梁理論に対する直交異方性弾性板 (Scheibe) 理論と Airy の応力関数を用いた基礎的検討

A FUNDAMENTAL INVESTIGATION ON THE BEAM THEORY BY USING THE ORTHOTROPIC PLATE (SCHEIBE) THEORY AND AIRY'S STRESS FUNCTIONS

山川 哲雄*

Tetsuo YAMAKAWA

The beam theory for a straight uniform bar of narrow rectangular cross section is discussed by using the orthotropic elastic plate (Scheibe) theory and Airy's stress functions in this paper. The Bernoulli-Euler hypothesis in the elementary beam theory is corresponding to the following assumptions of elastic moduli in the orthotropic elastic plate theory. Namely, the transverse shear elastic modulus is infinity as well as the transverse normal elastic modulus, and Poisson's ratios are zero. In a similar way, an equivalent beam theory including the effect of transverse shear deformation and warping can be obtained. On the other hand, Heki presented an analytical solution of the cantilever by using the theory of orthotropic plate (Scheibe). This analytical method is different from the proposed method. Therefore, in this paper a detailed comparison of the accuracy and mechanical property is made through calculation of the cantilever.

Keywords : *beam theory, orthotropic elastic theory, Bernoulli-Euler hypothesis, Timoshenko's beam theory, Airy's stress function, cantilever*

梁理論, 直交異方性弾性理論, バルヌーイ・オイラーの仮定, チモシェンコ梁理論,
エアリーの応力関数, 片持梁

1. 序

初等梁理論やせん断変形考慮の梁理論は建築の分野のみならず, 広く工学の分野で現在でもよく利用されている。特に, 最近では超々高層ビルの剛性設計法や簡便解析法などに関して, 梁理論への期待が高まりつつある。本研究はこれらの梁理論に平面応力場の直交異方性弾性板 (Scheibe) 理論と Airy の応力関数を用いて, 二次元弾性論の立場から考察を加えた一つの試みである。

梁理論のよさは梁の材長, せいおよび幅で構成された三次元の等方等質弾性体を, 材軸方向の座標パラメータのみで構成された一次元弾性体として取り扱うことにある^{1)~7)}。したがって, 梁の材軸に関する座標パラメータで定義された断面力や変位が求まれば, 断面内の応力場や変位場が材軸と断面の幾何学的関係から一義的に定まる。初等梁理論の根幹をなす Bernoulli-Euler の仮定とは鷺津¹⁾, 川井・藤谷²⁾および高島³⁾によれば, 基準状態において材軸線に垂直であった横断面は, 変形状態においても変形した材軸に垂直な横断面を構成し, また横断

面の面内ひずみは一切存在しないという条件である。ただし, 鷺津はこの Bernoulli-Euler の仮定に先だち, 断面内無応力の仮定を設定し, これらの2つの基本仮定より初等梁理論は構成されていると述べている¹⁾。この断面内無応力の仮定は梁の応力-ひずみ関係式を誘導することになる^{1), 6)}。また, これと同じ梁の応力-ひずみ関係式が断面内無ひずみの仮定とポアソン比零の仮定を併用することにより, 誘導されることも藤谷によって示されている⁶⁾。小林はポアソン比零の仮定が, 断面剛の仮定に相当することを述べている⁷⁾。一方, 川井・藤谷によれば, 初等梁理論は V. Z. Vlasov による断面不変の仮定がその出発点とされている²⁾。その断面不変の仮定として川井・藤谷は, 断面剛の仮定を採用している。したがって, この仮定を採用すれば, いわゆる梁の断面内の変位は平行移動と回転からなる剛体変位であることを, 川井・藤谷は強調している²⁾。

このように, 各著者によって梁理論の基本仮定に関する解釈や概念, さらには用語までもがまちまちに用いら

* 琉球大学工学部建設工学科 助教授・博士(工学)

Assoc. Prof., Dept. of Architectural Engineering, Faculty of Engineering, Univ. of the Ryukyus, Dr. Eng.

れている。しかも、これらの論述は基本的には等方等質弾性理論をその基礎においている。特に、せいの大きい梁 (deep beam) に関しては、梁理論解と等方性弾性理論解との比較検討および検証例がよく見られる^{8)~16)}。しかし、異方等質弾性理論に基づいた梁の研究は著者が知る限り本研究^{17)~19)}と日置による研究²⁰⁾を除いて見あたらないようである。そういう中であって、本研究では等方等質な材料で構成された従来の梁に、平面応力場の直交異方性弾性理論と Airy の応力関数を適用して、梁の基本的力学特性を再考察しようとする一つの試みである。すなわち、本研究の主なる目的とするところは、等方等質な材料で構成された梁に初等梁理論として Bernoulli-Euler の仮定を導入することは、等方等質な梁を異方等質な梁に置き換えることに相当するという新しい解釈も成立することを示すことにある。

著者にとって、このように梁理論を直交異方性 Scheibe 理論で置き換えようとした最初の着想は、文献 17) までさかのぼることができる。文献 17) で著者はせん断変形を考慮した梁理論相当解のみならず、初等梁理論解に対する基礎式とこれらのフーリエ級数型の応力関数解を明示している。これらの解はその後、文献 18), 19) で著者により初等梁理論の一考察としてさらに一部検討されている。これらの研究ではフーリエ級数型の応力関数解のみしか取り扱っていない。このことを考えると、著者は中間荷重がフーリエ級数で与えられた、または展開された梁の支配方程式に関する特解を明らかにし、またそれを用いて梁理論を検討したことになる。したがって、たわみを未知関数とする梁の 4 階の常微分方程式の一般解、すなわち代数型多項式で表された余解と特解を誘導することができなかった。そこで、本研究では初めて代数型応力関数を導入し、その応力関数解が梁の微分方程式の一般解に一致することを明らかにする。

一方、著者と同じ異方等質弾性理論の立場から日置の先駆的研究がある。日置は文献 21) で円筒シェル屋根の片持梁型の薄膜解から、シェルの曲率半径を無限大におくことによって自動的に $\sigma_y = 0$ を仮定した片持長方形断面梁の異方性 Scheibe の解を誘導している。この異方性 Scheibe の解は平面応力場の二次元弾性理論に基づいた解法として、その後あらためて文献 20) に Airy の応力関数によらない方法を用いて詳述されてある。さらに、文献 20) には $\sigma_y = 0$ の仮定をおかず、著者と同じ異方性 Scheibe 理論に立脚し、初等梁理論解を中間荷重や物体力 (体積力) が作用しない場合に限定して、取り扱いが多少複雑であるが、Airy の応力関数より一般的なポテンシャル関数解を用いて新たに示されている。このように、同じ直交異方性 Scheibe 理論を用いた研究は著者^{17)~19)}と日置²⁰⁾によって別々になされてきたが、著者は断面内無ひずみの仮定、日置は断面内無応

力の仮定がそれぞれ研究の出発点であったと考える。本研究ではこれらの相違も合わせて明らかにする。ただし、これらの検討はすべて直線材に限定し、梁せいと材長の関係に注目し、梁幅の影響については検討の対象外とする。したがって、弾性理論を梁に適用するにあたっては平面応力場を仮定する。

2. 平面応力場の直交異方性弾性板 (Scheibe) 理論に基づく基礎式

異方性理論解としての本解と日置解に用いられる各基本仮定と、梁理論解における基本仮定の関係を明らかにするために、これらの関係を簡潔に表—1 に示す。なお、本論で考察の対象とするせん断変形を考慮した梁理論解とは、表—1 の基本仮定 1, 2, 3 が成立する Timoshenko 梁理論解に代表される古典的な梁理論解を意味する。本論で用いる基本仮定に関して、以下のように定義する。

Bernoulli-Euler の仮定：表—1 の基本仮定 1, 3, 4 からなる。

断面内無ひずみの仮定：表—1 の基本仮定 1 であり、図—1 に示した yz 面の面内のひずみがすべて零である。しかし、 yz 面の面外方向 (x 軸方向) への変位 (warping) は生じる。

表—1 梁理論における基本仮定と各解の関係

基本仮定	異方性理論解		梁理論解	
	本解	日置解	初等梁	せん断変形考慮の梁
1) 断面内無ひずみ ($\epsilon_y = \epsilon_x = \gamma_{yz} = 0$)	○	× ($\epsilon_y \neq 0$)	○	○
2) 断面内無応力 ($\sigma_y = \sigma_x = \tau_{yz} = 0$)	× ($\sigma_y \neq 0$)	○	○*	○*
3) 平面保持 ($\epsilon_x = \phi y$)	×	×	○	○
4) 法線保持 ($\gamma_{xy} = 0$)	×	×	○	×

注 1) ϕ は曲率である。注 2) * は文献 1) による定義である。

図—1 梁の寸法、座標系と各微小要素に生じる面内応力成分

断面不変の仮定：表—1の基本仮定1と3からなり，断面剛の仮定に同じである。すなわち， yz 面の面内ひずみのみならず，面外方向へのwarpingも一切生じない。

以上のような定義のもとで本論を展開するが，これらの仮定を式で表—1のように定義する場合は，仮定を条件式と読みかえることにする。

平面応力場の異方性理論を図—1に示す座標系の xy 面に適用するので， z 軸方向が異方性板(Scheibe)の厚さ方向，すなわち梁幅方向になる。したがって，文献8)によれば(1)式で与える応力場を仮定することになる。

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0 \quad (1)$$

(1)式より梁断面内のひずみ場に関する応力 σ_y ， σ_z ， τ_{yz} のうち， σ_z と τ_{yz} を無応力と仮定することになる。さらに，ポアソン比が零，および xz 面における τ_{xz} が零で， σ_x の分布が梁幅方向(z 軸方向)に一樣であることを考慮すれば，その方向に梁は変形することなく， xy 面内での変形に限定される。一方， σ_y は梁の上下面に分布荷重(本論文では，梁のたわみに関する4階の微分方程式における特解を構成する分布荷重を中間荷重と定義し，物体力はこれに含まれない)が作用しても零になる特殊な場合(純せん断場)があるが，一般に零ではない。しかし，その場合でもポアソン比が零で材軸と直交方向のヤング係数 E_y が無限大であれば，断面内のひずみは一切生じない。

直交異方性の主方向1, 2と直交座標系の x, y 軸が一致する場合の直交異方性弾性場を支配する方程式は，Airyの応力関数 F を用いて(2)式のように定式化される⁸⁾。

$$\frac{1}{E_y} F'''' + \left(\frac{1}{G} - \frac{2\nu_x}{E_x} \right) F'''' + \frac{1}{E_x} F'''' = 0 \quad (2)$$

ここに，

$$\cdot = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \cdot = \frac{\partial}{\partial y}$$

異方弾性場の構成方程式は(3)式で与えられている⁸⁾。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E_x}{1 - \nu_x \nu_y} (\epsilon_x + \nu_y \epsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E_y}{1 - \nu_x \nu_y} (\epsilon_y + \nu_x \epsilon_x) \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

しかし，これらの弾性係数間にはMaxwell-Bettiの相反定理より，(4)式の関係が成立しなければならない。

$$\frac{\nu_x}{E_x} = \frac{\nu_y}{E_y} \quad (4)$$

一方，等方弾性場の構成方程式は(5)式を(3)式に代入することにより，またその支配方程式は(5)式を(2)式に代入することにより，それぞれ容易に求められる。

$$E_x = E_y = E, \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad \nu_x = \nu_y = \nu \quad (5)$$

藤谷によれば，三次元等方等質弾性体の構成方程式に断面内無ひずみの条件式(表—1の基本仮定1)を代入すると，(6)式が得られる⁶⁾。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \epsilon_x \\ \sigma_y &= \sigma_z = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \epsilon_x \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy}, \quad \tau_{xz} = G \gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(6)式でポアソン比 ν を零に置くと，梁の応力-ひずみ関係式が(7)式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= E \epsilon_x, \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0 \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy}, \quad \tau_{xz} = G \gamma_{xz} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

一方，ポアソン比を零におかず，断面内無応力の条件式(表—1の基本仮定2)を三次元等方等質弾性体の構成方程式に代入しても，(7)式が得られることは驚津によってすでに指摘されている¹⁾。表—1の基本仮定2は驚津が初等梁理論に，Bernoulli-Eulerの仮定とともに導入した基本仮定の一つでもある¹⁾。これに対し，著者は(1)式より表—1の基本仮定2のうち， $\sigma_z = \tau_{yz} = 0$ は仮定することになるが， $\sigma_y = 0$ は仮定していない。梁に中間荷重が作用する場合のことを考えると，力の釣合い上 $\sigma_y = 0$ は一般に仮定できないからである。なお，藤谷⁶⁾や小林⁷⁾と同様にポアソン比は零と仮定する。ただし，(8)，(10)式は(4)式で与えたMaxwell-Bettiの相反定理を満足しなければならないことを考慮し， E_y が無限大で， ν_x, ν_y が零であれば，これらの値がそれぞれ極限值として存在するという認識に立脚する必要がある。以上の考察より，直交異方性弾性場理論において弾性係数の値を適切に仮定すれば，梁理論相当解を誘導することが可能であると思われる。そこで，せん断変形を考慮した梁理論に相当する支配方程式を得るために，(8)式で与える仮定を(2)式に代入することにより，(9)式を誘導する¹⁷⁾⁻¹⁹⁾。

$$E_y = \infty, \quad \nu_x = \nu_y = 0 \quad (8)$$

$$\frac{1}{G} F'''' + \frac{1}{E_x} F'''' = 0 \quad (9)$$

(9)式を誘導するために(1)式と(8)式が仮定されているので，断面内無ひずみの条件式は満足されているが，その他の基本仮定2, 3, 4は満足されていない。表—1に示す本解とは(9)式から求められた解をさす。一方(8)式に加えて，さらに G を(10)式のように無限大におくことによって得られる(11)式の解が，初等梁理論解として一般性を有するかどうかはこれ以後の節で検証する。

$$E_y = G = \infty, \quad \nu_x = \nu_y = 0 \quad (10)$$

$$F'''' = 0 \quad (11)$$

3. 中間荷重および物体力が作用しない場合の代数型応力関数解と梁理論に関する一考察

材に中間荷重や物体力（体積力）がまったく作用しないことを前提に，(2)，(9)，(11) 式のいずれの方程式も満足する代数型応力関数 F として，図—1 に示す座標系のもとで低次から採用していくと，(12) 式が得られる。ただし，(12) 式では材軸上に x 軸が設定されているので，たわみが表現できる y に関する奇関数が採用されている。

$$F = C_{03}\eta^3 + C_{13}(\xi\eta^3 - 3\xi\eta) \dots\dots\dots(12)$$

ここに，

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{2y}{D}$$

C_{03}, C_{13} ：未知積分係数

(12) 式の F から，応力が (13) 式のように整理される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= F'' = \frac{24}{D^2} (C_{03}\eta + C_{13}\xi\eta) \\ \sigma_y &= F''' = 0 \\ \tau_{xy} &= -F'' = \frac{6}{Dl} C_{13}(1 - \eta^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

(13) 式より，未知積分定数 C_{03} は純曲げ挙動に， C_{13} は曲げせん断挙動にそれぞれかかわる係数であることがわかる。(13) 式で与える応力場に中間荷重（梁の上下面に作用する分布荷重）を与えることができないことは明らかである。(13) 式の応力は (12) 式で与えられた応力関数 F を単に微分して得られたものであるゆえに，(2)，(9)，(11) 式のいずれの方程式も満足する解になっている。しかし，ひずみや変位は弾性係数に依存するので，本論ではこれを (8) 式の仮定と (13) 式の応力に基づいて，(14) 式に整理する。なお，(10) 式の仮定に基づいた (11) 式の解を得るためには，(14) 式で $G = \infty$ とおけばよい。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_x} = u' = \frac{24}{E_x D^2} (C_{03}\eta + C_{13}\xi\eta) \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E_y} = v' = 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = u' + v' = \frac{6}{G D l} C_{13}(1 - \eta^2) \\ u &= \frac{12 l}{E_x D^2} (2 C_{03}\xi\eta + C_{13}\xi^2\eta) \\ &\quad - \frac{C_1 \eta}{2 E_x D} + \frac{C_{13}}{G l} (3\eta - \eta^3) \\ v &= -\frac{8 l^2}{E_x D^3} (C_{13}\xi^3 + 3 C_{03}\xi^2) \\ &\quad + \frac{C_1}{E_x} \frac{l}{D^2} \xi + \frac{C_2}{E_x D} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

(13)，(14) 式から梁の断面力，断面の回転角および

曲率を求め，整理するとそれらは (15) 式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} M &= \int \sigma_x y b dy = 4 b (C_{03} + C_{13}\xi) \\ Q &= \int \tau_{xy} b dy = 4 C_{13} \frac{b}{l} \\ \theta &= u' = \frac{24 l}{E_x D^3} (2 C_{03}\xi + C_{13}\xi^2) \\ &\quad - \frac{C_1}{E_x D^2} + \frac{6}{G D l} C_{13}(1 - \eta^2) \\ v' &= -\frac{24 l}{E_x D^3} (2 C_{03}\xi + C_{13}\xi^2) + \frac{C_1}{E_x D^2} \\ \phi = v'' &= -\frac{48}{E_x D^3} (C_{03} + C_{13}\xi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

一方，梁の支配方程式はたわみの 4 階の常微分方程式であるから，中間荷重がない場合のたわみ v に関する一般解は，(14) 式の v と同一の式で与えられる。その (14) 式の v からせん断変形を考慮した梁理論に基づく梁の回転角 θ ，曲げモーメント M ，せん断力 Q が (16) 式のように整理される。

$$\left. \begin{aligned} \theta &= -v' - \frac{\kappa E_x I}{G A} v''' = \frac{24 l}{E_x D^3} (2 C_{03}\xi + C_{13}\xi^2) \\ &\quad - \frac{C_1}{E_x D^2} + \frac{4 C_{13} \kappa}{G D l} \\ M &= -E_x I v'' = 4 b (C_{03} + C_{13}\xi) \\ Q &= -E_x I v''' = 4 C_{13} \frac{b}{l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

ここに， κ の値はせん断変形用形状係数であり，長方形断面の場合 κ の値は 1.2 である。(16) 式と (15) 式を比較した場合，回転角 θ のみが異なる。しかし， G を無限大とおけば (16) 式は初等梁理論解そのものであり，しかも (16) 式は (15) 式に完全に一致する。 G が無限大であるので，(14)，(15) 式より (17) 式が誘導される。

$$u' + v' = \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = 0 \rightarrow \theta = u' = -v' \dots\dots\dots(17)$$

以上の検討から明らかなように，(12) 式はそれを (11) 式の解として採用する場合に限って，表—1 の基本仮定をすべて満足する。すなわち，それは中間荷重が作用しない初等梁理論解そのものである。しかも，(13) 式で $\sigma_y = 0$ が成立しているので，それと (1) 式の仮定を合わせて断面内無応力の仮定が，中間荷重が作用しない初等梁理論解に限って成立していることになる。したがって，初等梁理論解として Bernoulli-Euler の仮定を導入することは，等方等質な弾性体である梁を極限的な材料特性を有する異方等質な平面応力場の直交異方性板 (Scheibe) と見なせるという新しい解釈も成立することになる。一方， G を有限値におくと，断面のゆがみ (warping) が生じる。すなわち， G を有限値におくと

断面の平面保持も法線保持のいずれの仮定も、もはや成立しない。さらに(15)式からわかるように、 θ は梁せい方向で変化することになり、材軸上で断面の回転角を一義的に定めることが不可能になる。その結果、固定端の境界条件も満足できなくなり、梁理論の簡便さが失われる。かかる観点から、(12)式は(2)、(9)、(11)式とともに満足する共通な解ではあるが、それを(11)式の解として採用する場合に限って、(12)式は中間荷重が作用しない梁の一般解となりうる。したがって(13)式の $\sigma_y=0$ は、中間荷重が作用しない梁理論以外では保障されないことになる。

一方、梁理論の簡便さを失わずにせん断変形を考慮する便法として、よく知られたひずみエネルギーによる方法が採用された。そうすれば、(15)式の回転角 θ は(16)式の θ に完全に一致する。このことは、梁のせん断ひずみ γ_{xy} がひずみエネルギー的に等価な平均せん断ひずみとして、(18)式で与えられることに相当する⁴⁾。また、(16)式の θ を y で積分する(17式参照)ことにより u が求められるが、このことは同時に平面保持仮定の導入を意味する。

$$\gamma_{xy} = u' + v' = \theta + v' = \frac{xQ}{GA} = \frac{4C_{13}x}{GDI} \dots\dots\dots(18)$$

中間荷重および物体力が作用しない直線伸縮材に関しては、応力および変位場が材軸($\eta=0$)に関して対称な場になるように、 η に関して最少の偶数次数を有する代数型応力関数 F を(19)式のように採用すればよい。

$$F = C_{02}\eta^2 \dots\dots\dots(19)$$

4. 梁の上下面に中間荷重が作用する場合の代数型応力関数解と梁理論に関する一考察

特解は中間荷重の分布形状に応じて、そのつど特定の解が誘導される性質を有している。したがって、材軸と直交する垂直分布荷重がただか ξ に関する一次の線形分布までを考えると、梁の特解に相当する F が(9)式の解として、(20)式で与えられる。

$$F = C_{11}\xi\eta + C_{21}\xi^2\eta + C_{23}\xi^2\eta^3 + C_{31}\xi^3\eta + C_{33}\xi^3\eta^3 - \frac{1}{40} \frac{E_x}{G} \left(\frac{D}{l}\right)^2 C_{23}\eta^5 - \frac{3}{40} \frac{E_x}{G} \left(\frac{D}{l}\right)^2 C_{33}\xi\eta^5 \dots\dots\dots(20)$$

なお、(20)式では梁の余解に相当する(12)式は除去されている。中間荷重としてより複雑な変分布荷重を解析したい場合には、(20)式にさらに高次の代数型応力関数を付加すればよい。(20)式から(11)式の解を得るためには、 G を無限大におけばよい。このことは、 η に関する4次以上の F が(11)式を満足させられないことと整合している。(20)式に基づいて整理した応力、変位を(21)式に示す。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{24}{D^2} C_{23}\xi^2\eta + \frac{24}{D^2} C_{33}\xi^3\eta - 2 \frac{E_x}{G} \frac{1}{l^2} C_{23}\eta^3 \\ &\quad - 6 \frac{E_x}{G} \frac{1}{l^2} C_{33}\xi\eta^3 \\ \sigma_y &= \frac{2}{l^2} C_{21}\eta + \frac{2}{l^2} C_{23}\eta^3 + \frac{6}{l^2} C_{31}\xi\eta + \frac{6}{l^2} C_{33}\xi\eta^3 \\ \tau_{xy} &= -\frac{2}{Dl} C_{11} - \frac{4}{Dl} (C_{21}\xi + 3C_{23}\xi\eta^2) \\ &\quad - \frac{6}{Dl} (C_{31}\xi^2 + 3C_{33}\xi^2\eta^2) + \frac{3}{4} \frac{E_x}{G} \frac{D}{l^3} C_{33}\eta^4 \\ u &= \frac{8l}{E_x D^2} C_{23}\xi^3\eta + \frac{6l}{E_x D^2} C_{33}\xi^4\eta - \frac{2}{Gl} C_{23}\xi\eta^3 \\ &\quad - \frac{3}{Gl} C_{33}\xi^2\eta^3 + \frac{3}{40} \frac{E_x}{G^2} \frac{D^2}{l^3} C_{33}\eta^5 \\ v &= -\frac{4l^2}{E_x D^3} C_{23}\xi^4 - \frac{12l^2}{5E_x D^3} C_{33}\xi^5 - \frac{2}{GD} C_{21}\xi^2 \\ &\quad - \frac{2}{GD} C_{31}\xi^3 - \frac{2}{GD} C_{11}\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

(21)式で G を無限大におき、(1)、(10)式の仮定を考慮するとBernoulli-Eulerの仮定が成立する。しかし、(21)式の σ_y からわかるように断面内無応力の仮定は、もはや成立しない。したがって、異方性理論に基づいた本論の立場に立脚すれば、梁理論に断面内無応力の仮定は相容れないことになる。

一方、 v は材軸方向の座標パラメータ ξ のみで表され、梁せい方向に変化しないのでその垂直ひずみ ϵ_y は零である。このことは、 σ_x 、 σ_y が(21)式のように生じても、 E_y が無限大でポアソン比が零であるので ϵ_y が零であることと整合し、本解では断面内無ひずみの仮定が G の値や、中間荷重の有無にかかわらず常に成立することを意味する(表一参照)。(21)式によれば、断面内の τ_{xy} の分布が中間荷重の種類によっては G に依存し、しかも η が4次の高次数になる。したがって、せん断変形を考慮した梁理論における長方形断面の $\kappa=1.2$ は、中間荷重が作用しない場合の工学的に便宜的な値にすぎないことがわかる。なお、直線伸縮材の解については割愛する。

5. 梁の上下面に中間荷重が作用する単純支持梁のフーリエ級数型応力関数解と梁理論に関する一考察

(2)、(9)、(11)式の各支配方程式を満足するフーリエ級数型応力関数 F は、図一2に示す座標系のもとで両端単純支持条件を想定した場合、(22)式から(24)式のように整理される¹⁹⁾。これらの F は支配方程式の閉解として、 η に関する奇関数と偶関数から構成される。したがって、これらの関数は代数型応力関数と同様に直線曲げ材と直線伸縮材に分けて考えることもできるが、式が単純な上、しかも閉解であるので本節ではまとめて

図—2 単純支持梁を利用した片持長方形断面梁の解析

取り扱う。

i) 直交異方性弾性理論解 ((2) 式の解)

$$F = \sum_m (A_m \sinh \kappa_{m,1} \eta + B_m \sinh \kappa_{m,2} \eta + C_m \cosh \kappa_{m,1} \eta + D_m \cosh \kappa_{m,2} \eta) \cos \lambda_m \xi \quad (22)$$

ここに,

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{2y}{D}, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{2}, \quad \alpha_m = \frac{m\pi}{2l} D$$

$$\begin{aligned} \kappa_{m,1} &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{E_x}{G} + 2\nu_x \right) - 2\sqrt{\frac{E_x}{E_y}}} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\left(\frac{E_x}{G} - 2\nu_x \right) - 2\sqrt{\frac{E_x}{E_y}}} \right) \alpha_m \\ \kappa_{m,2} &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{E_x}{G} + 2\nu_x \right) - 2\sqrt{\frac{E_x}{E_y}}} \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\left(\frac{E_x}{G} - 2\nu_x \right) - 2\sqrt{\frac{E_x}{E_y}}} \right) \alpha_m \end{aligned}$$

$$\text{ただし, } \left(\frac{E_x}{G} - 2\nu_x \right) > 2\sqrt{\frac{E_x}{E_y}}, \quad m=1, 3, 5, 7, \dots$$

ii) セン断変形を考慮した梁理論相当解 ((9) 式の解)¹⁷⁾

$$F = \sum_m (A_m + B_m \eta + C_m \sinh \beta_m \eta + D_m \cosh \beta_m \eta) \cos \lambda_m \xi \quad (23)$$

ここに,

$$\beta_m = \sqrt{\frac{E_x}{G}} \alpha_m, \quad \alpha_m = \frac{m\pi}{2l} D$$

iii) 初等梁理論解 ((11) 式の解)¹⁷⁾

$$F = \sum_m (A_m + B_m \eta + C_m \eta^2 + D_m \eta^3) \cos \lambda_m \xi \quad (24)$$

(24) 式の F に基づいて整理された応力, 変位, ひずみを (25) 式に示す。(25) 式は表—1 の基本仮定 2) を除いたすべての基本仮定, すなわち Bernoulli-Euler の仮定を完全に満足している。したがって, (25) 式は中間荷重がフーリエ級数で与えられた初等梁理論の特解でもある。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{8}{D^2} \sum_m (C_m + 3D_m \eta) \cos \lambda_m \xi \\ \sigma_y &= -\frac{1}{l^2} \sum_m \lambda_m^2 (A_m + B_m \eta + C_m \eta^2 + D_m \eta^3) \cos \lambda_m \xi \\ \tau_{xy} &= \frac{2}{Dl} \sum_m \lambda_m (B_m + 2C_m \eta + 3D_m \eta^2) \sin \lambda_m \xi \\ u &= \frac{8l}{E_x D^2} \sum_m \frac{1}{\lambda_m} (C_m + 3D_m \eta) \sin \lambda_m \xi \\ v &= \frac{48l^2}{E_x D^3} \sum_m \frac{1}{\lambda_m^2} D_m \cos \lambda_m \xi \\ \varepsilon_x = u' &= \frac{\sigma_x}{E_x} = \frac{8}{E_x D^2} \sum_m (C_m + 3D_m \eta) \cos \lambda_m \xi \\ e_y = v' &= \frac{\sigma_y}{E_y} = 0 \\ \gamma_{xy} = u'' + v' &= \frac{\tau_{xy}}{G} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

これらの証明に代数型やフーリエ級数型を問わず応力関数 F が採用されたことを考慮すれば, 梁理論解は適合条件式とともに平衡条件式も厳密に満足していることになる。しかるに, 皆川は文献 16) で (26) 式に示す二次元弾性理論における平衡条件式の第 1 式と第 2 式が初等梁理論ではいずれも無視され, Timoshenko 梁理論においては (26) 式の第 1 式は近似的に取り扱われ, その第 2 式が初等梁理論同様に無視されていると述べている。

$$\sigma'_x + \tau'_{xy} = 0, \quad \sigma'_y + \tau'_{xy} = 0 \quad (26)$$

しかし, これも直交異方性弾性理論によれば梁の断面力レベルと同様に (26) 式のような応力レベルでも, その平衡条件式が厳密に満足されていると理解すべきである。結局, σ_y も τ_{xy} も (26) 式の平衡条件式を満足するように生じるが, 初等梁理論では E_y と G を無限大と仮定したことに相当するために (25) 式にも見られるように, ε_y も γ_{xy} も生じないことになる。

6. 片持長方形断面梁に関する本解と日置解の比較

(12) 式で与えた代数型の応力関数解は, 中間荷重が作用しない初等梁理論解に等しい (11) 式の一般解ではあっても, (9) 式の一般解ではない。したがって, セン断変形を考慮した梁理論解に相当する (9) 式の解 (本解) として (14) 式は, 片持梁固定端の境界条件 $u=0$ を完全に満足させることができない。すなわち, 代数型応力関数解では (11) 式の解を除いて境界条件を完全に満足させることが不可能である。しかし, Timoshenko⁶⁾ や富井・平石^{22), 23)} のような便法を利用すれば, (9) 式の解として (12) 式を利用することも可能である (表—2, 3 参照)。ここでは図—2 に示すように単純支持梁のスパン中央を片持梁の固定端と見なした解析を, (23) 式のフーリエ級数型応力関数解を用いて試み

表—2 自由端に集中荷重 P を受ける片持長方形断面梁の応力と変位に関する本解と日置解の比較

	本 解 (応力関数解)		日 置 解
	代数型	フーリエ級数型	
τ_{xy}	$\frac{3P}{2bD}(1-\eta^2)$	$\frac{2P}{bD} \sum_m \frac{1}{\lambda_m} \left[\frac{\beta_m (\cosh \beta_m \eta - \cosh \beta_m)}{\sinh \beta_m - \beta_m \cosh \beta_m} \right] \sin \lambda_m \xi$	$\frac{P}{bD} \left[\frac{\beta (\cosh \beta \eta - \cosh \beta)}{\sinh \beta - \beta \cosh \beta} \right]$
σ_x	$\frac{6P\eta}{bD^2}(\xi-1)\eta$	$\frac{4P\eta}{bD^2} \sum_m \frac{1}{\lambda_m^2} \left[\frac{\beta_m^2 \sinh \beta_m \eta}{\sinh \beta_m - \beta_m \cosh \beta_m} \right] \cos \lambda_m \xi$	$\frac{2P\eta(\xi-1)}{bD^2} \left[\frac{\beta^2 \sinh \beta \eta}{\sinh \beta - \beta \cosh \beta} \right]$
u	$\frac{6P\eta^2}{bD^2 E_x} \xi \eta \left(\frac{1}{2} \xi - 1 \right) + \frac{P\eta}{4bG} (3-2\kappa-\eta^2)$	$\frac{4P\eta^2}{bD^2 E_x} \sum_m \frac{1}{\lambda_m^3} \left[\frac{\beta_m^2 \sinh \beta_m \eta}{\sinh \beta_m - \beta_m \cosh \beta_m} \right] \sin \lambda_m \xi$	$\frac{P\eta^2 \xi (\xi-2)}{bD^2 E_x} \left[\frac{\beta^2 \sinh \beta \eta}{\sinh \beta - \beta \cosh \beta} \right]$
v	$\frac{2P\eta^3}{bD^3 E_x} \xi^2 (3-\xi) + \frac{\kappa P\eta}{bDG} \xi$	$\frac{2P\eta}{bDG} \sum_m \frac{1}{\lambda_m^2} \left[\frac{\beta_m}{\beta_m - \tanh \beta_m} \right] (1 - \cos \lambda_m \xi)$	$\frac{P\eta}{bDG} \left[\frac{\beta}{\beta - \tanh \beta} \right] \left(\xi - (\xi - \frac{3}{2} \xi^2 + \frac{1}{2} \xi^3) \frac{\cosh \beta \eta}{\cosh \beta} \right)$
備考	$\beta_m^2 = \frac{E_x}{G} \left(\frac{m\pi D}{4l} \right)^2$, $\xi = \frac{x}{l}$, $\eta = \frac{2y}{D}$, $\lambda_m = \frac{m\pi}{2}$, $m=1,3,5,7,\dots$		$\beta^2 = \frac{E_x}{G} \left(\frac{\sqrt{3}D}{2l} \right)^2$, $\xi = \frac{x}{l}$, $\eta = \frac{2y}{D}$

注) Timoshenko 梁理論解は u の下線部 $\underline{\hspace{1cm}}$ を零におき, $\kappa = 1.2$ とおく. さらに, $G = \infty$ とおけば初等梁理論解を得る.

表—3 上端に接線等分布荷重 q を受ける片持長方形断面梁の応力と変位に関する本解と日置解の比較

	本 解 (応力関数解)		日 置 解
	代数型(富井・平石解)	フーリエ級数型	
τ_{xy}	$\frac{q}{4b}(1-\eta)(1+3\eta)$	$\frac{q}{b} \sum_m \frac{1}{\lambda_m} \left[\frac{\sinh \beta_m \eta}{\sinh \beta_m} - \frac{\beta_m \cosh \beta_m \eta - \sinh \beta_m}{\beta_m \cosh \beta_m - \sinh \beta_m} \right] \sin \lambda_m \xi$	$\frac{q}{2b} \left[\frac{\sinh \beta \eta}{\sinh \beta} - \frac{\beta \cosh \beta \eta - \sinh \beta}{\beta \cosh \beta - \sinh \beta} \right]$
σ_x	$\frac{q\eta}{bD}(\xi-1)(3\eta-1)$	$\frac{2q\eta}{bD} \sum_m \frac{\beta_m^2}{\lambda_m^2} \left[\frac{\cosh \beta_m \eta}{\beta_m \sinh \beta_m} - \frac{\sinh \beta_m \eta}{\beta_m \cosh \beta_m - \sinh \beta_m} \right] \cos \lambda_m \xi$	$\frac{q\beta^2 \eta}{bD} (1-\xi) \left[\frac{\cosh \beta \eta}{\beta \sinh \beta} - \frac{\sinh \beta \eta}{\beta \cosh \beta - \sinh \beta} \right]$
u	$\frac{q\eta^2}{2bDE_x} (\xi^2 - 2\xi)(3\eta-1)$	$\frac{2q\eta^2}{bDE_x} \sum_m \frac{\beta_m^2}{\lambda_m^3} \left[\frac{\cosh \beta_m \eta}{\beta_m \sinh \beta_m} - \frac{\sinh \beta_m \eta}{\beta_m \cosh \beta_m - \sinh \beta_m} \right] \sin \lambda_m \xi$	$\frac{q\beta^2 \eta^2 \xi (2-\xi)}{2bDE_x} \left[\frac{\cosh \beta \eta}{\beta \sinh \beta} - \frac{\sinh \beta \eta}{\beta \cosh \beta - \sinh \beta} \right]$
v	$\frac{q\eta^3}{bD^2 E_x} \xi^2 (3-\xi) + \frac{q\eta}{2bG} \xi (\kappa-1)$	$\frac{q\eta}{bG} \sum_m \frac{1}{\lambda_m^2} \left[\frac{\sinh \beta_m}{\beta_m \cosh \beta_m - \sinh \beta_m} \right] (1 - \cos \lambda_m \xi)$	$\frac{q\eta}{2bG} \left[\frac{\sinh \beta}{\beta \cosh \beta - \sinh \beta} \right] \xi + \frac{q\eta}{2bG} \left[\frac{\sinh \beta \eta}{\sinh \beta} - \frac{\beta \cosh \beta \eta}{\beta \cosh \beta - \sinh \beta} \right] \frac{\xi}{2} (\xi-2)(\xi-1)$

注) 表—2 のパラメータは表—1 のパラメータと同じである (表—1, 図—1, 2 参照).

る¹⁸⁾。このような解析を行えば、片持梁としての固定端の境界条件 ($u=v=0$) を完全に満足させることができる。 $v=0$ を満たすことができるのも、本解では $E_y=\infty$ においてるので、 $\epsilon_y=0$ が成立しているからである。ただし、こうして求めた片持梁固定端は単純支持梁の-span 中央に等しいので、曲げモーメント勾配が零になり、その結果せん断力、およびせん断応力がともに零になる。このことは図—2(a) に示すように片持梁固定端に、自由端に作用する集中荷重 P と同じ集中荷重 P が逆向きに作用する片持梁の解と考えることもできる。この集中荷重 P は微小区間 $2\Delta l$ に作用する等分布荷重 p_0 の極限状態を考えればよい。

図—2(b) に示す接線等分布荷重系は荷重そのものが自己釣合い力系であるゆえに、単純梁支持点に反力が生じることはない。一方、せん断変形を考慮した梁理論解に相当する解を日置は著者と同じ直交異方性弾性理論を用いて明らかにしている²⁰⁾ (表—1 参照)。ただし、著者と異なり材軸方向と直交方向、すなわち梁せい方向の

ヤング係数 E_y と垂直応力 σ_y がそれぞれ零と仮定されている。ポアソン比 ν_x, ν_y がそれぞれ零であるとか、 E_x と G がそれぞれ独立な有限値として与えられることなどは著者と同じである。そのために、梁せい方向 (y 方向) における平面応力場の平衡条件式である (26) 式の第 2 式を x で積分することにより τ_{xy} が容易に求められ、次いでこの τ_{xy} を (26) 式の第 1 式に示す材軸方向 (x 軸方向) の平衡条件式に代入し、その式を x で積分して σ_x を求めている²⁰⁾。その後、日置は構成方程式とひずみ-変位関係を利用し、境界条件式を代入することにより、一端が完全固定、上下面完全自由、自由端は梁せい方向に伸縮せず、かつその方向に集中荷重 P を受ける片持長方形断面梁の解を示している²⁰⁾。これらの解を文献 20) から転記し、本解とともに表—2 に整理して示す。さらに、図—2(b) に示す片持梁の接線等分布荷重 q に対する本解と日置解を表—3 に示す。表—2, 3 の日置解に注目すると、たわみ v が x の関数のみならず y の関数になっている。両端では材軸と直交方向に

v が変化することはないが、その間では v が梁せい方向に変化し、 ϵ_y が生じる。そうすると、ポアソン比がたとえ零であっても σ_y が生じることになり、このことは方程式の冒頭に仮定した $\sigma_y=0$ と矛盾することになる。そこで $\sigma_y=0$ に加えて、さらに $E_y=0$ が日置解では仮定された。フーリエ級数型の本解は、荷重系のいかんにかかわらず日置解に類似していることが特に注目される。これは、日置解が片持梁の自由端でも $\epsilon_y=0$ の境界条件下で定式化されたことも、その原因の一つではないかと考えられる。

7. 数値解析例

本解と日置解の具体的な差異を検証するために、図一

2に示す片持長方形断面梁の数値解析を行う。なお、 E_x と G との変換(表—2, 3参照)に用いるポアソン比は1/6を採用する。数値解析例として日置解と比較する本解は表—2, 3に示したフーリエ級数解を採用する(フーリエ展開項数は25である)。代数型応力関数によるせん断ひずみにエネルギー的な処理をほどこし、断面の平面保持仮定を導入すれば、自動的にTimoshenkoや富井・平石の梁理論解を導くことができる(表—2, 3参照)。

固定端($\xi=0$)と自由端($\xi=1$)では、日置解も本解と同様に ϵ_y が零になっている。したがって、片持梁中央($\xi=0.5$)でたわみ v の梁せい方向変化を調べる。その図—3(a)より、 v の梁せい方向の変化はせん断スパン比 l/D が小さい場合、すなわち梁せいが材長に比

図—3 片持長方形断面梁の変位に関する各解の比較

図—4 片持長方形断面梁の応力に関する各解の比較

して大きくなると顕著にあらわれるが、 l/D が大きくなると無視できるほど小さくなることわかる。材軸方向変位 u を図—3(c) に示す。Timoshenko や富井・平石の梁理論解では断面のゆがみが無視されているので、 u は初等梁理論解に一致している (表—2, 3 参照)。図—4(a), (b) に材軸方向の垂直応力 σ_x とせん断応力 τ_{xy} をそれぞれ示す。本解と日置解は表—1 に示した基本仮定のうち、前者は $\sigma_y \neq 0, E_y = \infty$, 後者が $\sigma_y = 0, E_y = 0$ で、この仮定のみ異なる。この違いは本解がひずみ拘束 ($\epsilon_y = 0$)、日置解がひずみ無拘束 (自由端、固定端を除いて $\epsilon_y \neq 0$) に相当するので、たわみは日置解が大きく、応力は本解が大きく生じる傾向にあることが図—3, 4 より明らかである。両者の解は l/D が小さくなると、梁理論解とは顕著な差異が生じるが、ともに類似した傾向を示す。

8. 結 論

平面応力場の直交異方性弾性板 (Scheibe) 理論と Airy の応力関数を用いて梁理論の検討を行った結果、次のことがわかった。

1) 平面応力場の直交異方性弾性板理論において、 E_x のみ有限値、 E_y と G をともに無限大、そしてポアソン

比 ν_x, ν_y を零にそれぞれおいて求めた代数型およびフーリエ級数型の Airy の応力関数解は、中間荷重の有無にかかわらず Bernoulli-Euler の仮定に立脚した初等梁理論解にそれぞれ一致することを示した。一方、本論によれば断面内無応力の仮定は中間荷重が作用しない梁理論解にあって初めて成立するものであり、それ以外の場合には一般に成立しないことも明らかになった。その結果、梁理論解が断面レベルと同様に、応力レベルでもその平衡条件式を厳密に満足していることや、梁の上下面に中間荷重を自由に作用させることなどが、無理なく合理的に説明できる。結局、梁そのものは等方等質な材料で構成されているが、それに初等梁理論解として Bernoulli-Euler の仮定を導入することは、等方等質な弾性体である梁を極限的な弾性定数を有する異方等質な弾性体である梁に置き換えることにほかならないと解釈することができる。

2) 前項で述べた弾性係数のうち、 G を E_x とともに有限値におくと、せん断変形を考慮した梁理論相当解が得られる。この解は断面内無ひずみの仮定を、中間荷重の有無にかかわらず常に満足しているが、法線保持、および平面保持仮定はいずれも満足していない。しかし、代数型応力関数解である本解にせん断ひずみに関するエネ

ルギー的处理をほどこし、断面の平面保持を仮定するとせん断変形を考慮した Timoshenko や富井・平石の梁理論解を自動的に誘導することができる。ただし、これらの梁理論解における長方形断面の $\alpha=1.2$ は、中間荷重が作用しない場合のせん断応力分布に基づいて求められた工学的に便宜的な値にすぎない。一方、断面内無ひずみの仮定を満足するフーリエ級数型応力関数解である本解は、断面内無応力の仮定を満足する日置解に式の表示も、数値解析結果も共に類似していることがわかった。しかし、両者の基本仮定の違いによって、たわみは日置解が、一方応力は本解がやや大きくなる傾向にあることもわかった。さらに、両者の応力、および断面のゆがみに関係する材軸方向変位は、せん断スパン比 (l/D) が小さくなるほど、梁理論解とは顕著に異なってくる。

謝 辞

本研究に関して温かい励ましを賜った故・坪井善勝先生に謹んで深甚の謝意を表します。また、本研究に関して有益な討論をいただいた九州大学教授・崎野健治博士に厚くお礼を申し上げます。本研究に関して貴重なご教示とご意見を賜った本論文の審査委員の先生に謹んで深謝の意を表します。本研究における片持梁の数値解析を琉球大学工学部建設工学科の1991年度の卒業研究として、真剣に取り組んでくれた琉球大学4年生・玉城康哉君(現・琉球大学院生)に感謝します。

参考文献

- 1) K. Washizu: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, pp.132~151, 1968
- 2) 川井忠彦, 藤谷義信: 梁理論の精密化に関する二, 三の試み その1, その4, 生産研究, 第25巻第6号, pp.211~220, 1973年6月, 第25巻第11号, pp.479~490, 1973年11月
- 3) 高島秀雄: 骨組構造解析法要覧 (17 棒材理論の基本的仮定および基礎式), 培風館, pp.352~378, 1976年4月
- 4) 日置興一郎: 構造力学 I, 朝倉書店, pp.43~44, pp.130~135, 1970年6月
- 5) 藤谷義信: 建築構造力学の最近の発展 (3.1 骨組構造の力学), 日本建築学会 (丸善), pp.277~308, 1976年11月
- 6) 藤谷義信: 薄肉はり構造解析, 培風館, pp.1~27, pp.164~167, pp.196~197, 1990年6月
- 7) 小林昭一: 構造力学 (基礎/理論上), 培風館, pp.83~93, 1990年9月
- 8) 坪井善勝: 建築弾塑性学, 建築学大系9-1, 彰国社, pp.24~31, pp.102~106, 1969年7月

- 9) S.P. Timoshenko, J.N. Goodier: Theory of Elasticity, McGraw-Hill, pp.35~60, 1970
- 10) C.L. Dym, I.H. Sharnes: Solid Mechanics: A Variational Approach, 邦訳“材料力学と変分法”, プレイン図書出版, pp.54~55, 1973
- 11) 小林道明・石川博将・泰 謹一: 短い片持ばりの二次元応力問題について, 日本機械学会論文集 (第一部), 42巻357号, pp.1355~1364, 1976年5月
- 12) S.N. Prasad, P.K. Chiu: Elasticity Solution of Deep Beam Under Settlement of Supports, J. of Applied Mechanics, Trans. ASME, pp.613~618, Dec. 1976
- 13) K.H. Lo, R.M. Christensen, E.M. Wu: A High-Order Theory of Plate Deformation, Part I: Homogeneous Plate, J. of Applied Mechanics, Trans. ASME, pp.663~668, Dec. 1977
- 14) 平石久廣: はり理論の精度に関する一考察 (板の二次元解析との比較), 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.1087~1088, 1978年9月
- 15) 平島健一, 根岸嘉和: 高次近似のはり理論の定式化ならびに各種のはり理論の精度特性, 土木学会論文集, 第350号/I-2, pp.187~196, 1984年10月
- 16) 皆川洋一: 軸方向および横方向に分布外力を受ける直線曲げ材の近似閉解とその性質について, 日本建築学会構造系論文報告集, 第389号, pp.52~65, 1988年7月
- 17) 山川哲雄: Box 構造物の弾性解析と剛性評価に関する問題, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (関東), pp.741~742, 1975年10月
- 18) 山川哲雄: 原子炉建屋 Box 構造の剛性評価法, 清水建設研究所報, 第31号, pp.67~74, 1979年10月
- 19) 山川哲雄: 初等梁理論に関する直交異方性弾性理論を用いた一考察 その1. 両端単純支持梁の直交異方性弾性理論解, その2. せん断変形を考慮した初等梁理論解の再検討と考察, 日本建築学会中国・九州支部研究報告第8号, pp.433~440, 1990年3月
- 20) 日置興一郎: 構造力学 II, 朝倉書店, pp.42~49, 1977年11月
- 21) 日置興一郎: 円筒シェル屋根の片持ち梁など2, 3の薄膜解について, 日本建築学会論文報告集, 第73号, pp.13~18, 1962年6月
- 22) 富井政英, 平石久廣: Elastic Analysis of Framed Shear Walls by Considering Shearing Deformation of the Beams and Columns of Their Boundary Frames Part I, II, Trans. of AIJ, No. 273, 274, pp.25~31, Nov., pp.75~83, Dec., 1978
- 23) 山川哲雄, 富井政英: ルジャンドルの直交多項式を用いた耐震壁のマトリックス構造解析, 構造工学論文集 (日本建築学会) Vol. 33 B, pp.17~26, 1987年3月

(1992年2月10日原稿受理, 1992年5月6日採用決定)