{1}{2}(q^I + q^{II}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (23)$$

構成式は Fig. 6 に示した $E \rightarrow E$, $U \rightarrow U$, $C \rightarrow C$, $T \rightarrow T$, $P \rightarrow P$ についてだけ導けばよい。

$E \rightarrow E$, $U \rightarrow U$:

$$\dot{\sigma}_R^I = \dot{\varepsilon}_R^I, \quad \dot{\sigma}_R^{II} = \dot{\varepsilon}_R^{II} \dots \dots \dots (24)$$

$$\dot{\sigma}_L^{II} = \dot{\varepsilon}_L^{II}, \quad \dot{\sigma}_L^I = \dot{\varepsilon}_L^I \dots \dots \dots (25)$$

$C \rightarrow C$:

$$\dot{\sigma}_R^I = \alpha \dot{\varepsilon}_R^I = \dot{\varepsilon}_R^I - \dot{\varepsilon}_R^T, \quad \dot{\sigma}_R^{II} = \dot{\varepsilon}_R^{II} - \dot{\varepsilon}_R^T \dots \dots \dots (26)$$

$$\dot{\sigma}_L^{II} = \alpha \dot{\varepsilon}_L^{II} = \dot{\varepsilon}_L^{II} - \dot{\varepsilon}_L^T, \quad \dot{\sigma}_L^I = \dot{\varepsilon}_L^I - \dot{\varepsilon}_L^T \dots \dots \dots (27)$$

(26), (27) 式から ε_R^T , ε_L^T を消去して、次式が得られる。

$$\dot{\sigma}_R^I = \alpha \dot{\varepsilon}_R^I, \quad \dot{\sigma}_R^{II} = \dot{\varepsilon}_R^{II} - (1 - \alpha)\dot{\varepsilon}_R^I \dots \dots \dots (28)$$

$$\dot{\sigma}_L^{II} = \alpha \dot{\varepsilon}_L^{II}, \quad \dot{\sigma}_L^I = \dot{\varepsilon}_L^I - (1 - \alpha)\dot{\varepsilon}_L^{II} \dots \dots \dots (29)$$

$T \rightarrow T$:

$$\dot{\sigma}_R^I = \dot{\varepsilon}_R^I - (1 - \alpha)\dot{\varepsilon}_R^{II}, \quad \dot{\sigma}_R^{II} = \alpha \dot{\varepsilon}_R^{II} \dots \dots \dots (30)$$

$$\dot{\sigma}_L^{II} = \dot{\varepsilon}_L^{II} - (1 - \alpha)\dot{\varepsilon}_R^I, \quad \dot{\sigma}_L^I = \alpha \dot{\varepsilon}_L^I \dots \dots \dots (31)$$

$P \rightarrow P$:

$$\dot{\sigma}_R^I = \alpha \dot{\varepsilon}_R^I, \quad \dot{\sigma}_R^{II} = \alpha \dot{\varepsilon}_R^{II} \dots \dots \dots (32)$$

$$\dot{\sigma}_L^{II} = \alpha \dot{\varepsilon}_L^{II}, \quad \dot{\sigma}_L^I = \alpha \dot{\varepsilon}_L^I \dots \dots \dots (33)$$

なお、E 状態のフランジ要素の構成式は U 状態の構成式と一致するから、E 状態を U 状態に含めて扱える。

4.2 反転時たわみ変化率の一般解

初期状態から対称限界点を経て定常状態限界点にいたる定常状態経路の追跡過程で梁・柱内に現れる可能性がある 7 通りの領域について、反転時たわみ変化率関数の微分方程式の一般解を導いて列挙する。なお、Appendix 1 に、一般の誘導過程を [U, C] 領域を例にとって示す。

[U, U] 領域 :

$$\begin{aligned} \dot{v}_{UU}(\xi) &= J_{UU}^I \sin k_{EE}\xi + K_{UU}^I \cos k_{EE}\xi \\ &+ \dot{\psi} + (l - \xi)\dot{q}^I / n \dots \dots \dots (34) \end{aligned}$$

Fig. 6 Incremental variations of steady-state behavior of flange elements

$$\begin{aligned} \dot{v}_{UU}^b(\xi) &= \dot{J}_{UU}^b \sin k_{EE}\xi + \dot{K}_{UU}^b \cos k_{EE}\xi \\ &+ (l-\xi)\dot{q}^b/n \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

[U, C] 領域:

$$\begin{aligned} \dot{v}_{UC}^f(\xi) &= \dot{J}_{UC}^f \sin k_{EE}\xi + \dot{K}_{UC}^f \cos k_{EE}\xi \\ &+ \dot{\psi} + (l-\xi)\dot{q}^f/n \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_{UC}^b(\xi) &= \dot{J}_{UC}^b \sin k_{EP}\xi + \dot{K}_{UC}^b \cos k_{EP}\xi \\ &- \dot{J}_{UC}^f \sin k_{EE}\xi - \dot{K}_{UC}^f \cos k_{EE}\xi \\ &+ (l-\xi)\dot{q}^b/n \dots\dots\dots (37) \end{aligned}$$

[C, U] 領域:

$$\begin{aligned} \dot{v}_{CU}^f(\xi) &= \dot{J}_{CU}^f \sin k_{EE}\xi + \dot{K}_{CU}^f \cos k_{EE}\xi \\ &+ \dot{\psi} + (l-\xi)\dot{q}^f/n \dots\dots\dots (38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_{CU}^b(\xi) &= \dot{J}_{CU}^b \sin k_{EP}\xi + \dot{K}_{CU}^b \cos k_{EP}\xi \\ &+ \dot{J}_{CU}^f \sin k_{EE}\xi + \dot{K}_{CU}^f \cos k_{EE}\xi \\ &+ (l-\xi)\dot{q}^b/n \dots\dots\dots (39) \end{aligned}$$

[C, C] 領域:

$$\begin{aligned} \dot{v}_{CC}^f(\xi) &= \dot{J}_{CC}^f \sin k_{EE}\xi + \dot{K}_{CC}^f \cos k_{EE}\xi \\ &+ \dot{\psi} + (l-\xi)\dot{q}^f/n \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_{CC}^b(\xi) &= \dot{J}_{CC}^b \sin k_{PP}\xi + \dot{K}_{CC}^b \cos k_{PP}\xi \\ &+ (l-\xi)\dot{q}^b/n \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

[T, C] 領域:

$$\begin{aligned} \dot{v}_{TC}^f(\xi) &= \dot{J}_{TC}^f \sin k_{EE}\xi + \dot{K}_{TC}^f \cos k_{EE}\xi \\ &+ \dot{\psi} + (l-\xi)\dot{q}^f/n \dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_{TC}^b(\xi) &= \dot{J}_{TC}^b \sin k_{PP}\xi + \dot{K}_{TC}^b \cos k_{PP}\xi \\ &- \dot{J}_{TC}^f \sin k_{EE}\xi - \dot{K}_{TC}^f \cos k_{EE}\xi \end{aligned}$$

(34), (35), (49), (50) 式を並べかえて, 行列表示すると次のように書ける。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{\Phi}_{UU}^f(\xi) \\ \dot{\Phi}_{UU,\xi}^f(\xi) \\ \dot{\Phi}_{UU}^b(\xi) \\ \dot{\Phi}_{UU,\xi}^b(\xi) \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \dot{v}_{UU}^f(\xi) - \dot{\psi} - (l-\xi)\dot{q}^f/n \\ \dot{v}_{UU,\xi}^f(\xi) + \dot{q}^f/n \\ \dot{v}_{UU}^b(\xi) - (l-\xi)\dot{q}^b/n \\ \dot{v}_{UU,\xi}^b(\xi) + \dot{q}^b/n \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin k_{EE}\xi & \cos k_{EE}\xi & 0 & 0 \\ k_{EE} \cos k_{EE}\xi & -k_{EE} \sin k_{EE}\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin k_{EE}\xi & \cos k_{EE}\xi \\ 0 & 0 & k_{EE} \cos k_{EE}\xi & -k_{EE} \sin k_{EE}\xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{J}_{UU}^f \\ \dot{K}_{UU}^f \\ \dot{J}_{UU}^b \\ \dot{K}_{UU}^b \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (51) \end{aligned}$$

(51) 式の逆関数は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{J}_{UU}^f \\ \dot{K}_{UU}^f \\ \dot{J}_{UU}^b \\ \dot{K}_{UU}^b \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sin k_{EE}\xi & \frac{1}{k_{EE}} \cos k_{EE}\xi & 0 & 0 \\ \cos k_{EE}\xi & -\frac{1}{k_{EE}} \sin k_{EE}\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin k_{EE}\xi & \frac{1}{k_{EE}} \cos k_{EE}\xi \\ 0 & 0 & \cos k_{EE}\xi & -\frac{1}{k_{EE}} \sin k_{EE}\xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\Phi}_{UU}^f(\xi) \\ \dot{\Phi}_{UU,\xi}^f(\xi) \\ \dot{\Phi}_{UU}^b(\xi) \\ \dot{\Phi}_{UU,\xi}^b(\xi) \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (52) \end{aligned}$$

(51), (52) 式のような関係を 7 種類の領域についてまとめると以下のように書ける。

$$\{\dot{\Phi}(\xi)\} = [G(\xi)]\{\dot{J}\} \dots\dots\dots (53)$$

$$\{\dot{J}\} = [G(\xi)^{-1}]\{\dot{\Phi}(\xi)\} \dots\dots\dots (54)$$

ここに,

$$\{\dot{\Phi}(\xi)\} = \begin{Bmatrix} \dot{\Phi}^f(\xi) \\ \dot{\Phi}_{,\xi}^f(\xi) \\ \dot{\Phi}^b(\xi) \\ \dot{\Phi}_{,\xi}^b(\xi) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{v}^f(\xi) \\ \dot{v}_{,\xi}^f(\xi) \\ \dot{v}^b(\xi) \\ \dot{v}_{,\xi}^b(\xi) \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & (l-\xi)/n & 0 \\ 0 & -1/n & 0 \\ 0 & 0 & (l-\xi)/n \\ 0 & 0 & -1/n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{q}^f \\ \dot{q}^b \end{Bmatrix} = \dot{v}(\xi) - [B(\xi)] \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{q}^f \\ \dot{q}^b \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (55)$$

$$+ (l-\xi)\dot{q}^b/n \dots\dots\dots (43)$$

[C, T] 領域:

$$\begin{aligned} \dot{v}_{CT}^f(\xi) &= \dot{J}_{CT}^f \sin k_{EE}\xi + \dot{K}_{CT}^f \cos k_{EE}\xi \\ &+ \dot{\psi} + (l-\xi)\dot{q}^f/n \dots\dots\dots (44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_{CT}^b(\xi) &= \dot{J}_{CT}^b \sin k_{PP}\xi + \dot{K}_{CT}^b \cos k_{PP}\xi \\ &+ \dot{J}_{CT}^f \sin k_{EE}\xi + \dot{K}_{CT}^f \cos k_{EE}\xi \\ &+ (l-\xi)\dot{q}^b/n \dots\dots\dots (45) \end{aligned}$$

[P, P] 領域:

$$\begin{aligned} \dot{v}_{PP}^f(\xi) &= \dot{J}_{PP}^f \sin k_{PP}\xi + \dot{K}_{PP}^f \cos k_{PP}\xi \\ &+ \dot{\psi} + (l-\xi)\dot{q}^f/n \dots\dots\dots (46) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_{PP}^b(\xi) &= \dot{J}_{PP}^b \sin k_{PP}\xi + \dot{K}_{PP}^b \cos k_{PP}\xi \\ &+ (l-\xi)\dot{q}^b/n \dots\dots\dots (47) \end{aligned}$$

ここに, k_{EE} , k_{EP} , k_{PP} は次式で定義される。

$$k_{EE} = \sqrt{n}, k_{EP} = \sqrt{(1+\alpha)n/(2\alpha)}, k_{PP} = \sqrt{n/\alpha} \dots\dots\dots (48)$$

次に, [U, U] 領域について, たわみ, および, たわみ勾配の変化率関数と一般解の積分定数を関係づける式を導く。(34), (35) 式をそれぞれ ξ で微分して次式を得る。

$$\dot{v}_{UU,\xi}^f(\xi) = k_{EE} \{ \dot{J}_{UU}^f \cos k_{EE}\xi - \dot{K}_{UU}^f \sin k_{EE}\xi \} - \dot{q}^f/n \dots\dots\dots (49)$$

$$\dot{v}_{UU,\xi}^b(\xi) = k_{EE} \{ \dot{J}_{UU}^b \sin k_{EE}\xi - \dot{K}_{UU}^b \cos k_{EE}\xi \} - \dot{q}^b/n \dots\dots\dots (50)$$

$$\begin{aligned}
\{j\} &= \begin{Bmatrix} j' \\ j'' \\ j^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j' \\ \dot{K}' \\ j^b \\ \dot{K}^b \end{Bmatrix} \text{ for } [U, U], [C, C], [P, P] \\
&= \begin{Bmatrix} j' \\ j^i \end{Bmatrix} \text{ for } [U, C], [T, C] \\
&= \begin{Bmatrix} j' \\ j^{ii} \end{Bmatrix} \text{ for } [C, U], [C, T] \dots \dots \dots (56)
\end{aligned}$$

(53), (54) 式中の $[G]$, $[G^{-1}]$ は、各場合に次のように表現される。

$$[G_{UU}] = \begin{bmatrix} H_{EE} & 0 \\ 0 & H_{EE} \end{bmatrix}, [G_{UU}^{-1}] = \begin{bmatrix} H_{EE}^{-1} & 0 \\ 0 & H_{EE}^{-1} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (57)$$

$$[G_{UC}] = \begin{bmatrix} H_{EE} & 0 \\ -H_{EE} & H_{EP} \end{bmatrix}, [G_{UC}^{-1}] = \begin{bmatrix} H_{EE}^{-1} & 0 \\ H_{EP}^{-1} & H_{EP}^{-1} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (58)$$

$$[G_{CU}] = \begin{bmatrix} H_{EE} & 0 \\ H_{EE} & H_{EP} \end{bmatrix}, [G_{CU}^{-1}] = \begin{bmatrix} H_{EE}^{-1} & 0 \\ -H_{EP}^{-1} & H_{EP}^{-1} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (59)$$

$$[G_{CC}] = \begin{bmatrix} H_{EE} & 0 \\ 0 & H_{PP} \end{bmatrix}, [G_{CC}^{-1}] = \begin{bmatrix} H_{EE}^{-1} & 0 \\ 0 & H_{PP}^{-1} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (60)$$

$$[G_{TC}] = \begin{bmatrix} H_{EE} & 0 \\ -H_{EE} & H_{PP} \end{bmatrix}, [G_{TC}^{-1}] = \begin{bmatrix} H_{EE}^{-1} & 0 \\ H_{PP}^{-1} & H_{PP}^{-1} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (61)$$

$$[G_{CT}] = \begin{bmatrix} H_{EE} & 0 \\ H_{EE} & H_{PP} \end{bmatrix}, [G_{CT}^{-1}] = \begin{bmatrix} H_{EE}^{-1} & 0 \\ -H_{PP}^{-1} & H_{PP}^{-1} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (62)$$

$$[G_{PP}] = \begin{bmatrix} H_{PP} & 0 \\ 0 & H_{PP} \end{bmatrix}, [G_{PP}^{-1}] = \begin{bmatrix} H_{PP}^{-1} & 0 \\ 0 & H_{PP}^{-1} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (63)$$

$$\begin{aligned}
[H_{EE}] &= \begin{bmatrix} \sin k_{EE}\xi & \cos k_{EE}\xi \\ k_{EE} \cos k_{EE}\xi & -k_{EE} \sin k_{EE}\xi \end{bmatrix} \\
[H_{EP}] &= \begin{bmatrix} \sin k_{EP}\xi & \cos k_{EP}\xi \\ k_{EP} \cos k_{EP}\xi & -k_{EP} \sin k_{EP}\xi \end{bmatrix} \\
[H_{PP}] &= \begin{bmatrix} \sin k_{PP}\xi & \cos k_{PP}\xi \\ k_{PP} \cos k_{PP}\xi & -k_{PP} \sin k_{PP}\xi \end{bmatrix} \\
&\dots \dots \dots (64)
\end{aligned}$$

4.3 境界条件

変化率解を求める問題の未知数は、 $\dot{\psi}$, $\dot{q}'$, $\dot{q}^b$ および各領域の積分定数 $\{j\}$ である。これらは部材端での境界条件および領域間境界での接続条件を満足するように決定される。これらの条件を以下に列挙する。

(a) 固定端条件

$$\begin{Bmatrix} \dot{\psi}'(0) \\ \dot{\psi}''(0) \\ \dot{\psi}^b(0) \end{Bmatrix} = -[B(0)] \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{q}' \\ \dot{q}^b \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (65)$$

(b) 自由端条件

$$\begin{Bmatrix} \dot{\psi}'(l) \\ \dot{\psi}''(l) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (66)$$

(c) 領域間境界での連続条件

領域 i と領域 $i+1$ の間の境界 η_i における連続条件は次のように書ける。

$$\{\dot{\psi}_i(\eta_i)\} = \{\dot{\psi}_{i+1}(\eta_i)\} \dots \dots \dots (67)$$

4.4 変化率解の誘導

要素 1 から要素 i までの各要素についての (53), (54) 式と、各々の要素間境界 $\xi = \eta_1, \dots, \eta_{i-1}$ について書いた (67) 式、および (65) 式を用いることにより、ベクトル $\{\dot{\psi}_i(\xi)\}$ をベクトル $[\dot{\psi}, \dot{q}', \dot{q}^b]^T$ で次のように表すことができる。

$$\begin{aligned}
\{\dot{\psi}_i(\xi)\} &= -[G_i(\xi)][G_i^{-1}(\eta_{i-1})][G_{i-1}(\eta_{i-1})][G_{i-1}^{-1}(\eta_{i-2})] \dots \\
&\dots [G_2^{-1}(\eta_1)][G_1(\eta_1)][G_1^{-1}(0)][B(0)] \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{q}' \\ \dot{q}^b \end{Bmatrix} \\
&= [F_i(\xi)] \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{q}' \\ \dot{q}^b \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (68)
\end{aligned}$$

(55), (68) 式より領域 i のたわみ変化率ベクトルは次式のように表される。

$$\{\dot{v}_i(\xi)\} = [F_i(\xi) + B(\xi)] \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{q}' \\ \dot{q}^b \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (69)$$

自由端に接する領域 m についての (69) 式に $\xi = l$ を代入すれば、自由端の変位成分ベクトル $\{\dot{v}_m(l)\}$ が次式のように書ける。

$$\begin{Bmatrix} \dot{v}_m'(l) \\ \dot{v}_m''(l) \\ \dot{v}_m^b(l) \end{Bmatrix} = [F_m(l) + B(l)] \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{q}' \\ \dot{q}^b \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (70)$$

(68) 式に $\xi = l$ を代入した式の第 1 および第 3 行の式を (66) 式に代入すれば、2 個の自由端条件式が次のように書ける。

$$\begin{bmatrix} F_{m11}(l) & F_{m12}(l) & F_{m13}(l) \\ F_{m31}(l) & F_{m32}(l) & F_{m33}(l) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{q}' \\ \dot{q}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dots \dots (71)$$

定常状態経路のパラメータ τ として、定常状態の変化に伴って単調に増加するどのような変数を選んででも任意である。対称定常状態経路の追跡方法と対称限界の求め方は、Appendix 2 に示されている。対称限界後の経路追跡には、経路パラメータ τ として部材中央の逆対

称たわみ成分 $\dot{v}^b(l/2)$ を選ぶ。これより次式が成り立つ。

$$\dot{v}^b(l/2)=1 \dots\dots\dots (72)$$

中央断面を含む領域の番号を h とする。関数ベクトル $\{\dot{v}\}$ の中央断面での値は次式のように表される。

$$\begin{Bmatrix} \dot{v}_h^f(l/2) \\ \dot{v}_{h,e}^f(l/2) \\ \dot{v}_h^b(l/2) \\ \dot{v}_{h,e}^b(l/2) \end{Bmatrix} = [F_h(l/2) + B(l/2)] \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{q}^f \\ \dot{q}^b \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (73)$$

F_h は領域 h に対する行列 F を表す。(73) 式の第 3 行目の式を (72) 式に代入すれば次の条件式が求まる。

$$[F_{h31}(l/2) \quad F_{h32}(l/2) \quad F_{h33}(l/2) + l/(2n)] \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{q}^f \\ \dot{q}^b \end{Bmatrix} = 1 \dots\dots\dots (74)$$

(71) と (74) 式を合わせて、次の 3 元連立方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} F_{m11}(l) & F_{m12}(l) & F_{m13}(l) \\ F_{m31}(l) & F_{m32}(l) & F_{m33}(l) \\ F_{h31}(l/2) & F_{h32}(l/2) & F_{h33}(l/2) + l/(2n) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{q}^f \\ \dot{q}^b \end{Bmatrix} = [S] \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{q}^f \\ \dot{q}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (75)$$

(75) 式の係数行列が正則であれば、 $\dot{\psi}$ 、 $\dot{q}^f$ 、 $\dot{q}^b$ が一意に決まる。この解を (69) 式に代入すれば、各領域のたわみ変化率およびたわみ勾配変化率の対称および反対称成分が得られる。さらに (23) 式を用いれば、左右反転時のたわみおよびたわみ勾配 $\dot{v}^I$ 、 $\dot{v}^{II}$ 、 $\dot{v}_{e,I}^I$ 、 $\dot{v}_{e,I}^{II}$ が導かれる。反転時応力変化率は、(17)、(18) および (20)、(21) 式から導かれる次式より求められる。

$$\dot{\sigma}_h^I(\xi) = -\dot{\sigma}_L^I(\xi) = n[\dot{\psi} - \dot{v}^I(\xi) - (l-\xi)\dot{q}^I] \dots\dots\dots (76)$$

$$\dot{\sigma}_h^{II}(\xi) = -\dot{\sigma}_L^{II}(\xi) = n[\dot{\psi} - \dot{v}^{II}(\xi) - (l-\xi)\dot{q}^{II}] \dots\dots\dots (77)$$

各フランジ要素の反転時ひずみ変化率および残留塑性ひずみの変化率は、(24)～(33) 式から該当する構成式を用いて求めることができる。

5. 定常状態限界条件と定常状態限界解

この問題の対称限界については、既に厳正解が導かれている^{4)～6)}。これを初期解として、前節までに示された解析を実行すれば対称限界後の非対称定常状態経路を追跡できる。ただし、対称限界での変化率だけは、(75) 式の係数行列 $[S]$ が特異 (singular) となるため、変化率解を (75) 式から一意に決定できない。この特異点での取り扱いについては文献 13) に説明がなされている。

定常状態の安定・不安定に対して適切な定義を与えることができれば、定常状態限界を「定常状態経路上で定常状態の安定性が初めて失われる定常状態である」と定義できるはずである。これらの定義に従って、定常状態の安定性条件を導き、定常状態限界を安定限界条件式に

Fig. 7 Steady-state limit condition for continuum models

よって特徴づけ、これを用いて定常状態限界解を求めるのが最も一般性のある望ましい方法であろう。しかし、現在のところこのような一般理論の構築は今後の研究課題である。

本報では、この問題の定常状態限界が、「定常状態経路上で頂点たわみ振幅が極大値をとる」という条件によって特徴づけられると考える。すなわち、定常状態限界を定常状態経路の極限点 (limit point of steady-state path) と考える。定常状態経路が滑らかな場合の定常状態限界は Fig. 7 の○印で示され、次式を満足する。

$$\dot{\psi} = 0 \dots\dots\dots (78)$$

極限点以上の頂点たわみ振幅レベルでは、極限点の近傍にいかなる定常状態解も存在しないことから、履歴挙動は定常状態に収束することはなく、発散現象が発生すると推論できる。

また、弾塑性安定論からの類推により、分岐後経路が 0 または負の勾配を持つ定常状態経路の分岐点も定常状態限界になると考えられる。しかし、このような分岐点をもつ経路は、極限点を示す経路の特異な極限として認識できることから、「定常状態限界を定常状態経路の極限点である」と考えることは、相当一般性のある基準 (criterion) であると考えられる。

上記の議論に基づき、以下の手順に従って定常状態限界解を求める。

- (S1) 対称限界理論に従って対称限界解を求める。
- (S2) 対称限界後の定常状態経路を、4 節で提示した増分解析法を用いて追跡する。
- (S3) (78) 式の条件 $\dot{\psi} = 0$ を満たす定常状態経路の極限点を見だし、これを定常状態限界の予測解とする。

6. 近似解析法

前節までに提示した理論に従って解析を実行すれば、定常状態限界の厳正な予測解を得ることができる。しか

し、対称限界から定常状態限界に至るまでの間に梁-柱内の領域分布は複雑に変化し、領域間境界は振幅の増加に連れて連続的に移動する。これらの諸因子をすべて正確に考慮して定常状態変化率量に関する方程式 (75) を誘導し、(16) 式の積分を実行して定常状態経路の解析解を求めることは実際上不可能である。したがって、定常状態限界の解を実際に求めようとすれば、何らかの近似仮定を導入しなければならない。この節では、本報の理論に従って具体的に解を求めるための数値解析法を提示する。

6.1 近似解析モデル

4.1 節で述べたように、フランジの状態領域間の境界は定常状態の変化に伴って連続的に移動する。もし定常状態経路を厳密に追跡しようとすれば、境界の連続的移動を正確に考慮に入れた解析を行わなければならない。通常の釣合経路解析問題でも弾塑性領域間境界の連続的移動が生じ、線形ひずみ硬化サンドウィッチ梁-柱について、Cicala⁹⁾、中村¹⁰⁾らが厳密な定式化の方法を示している。しかし、解析解が得られるのは極く単純な問題に限られ、分岐後経路解析などでは結局は増分型の数値解析によらざるをえない⁹⁾。中村、上谷は、弾塑性領域間境界の連続的移動の効果を移動節点と摂動法を用いて考慮した有限要素解析法を提案している¹¹⁾。このように、境界移動を連続的に取り扱うことも可能であるが、ここではより簡便な離散的取扱い法を採用する。

梁-柱モデルを Fig. 8 に示すように材軸方向に分割し、分割された単位を要素とよぶ。ただし、この要素分割は有限要素法や差分法のように独立な未知状態量の関数を有限自由度化近似するためのものではなく、要素内の左右フランジに対してそれぞれ一定の構成式を適用す

Fig. 8 Discretized model for incremental analysis of steady-state path

ることにより、構成則の適用だけを要素ごとに離散化して行うためのものである。個々の要素の左右フランジは要素全域でそれぞれ同種の周期挙動を呈すると見なし、要素中央点で評価した構成式を近似的に適用する。したがって、この近似モデルの状態領域間境界は Fig. 9 に示されるように要素単位で不連続に移動する。

6.2 定常状態経路の増分解析

定常状態経路の追跡は増分型解析によって行う。 j 回の増分解析を行った結果、定常状態経路パラメータ値 τ_j の定常状態 Λ_j が既に求められているとする。経路パラメータが $\Delta\tau_{j+1}$ だけ増加した時の定常状態 Λ_{j+1} を求めるための支配式を誘導するのが本節の目的である。 Λ_j における定常状態変数の値を $(\cdot)_j$ 、経路パラメータ τ に対する 1 次変化率を $(\dot{\cdot})_j$ とすれば、 Λ_{j+1} での値 $(\cdot)_{j+1}$ は一般に次の近似式で表される。

$$(\cdot)_{j+1} = (\cdot)_j + \Delta(\cdot)_{j+1} \approx (\cdot)_j + (\dot{\cdot})_j \Delta\tau_{j+1} \cdots (79)$$

ただし、ここで用いるモデルの状態領域間境界は各増分区間中移動しないから、すべての状態変数の変化は経路パラメータに関して線形となり、(79) 式の近似等号は厳密な等号で置き換えられる。

6.3 構成則に関する矛盾の検出

Fig. 10(a), (b) にそれぞれ示されるように、増分前の既知の定常状態 Λ_j において定常状態線 C を呈しているフランジ要素は、 Λ_j の直後に定常状態線 C を呈し続ける場合と、定常状態線 U を呈するようになる場合の 2 通りの可能性がある。前者の応答は $\dot{\sigma}_k^I \geq 0$ または $\dot{\sigma}_k^{II} \geq 0$ によって、後者の応答は $\dot{\sigma}_k^I < 0$ または $\dot{\sigma}_k^{II} < 0$ によってそれぞれ特徴づけられる。前者の応答を呈するフランジ要素に対しては C→C の変化を表す構成式 (28) または (29) 式が適用され、後者の応答を呈するフランジ要素に対しては U→U の変化を表す構成式 (24) または (25) 式が適用されなければならない。したがって、定常状態 Λ_j において定常状態線 C を呈しているフランジ要素については、求められた応力およびひずみの変化率解が解析に際して仮定された構成式の選択が正しいものであ

Fig. 9 Stepwise propagation of an inter-region boundary in the discretized model

Fig. 10 Possible incremental variations from a steady-state behavior C

Table 1 Consistency check of presumed constitutive equations for an flange element of type C

Assumed constitutive equation	Response rate of reversal-point stress	Judgement
C → C : (28) or (29)	$\dot{\sigma}_R^I \geq 0$ or $\dot{\sigma}_L^II \geq 0$	consistent
	$\dot{\sigma}_R^I < 0$ or $\dot{\sigma}_L^II < 0$	contradictory
U → U : (24) or (25)	$\dot{\sigma}_R^I \leq 0$ or $\dot{\sigma}_L^II \leq 0$	consistent
	$\dot{\sigma}_R^I > 0$ or $\dot{\sigma}_L^II > 0$	contradictory

Fig. 11 Possible incremental variations from a steady-state behavior T

Table 2 Consistency check of presumed constitutive equations for an flange element of type T

Assumed constitutive equation	Response rate of reversal-point stress	Judgement
T → T : (30) or (31)	$\dot{\sigma}_R^II \leq 0$ or $\dot{\sigma}_L^I \leq 0$	consistent
	$\dot{\sigma}_R^II > 0$ or $\dot{\sigma}_L^I > 0$	contradictory
U → U : (24) or (25)	$\dot{\sigma}_R^II \geq 0$ or $\dot{\sigma}_L^I \geq 0$	consistent
	$\dot{\sigma}_R^II < 0$ or $\dot{\sigma}_L^I < 0$	contradictory

たかどうかを Table 1 の基準に従って検定する必要がある。

また、定常状態 Λ_j において定常状態線 T を呈しているフランジ要素についても、Fig. 11(a), (b) にそれぞれ示されるように、 Λ_j の直後に定常状態線 T を呈し続ける場合と、定常状態線 U を呈するようになる場合の 2 通りがあり、Table 2 の基準に従って類似の検討を行う必要がある。

変化率応答の予測解が求まった段階で、定常状態 Λ_j

において定常状態線 C または T を呈しているすべてのフランジ要素について、選択された構成式が変化率応答の予測解と矛盾していないかどうかを上記の方法に従って検定する。もし、いかなるフランジ要素においても矛盾が検出されなければ、その予測解は正解として採用され、これを用いて増分後の定常状態 Λ_{j+1} を求める。これに対し、いずれかのフランジ要素で構成式の矛盾が検出された時は、矛盾の生じたすべてのフランジ要素に対し構成式の変更を行って、再度変化率の予測解析を行う。この繰返し演算過程は矛盾がなくなるまで継続する必要がある。しかし、この繰返し演算過程は、釣合経路追跡のための複合非線形解析と同様に、無限循環に陥る可能性がある。これに対しては、文献 12) で提案した方法を用いて矛盾のない構成式の組み合わせを見いだすことができると考えられる。

6.4 増分長の決定

定常状態の反転時釣合状態のすべての支配式、すなわち釣合式、ひずみ・たわみ関係式、構成式および境界条件式は、要素間境界の位置を表す変数を除く他のすべての変数に関して線形である。このことは、モデル内部の要素間境界が移動しない限り、つまり各フランジ要素が同種の周期挙動を呈し続ける限り、すべての変数は定常状態経路パラメータ τ に関して線形に変動する。このような範囲では、既知の定常状態 Λ_j からの変数の増分変化量 $\Delta(\cdot)_{j+1}$ は Λ_j における変化率 $(\cdot)_j$ にパラメータ増分 $\Delta\tau_{j+1}$ を乗じて厳密に求めることができる。

$$\Delta(\cdot)_{j+1} = (\cdot)_j \Delta\tau_{j+1} \quad (80)$$

ところが、どれかのフランジ要素で、例えば Fig. 12 に実線矢印で示されるような周期挙動状態の移行が生じれば、定常状態経路の線形性は失われ、その後は (80) 式が成立しなくなる。したがって、このような周期挙動状態の移行が生じたところで増分を打ち切る必要がある。以下では、要因ごとの打ち切り条件式と増分長の算定式を示す。なお、フランジ要素は至るところ同種の周期挙動状態を呈するものとし、要素中央点での応力、ひずみによって判定する。

(a) U → C の移行 (Fig. 12(a))

右側のフランジ要素においてこの種の移行が発生した瞬間の定常状態では、次の条件式が満たされる。

$$\sigma_R^I = \alpha \epsilon_R^I + (1 - \alpha) \sigma_Y = \epsilon_R^I - \epsilon_R^T \quad (81)$$

(81) 式より ϵ_R^I を消去すると次式が導かれる。

$$\sigma_R^I = \sigma_Y + \alpha \epsilon_R^T / (1 - \alpha) \quad (82)$$

定常状態 Λ_j の σ_R^I を σ_{Rj}^I で表すと、 Λ_j 後の σ_R^I は次式のように表される。

$$\sigma_R^I = \sigma_{Rj}^I + \dot{\sigma}_{Rj}^I \Delta\tau \quad (83)$$

(83) 式で表される σ_R^I が、(82) 式の右辺の値を持つとき U → C の移行が生じる。(83) 式を (82) 式に代入すれば、この打ち切り要因に対する増分長 $\Delta\tau$ が、次式

Fig. 12 Termination conditions of a linearized step of the incremental analysis

Fig. 13 Steady-state limit condition for the discretized models
によって算定できる。

$$\Delta\tau = \{\sigma_Y - \sigma_{RJ}^I + \alpha \varepsilon_R^I / (1 - \alpha)\} / \dot{\sigma}_{RJ}^I \quad (84)$$

(84) 式の $\Delta\tau$ は、他のフランジ要素が同種の周期挙動を保持し続けると仮定した場合、当該のフランジ要素において U → C の移行が生じるまでの経路パラメータ増分値を示している。また、左側フランジ要素でこの移行が発生する場合の式も同様に導ける。

(b) U → T の移行 (Fig. 12(b))

打ち切り条件式：

$$\sigma_R^I = \alpha \varepsilon_R^I - (1 - \alpha) \sigma_Y = \varepsilon_R^I - \varepsilon_R^I \quad (85)$$

増分長算定式：

$$\Delta\tau = \{-\sigma_Y - \sigma_{RJ}^I + \alpha \varepsilon_R^I / (1 - \alpha)\} / \dot{\sigma}_{RJ}^I \quad (86)$$

(c) C → P および T → P の移行 (Fig. 12(c), (d))

打ち切り条件式：

$$\sigma_R^I - \sigma_R^I = 2 \sigma_Y \quad (87)$$

増分長算定式：

$$\Delta\tau = \{2 \sigma_Y - (\sigma_{RJ}^I - \sigma_{RJ}^I) / (\dot{\sigma}_{RJ}^I - \dot{\sigma}_{RJ}^I)\} \quad (88)$$

以上のように求めたすべての限界増分値の中の正の最小値を、次段階の定常状態 Λ_{j+1} を決定するための増分長 $\Delta\tau_{j+1}$ として選ぶ。各変数の増分量は既に求まっている変化率に $\Delta\tau_{j+1}$ を乗じて得られ、これを Λ_j の値に加えることにより Λ_{j+1} の値が算出される。

$$(\)_{j+1} = (\)_j + (\dot{\ })_j \Delta\tau_{j+1} \quad (89)$$

6.5 近似解析モデルの定常状態限界条件

本節の解析では、要素領域間境界の伝播を要素単位で

不連続に進行すると近似したので、定常状態経路は Fig. 13 に示すように折れ線状になる。定常状態限界点は、勾配が正から 0 または負に不連続に変化する○印で表される極限点となる。これは、次式が初めて満たされる点である。

$$\dot{\psi} \leq 0 \quad (90)$$

本節の近似解析法では、(78) 式に代わって (90) 式を定常状態限界条件式として用い、定常状態経路上で (90) 式がはじめて満たされる点を定常状態限界解とする。

7. 結 語

線形ひずみ硬化・サンドウィッチ片持梁-柱モデルについて、繰返し载荷に対する履歴挙動を追跡することなく、定常状態限界を予測することができる理論を提示した。この理論は次のように要約される。

- (1) 定常状態限界を定常状態経路の極限点であるとする基本的考えに基づいている。
- (2) 定常状態の変化率方程式を導き、これに基づく増分解析法により定常状態経路を逐次追跡する。
- (3) 定常状態経路の極限点を規定する式を提示した。この式を最初に満足する定常状態を定常状態限界予測解とする。
- (4) この理論の基本的枠組みは一般的なものであり、種々の構造物の定常状態限界を予測する問題に対しても適用できる。

さらに、上記の理論に基づき、梁-柱を材軸方向に要素分割する方法により定常状態限界の近似解を求める数値解析法を提示した。

Appendix 1 : [U, C] 領域の微分方程式の誘導

[U, C] 領域の構成式は (25), (28) 式で与えられる。(19) 式に (25) 式を代入し、(17), (18) 式を用いて応力変化率を消去すると次の微分方程式が得られる。

$$\dot{v}_{UC,EE} / (k_{EP})^2 + \dot{v}_{UC} - \dot{\psi}(1 - \xi) \dot{q}^I / n = 0 \quad (A 1.1)$$

ここに、 k_{EP} は、(48) 式で定義されている。(A 1.1) 式の一般解は次のように書ける。

$$\dot{v}_{UC} = \dot{J}_{UC}^I \sin k_{EP} \xi + \dot{K}_{UC}^I \cos k_{EP} \xi + \dot{\psi} + (1 - \xi) \dot{q}^I / n \quad (A 1.2)$$

(19) と (22) 式の差をとり、2 で割って得られる式に、(23) 式を用いると次式が得られる。

$$\dot{v}_{uc,ef} = (\dot{\varepsilon}_h^I - \dot{\varepsilon}_h^I) - (\dot{\varepsilon}_h^{II} - \dot{\varepsilon}_h^{II})/4 \dots \dots \dots (A 1.3)$$

(A 1.3) 式に (25)、(28) 式および (18)、(21) 式を順次代入し、(23) 式を用いると次式が導かれる。

$$\dot{v}_{uc,ef}/(k_{EE})^2 + \dot{v}' - \psi - (l - \xi)\dot{q}'/n = 0 \dots \dots \dots (A 1.4)$$

(A 1.4) 式の一般解は、(36) 式のように書ける。(23) 式から導かれる次の (A 1.5) 式に、(A 1.2)、(36) 式を代入すれば、(37) 式が得られる。

$$\dot{v}_{uc} = \dot{v}_{uc}^b - \dot{v}_{uc}^f \dots \dots \dots (A 1.5)$$

Appendix 2：対称定常状態経路の追跡と対称限界の求め方

対称定常状態では、定常状態変化率の方程式が対称成分だけを含む式と逆対称成分だけを含む式とに完全に分離される性質がある。そのため、(71) 式は次のようになる。

$$F_{m11}(l)\dot{\psi} + F_{m12}(l)\dot{q}' = 0 \dots \dots \dots (A 2.1)$$

$$F_{m33}(l)\dot{q}^b = 0 \dots \dots \dots (A 2.2)$$

対称定常状態経路の追跡は (A 2.1) 式を用いて行うことができる。経路パラメータ τ として頂点たわみ振幅 ψ を選ぶのが自然であり、このとき次式が成り立つ。

$$\dot{\psi} = 1 \dots \dots \dots (A 2.3)$$

(A 2.1)、(A 2.2) 式より $\dot{q}'$ が定まる。

$$\dot{q}' = -F_{m11}(l)/F_{m12}(l) \dots \dots \dots (A 2.4)$$

(A 2.3)、(A 2.4) 式を代入すれば他のすべての対称成分の値が定まり、対称定常状態経路の増分解が求められる。

対称限界は (A 2.2) 式を用いて決定できる。対称限界は次の条件によって特徴づけられる。

対称限界条件：「頂点たわみ振幅に対する定常状態変化率を求める問題において、ゼロでない逆対称成分を含む解が少なくとも一つは存在する。」

逆対称成分に関する方程式 (A 2.2) は斉次式であり、 $\dot{q}^b = 0$ を解として持つが、係数が 0 のときにだけ非ゼロ解が存在する。したがって、対称限界条件は次式で与えられる。

$$F_{m33}(l) = 0 \dots \dots \dots (A 2.5)$$

(68) 式からもわかるように、 $F_{m33}(l)$ はすべての要素の剛性に依存する。頂点たわみ振幅の増加によって要素の周期挙動の状態が変化するたびに $F_{m33}(l)$ の値は不連続に変化する。領域間境界が頂点たわみ振幅の増加に伴って連続的に移動するモデルでは、 $F_{m33}(l)$ の値も連続的に変化する。この場合、(A 2.5) 式が初めて満たされるときが対称限界解である^{4)~8)}。しかし、本報で用いられる要素分割されたモデルでは、 $F_{m33}(l)$ の値が不連続に変化するから、一般に $F_{m33}(l)$ が厳密に 0 となることはなく、最初に符号が変化したときを近似的に対称限界解とする。

参考文献

- 1) 中村恒善, 上谷宏二, 澤木英二: 高軸圧を受ける鋼梁-柱の交番塑性曲げ, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (北海道), pp.1363~1364, 1978
- 2) 横尾義貴, 中村恒善, 上谷宏二, 竹脇 出: 繰返し両振り曲げを受ける鋼片持梁-柱の構面内変形の収束と発散に関する実験的研究, 日本建築学会論文報告集, No.316, pp.41~52, 1982
- 3) 上谷宏二: 京都大学博士論文, 序章, 1984
- 4) 上谷宏二: 京都大学博士論文, 第3章, 1984
- 5) Uetani, K., Nakamura, Tsuneyoshi: Symmetry Limit Theory for Cantilever Beamcolumns Subjected to Cyclic Reversed Bending, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol.31, No.6, pp.449~484, 1983
- 6) Uetani, K.: Uniqueness Criterion for Incremental Variation of Steady State and Symmetry Limit, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol.37, No.4, pp.495~514, 1989
- 7) 中村恒善, 上谷宏二: 鋼構造柱材に対する対称限界理論 (その1: 一般的定式化), 日本建築学会構造系論文報告集, No.398, pp.109~119, 1989
- 8) 中村恒善, 上谷宏二, 以頭秀司: 鋼構造柱材に対する対称限界理論 (その2: 有限要素法を用いた対称限界解析法), 日本建築学会構造系論文報告集, No.408, pp.43~54, 1990
- 9) Cicala, P.: Column Buckling in the Elasto-plastic Range, Journal of the Aeronautical Sciences, Vol.17, pp.508~512, 1950
- 10) 中村恒善: 繰返し横力を受ける線型硬化サンドウィッチ柱の弾塑性挙動 (その1), 日本建築学会論文報告集号外, p.285, 1966
- 11) 横尾義貴, 中村恒善, 上谷宏二: 連続的弾塑性境界伝播のための増分摂動法, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (北陸), pp.723~724, 1974
- 12) 上谷宏二, 森迫清貴, 石田修三: 弾塑性解析における整合剛性選択アルゴリズムについて, 日本建築学会近畿支部研究報告集 (構造系), No.31, pp.185~188, 1991
- 13) Nakamura, Tsuneyoshi, Uetani, K.: Branching of Steady-state Paths of Beam-columns Subjected to Idealized Tip Deflection Cycling, Mechanics of Structures and Machines, Vol.17, No.4, pp.523~549, 1989
- 14) 中村恒善, 上谷宏二, 榎間隆之: 非線形応力~ひずみ関係に従う梁-柱モデルの定常状態限界解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (北海道), pp.805~806, 1986

(1992年1月10日原稿受理, 1992年5月12日採用決定)