フーリエ振幅スペクトルの平滑化による 地震入力エネルギーの評価

PREDICTION OF EARTHQUAKE ENERGY INPUT FROM SMOOTHED FOURIER AMPLITUDE SPECTRUM

桑村 仁*, 秋山 宏**, 桐野 康則***
Hitoshi KUWAMURA, Hiroshi AKIYAMA and Yasunori KIRINO

This paper attempted to prove analytically that energy input spectrum of non-linear structures excited by an earthquake motion can be predicted from smoothing the Fourier amplitude spectrum of the base acceleration. The spectral window for the smoothing process is identical to the probability density function of the time-variant vibrational frequency resulting from non-linear hysteresis. It was found that the increase in damping factor, plastic excursion, or participation of higher modes provides wider spectral windows resulting in more flattened or unaltered energy input spectra due to enhanced smoothing effects.

Keywords : *earthquake load effect, energy input, Fourier spectrum, spectral smoothing*
地震荷重効果, エネルギー入力, フーリエスペクトル, 平滑化

1. 序

地震荷重は、構造物の動的応答としてとらえられる荷重であるため、地震入力波だけでなく構造物の動的特性にも支配される荷重である。したがって、地震荷重は、その他の荷重、例えば固定荷重、積載荷重、雪荷重、風荷重などのように構造特性と無関係に定められる荷重とは全く異質の荷重であるというのが一般的認識である。このとき、構造物の動的特性としては、固有周期、減衰定数、降伏せん断力係数、復元力特性などが挙げられ、地震入力波の不確定性とあいまってそれらが複雑に関係していることが設計用地震荷重の決定を困難にしていると考えられている。

これに対して、地震荷重を一般に使用されている加速度応答スペクトルではなくエネルギー入力スペクトルで表現すれば、その困難を克服できるという見解がある。これは、地震動による構造物への総エネルギー入力を速度に換算したもののスペクトル（以下、エネルギー換算速度応答スペクトルまたは V_E スペクトルと称す）は構造物の弾性固有周期のみに支配され、それ以外の構造特

性にはほとんど依存しない極めて安定した量となるという応答解析結果に基づいており¹⁾、それをベースに鋼構造建築物の耐震設計の枠組が研究されてきた²⁾。

また、エネルギー換算速度応答スペクトルがこのように安定した量であるのは、これが地震加速度入力波のフーリエ振幅スペクトル（以下、 $|F|$ スペクトルとも表記する）を平滑化して得られるスペクトルと一致する傾向があるからであると示唆されている³⁾。 V_E スペクトルは、構造物の応答の結果として得られるものであるもので、構造物の動的特性の影響を受け、構造物というフィルターを通して出力されたものである。一方、 $|F|$ スペクトルは、地震波そのものの特性であり、構造物とは無関係に定まるものである。 V_E と $|F|$ に明瞭な対応関係があるのであれば、地震荷重を他の荷重と同様に構造特性とは無関係に地震入力波のみから定めることができ、設計の観点からは非常に好都合と言える。

そこで、本研究はエネルギー換算速度応答スペクトルが地震加速度のフーリエ振幅スペクトルとどのような相関があるかを定量的に調べ、エネルギー換算速度応答ス

本論文は、参考文献11)に加筆し、まとめたものである。

* 東京大学工学部建築学科 助教授・Ph.D.

** 東京大学工学部建築学科 教授・工博

*** 東京大学工学部建築学科 大学院生

Assoc. Prof., Dept. of Architecture, Faculty of Engineering, Univ. of Tokyo, Ph.D.

Prof., Dept. of Architecture, Faculty of Engineering, Univ. of Tokyo, Dr. Eng.

Graduate Student, Dept. of Architecture, Faculty of Engineering, Univ. of Tokyo

ベクトルの設計荷重表現としての妥当性を検討したものである。

2. 無減衰弾性1質点系における V_E と $|F|$ の関係

減衰のない弾性1質点系の V_E スペクトルと $|F|$ スペクトルは完全に一致するということが知られている⁷⁾。これは本研究の基本となる点であるので、改めてそれを示すと次のようになる。地動加速度 $\ddot{y}(t)$ のフーリエ振幅スペクトルは次式で定義される。

$$|F(\omega)| = \left| \int_0^{t_0} \ddot{y}(t) e^{-i\omega t} dt \right|$$

ここで、 t_0 : 地震動の継続時間

ω : 円振動数

上式の右辺を展開すると、

$$|F(\omega)| = \sqrt{\left(\int_0^{t_0} \ddot{y}(t) \cos \omega t dt \right)^2 + \left(\int_0^{t_0} \ddot{y}(t) \sin \omega t dt \right)^2} \quad (1)$$

一方、無減衰弾性1質点系の強制振動方程式は、

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = -m\ddot{y} \quad (2)$$

ここで、 m : 質量

x : 相対変位

ω_0 : 固有円振動数, $\omega_0 = \sqrt{k_0/m}$

k_0 : 弾性ばね定数

$\ddot{y}$: 地震入力加速度

地震終了までの系へのエネルギー入力、(2)式の左辺を変位 x に関して積分したものである、 $dx = \dot{x}dt$ より、

$$E = \int_0^{t_0} m\dot{x}\dot{x}dt + \int_0^{t_0} m\omega_0^2 x\dot{x}dt$$

地震動の入力開始時 $t=0$ における初期条件 $x(0)=\dot{x}(0)=0$ より、上式は次のようになる。

$$E = \frac{1}{2} m\dot{x}(t_0)^2 + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x(t_0)^2 \quad (3)$$

(3)式は、 E が地震終了時における系の保有する運動エネルギーと弾性ひずみエネルギーの和となることを表している。地震終了時における相対変位と相対速度に関する Duhamel 積分解を (3)式に代入して整理すると、

$$E = \frac{1}{2} m \left(\int_0^{t_0} \ddot{y}(t) \cos \omega_0 t dt \right)^2 + \frac{1}{2} m \left(\int_0^{t_0} \ddot{y}(t) \sin \omega_0 t dt \right)^2 \quad (4)$$

エネルギー換算速度応答スペクトルの定義は、

$$V_E = \sqrt{\frac{2E}{m}} \quad (5)$$

これに (4)式を代入すると、

$$V_E = \sqrt{\left(\int_0^{t_0} \ddot{y}(t) \cos \omega_0 t dt \right)^2 + \left(\int_0^{t_0} \ddot{y}(t) \sin \omega_0 t dt \right)^2} \quad (6)$$

(1), (6)式より、 $\omega = \omega_0$ のとき次式が成り立つ。

$$V_E = |F| \quad (7)$$

この2つのスペクトルの横座標をそれぞれ周期で描いた場合、 V_E スペクトルの横軸は振動系の固有周期 $T_0 = 2\pi/\omega_0$ であり、 $|F|$ スペクトルの横軸は地震加速度波に含まれる調和波成分の周期 $T = 2\pi/\omega$ であるので、両者は基本的に別のものであるが、それにもかかわらず $T = T_0$ として2つのグラフを重ねると、両スペクトルが一致する。

これは、構造物への入力エネルギーは地震動の中から構造物と同じ周期の波を選び、その波の振幅に支配されるということを意味しており、これは田治見の指摘した選択共振⁵⁾と同じである。さらに重要な点は、入力波の位相情報が入力エネルギーに全く影響を与えないことである。時間領域で定義される入力加速度波は周波数領域で定義されるフーリエ振幅スペクトルとフーリエ位相スペクトルの対と1対1に対応している。にもかかわらず、フーリエ位相スペクトルは入力エネルギーに無関係であることを(7)式は表している。フーリエ振幅スペクトルが同じでもフーリエ位相スペクトルが異なれば、時間領域に逆変換された入力加速度波は異なり、加速度のピーク値やその出現時刻は異なってくる。しかし、このような加速度波のスパイクは入力エネルギーと理論的な相関は無いことがわかる。

以上のことから類推されるのは、振動中に構造物の周期が減衰や塑性化に伴って変動する場合、それぞれの周期に対応する波を時々刻々選りながらエネルギーが入力されるであろうということである。これについての検証が本研究の課題であり、次章以降で検討する。

なお、(3)式からわかるように、総エネルギー入力 E は地震終了時における系のエネルギーと等しいので、無減衰弾性系の V_E スペクトルは残留速度スペクトルと等しい。したがって、無減衰弾性系の相対速度応答スペクトルを S_v とすると、 $S_v \geq V_E$ の関係がある⁶⁾。しかし、 S_v と V_E は細部においては違いがあるがスペクトルの全体的な形は類似している⁷⁾。無減衰系の V_E スペクトルは相対速度応答スペクトルと同じ形状をしていると見てよい。なお、 S_v と V_E の違いの原因は、 S_v が入力波の位相情報の影響を受けるためである。

3. 減衰弾性1質点系における V_E と $|F|$ の関係

3.1 振動周期の時間変動

減衰弾性1質点系の自由振動方程式は、

$$\ddot{x} + 2h\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (8)$$

ここで、 h : 減衰定数

これを無減衰弾性1質点系の振動方程式と同じ表現にすると、

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (9)$$

(8), (9)式が等価であるには、

Fig. 1 減衰弾性1質点系の履歴カーブ

$$\omega_i^2 = 2h\omega_0 \frac{\dot{x}}{x} + \omega_0^2 \quad (10)$$

ここで、 ω_i は減衰弾性1質点系の時々刻々変化する固有円振動数を表している。(8)式の解は、

$$x = Ae^{-h\omega_0 t} \sin(\omega_1 t + \phi) \quad (11)$$

ここで、 A, ϕ : 初期条件から決まる定数

ω_1 : 減衰系の固有円振動数, $\sqrt{1-h^2}\omega_0$

(11)式を用いて(10)式を書き換えると

$$\omega_i^2 = \omega_0^2(1-4h^2) + 2h\sqrt{1-h^2}\omega_0^2 \cot(\omega_1 t + \phi) \quad (12)$$

ここで、1サイクル(時間にして $2\pi/\omega_1$)における ω_i^2 の時間平均を計算すると、次式が得られる。

$$\overline{\omega_i^2} = \frac{1}{2\pi/\omega_1} \int_0^{2\pi/\omega_1} \omega_i^2 dt = (1-4h^2)\omega_0^2 \approx \omega_0^2 \quad (13)$$

ここで、最後の近似等号は $h \ll 1$ による。したがって、時々刻々変化する復元力ばね定数を k_i とすると(Fig.1参照)、 $\omega_i^2 = k_i/m$ の関係から、 k_i の時間平均は弾性ばね定数 k_0 と等しいことが(13)式からわかる。つまり、

$$\overline{k_i} = k_0 \quad (14)$$

(12)式を振動数で表示すると、 $f_i = \omega_i/2\pi$, $f_0 = \omega_0/2\pi$ の関係より、

$$f_i = f_0 \sqrt{(1-4h^2) + 2h\sqrt{1-h^2} \cot(\omega_1 t + \phi)} \quad (15)$$

ここで、1サイクルにおける f_i の時間密度を計算する。 f_i/f_0 を確率変数とし、 Z で表す。つまり、

$$Z = \frac{f_i}{f_0} \quad (16)$$

Z の確率密度関数を $f_Z(z)$ とすると、

$$\begin{aligned} f_Z(z)dz &= P(z \leq Z \leq z+dz) \\ &= P(f_0 z \leq f_i \leq f_0(z+dz)) \end{aligned}$$

ここで、 $P(\quad)$ は $(\quad)$ 内の事象の生起確率を表す。上式に(15)式の f_i を代入して整理すると、

$$\begin{aligned} f_Z(z)dz &= P\left(\frac{\cot^{-1}\left(\frac{(z+dz)^2 - (1-4h^2)}{2h\sqrt{1-h^2}}\right) - \phi}{\omega_1} \leq t \leq \frac{\cot^{-1}\left(\frac{z^2 - (1-4h^2)}{2h\sqrt{1-h^2}}\right) - \phi}{\omega_1}\right) \end{aligned}$$

1サイクルの時間が $2\pi/\omega_1$ であること、および時間は一様に経過することに注意すると、

$$\begin{aligned} f_Z(z)dz &= -\frac{1}{2\pi} \cdot 2 \left(\frac{\cot^{-1}\left(\frac{(z+dz)^2 - (1-4h^2)}{2h\sqrt{1-h^2}}\right) - \phi}{\omega_1} - \frac{\cot^{-1}\left(\frac{z^2 - (1-4h^2)}{2h\sqrt{1-h^2}}\right) - \phi}{\omega_1} \right) \\ &= -\frac{1}{\pi} \cdot d \left(\cot^{-1}\left(\frac{z^2 - (1-4h^2)}{2h\sqrt{1-h^2}}\right) \right) \end{aligned}$$

結局、次式を得る。

$$f_Z(z) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + \left[\frac{z^2 - (1-4h^2)}{2h\sqrt{1-h^2}}\right]^2} \cdot \frac{2z}{2h\sqrt{1-h^2}} \quad (17)$$

$h \ll 1$ を考慮して、簡略化すると、

$$f_Z(z) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{z^2 - 1}{2h}\right)^2} \cdot \frac{z}{h} \quad (18)$$

(18)式の $f_Z(z)$ をFig.2に示す。これからわかるように、減衰定数 h が大きいほど変動周波数の確率分布の広がりが大きくなる。これは、減衰系を代表する大小2つの等価周期の差が減衰定数に比例するとした文献4)の置換履歴系と対応するものである。

Z の全確率は次式で計算される。

$$A_Z = \int_0^\infty \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{z^2 - 1}{2h}\right)^2} \cdot \frac{z}{h} dz \quad (19)$$

1サイクル中に $\omega_i^2 < 0$ となる時間帯があるので、

Fig. 2 減衰弾性1質点系の $Z = f_i/f_0$ の確率密度関数

Table 1 減衰系の確率密度関数の補正値

減衰定数 h	$A_z = \int_0^\infty \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + \left(\frac{z^2-1}{2h}\right)^2} \cdot \frac{z}{h} dz$
0.02	0.987
0.06	0.962
0.10	0.937
0.20	0.879

$0 \leq Z \leq \infty$ で定義された Z の全確率は Table 1 に示すように 1 に満たない。この傾向は減衰定数が小さい時はほとんど問題ないが、減衰係数が大きくなると補正が必要である。そこで (18) 式を A_z で除したものを新たに Z の確率密度関数とする。

$$f_z(z) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{z^2-1}{2h}\right)^2} \cdot \frac{z}{h} \cdot \frac{1}{A_z} \dots (20)$$

3.2 V_E と平滑化 $|F|$ の関係

減衰弾性 1 質点系の V_E は、(5) 式の定義から応答解析に基づき次の計算を行うことにより得られる。

$$V_E = \sqrt{-2 \int_0^{t_0} \ddot{y} \dot{x} dt} \dots (21)$$

一方、(20) 式で与えられる周波数の確率密度関数をスペクトルウインドウとして用い、地震入力加速度のフーリエ振幅スペクトルを平滑化することができる。ここでの平滑化計算は周波数領域で行い、つまり、周波数の関数として表示されたフーリエ振幅スペクトルに周波数の関数として与えられている平滑化関数 (20) 式を乗じて平滑化フーリエ振幅スペクトルを算定し、最後にこの平滑化スペクトルを周期の関数に変換した。これによって得られた平滑化 $|F|$ スペクトルを (21) 式から得られた V_E スペクトルと $h=0.1$ の場合について比較したのが Fig. 3 a, b, c である。 $|F|$ スペクトルそのものは凹凸の激しい形状をしているが、(20) 式のスペクトルウインドウによる平滑化 $|F|$ スペクトルはかなり平坦化され、しかも V_E スペクトルとたいへんよく一致している。ここで用いた地震波は Table 2 に示す 3 種類の地震波である。さらに、減衰定数を変化させた場合について、両者の相関係数および比の平均を $0.2 \leq T \leq 5.0$ 秒の範囲で調べた結果が Table 3 に示してある。いずれの場合にも、両者に非常に良い対応関係があることがわかる。

以上より、減衰の存在に起因する復元力ばね定数の時間的変動、換言すれば振動周期または周波数の時間的変動に基づいて決定したウインドウを用いて平滑化したフーリエ振幅スペクトルは、減衰系の V_E スペクトルと一致するとみなすことができる。したがって、減衰系の V_E スペクトルは地動加速度のフーリエ振幅スペクトル

(a) エルセントロ, NS, $h=0.1$ (b) 八戸, EW, $h=0.1$ (c) タフト, NS, $h=0.1$ Fig. 3 減衰系の V_E スペクトルと平滑化 $|F|$ スペクトルの比較

Table 2 解析に使用した地震波

地震波	データ長 (sec)	ピーク加速度 (gal)	加速度パワー I_E (cm^2/sec^3)
El Centro, NS 5/18/1940	54	342	114,000
Hachinohe, EW 5/16/1968	120	183	73,500
Taft, NS 7/21/1952	54	153	34,100

Table 3 減衰弾性1質点系の V_E スペクトルと平滑化 $|F|$ スペクトルの相関 ($0.2 \leq T \leq 5.0$ sec)

地震波	減衰定数 h	V_E と $ F $ の相関係数	$V_E / F $ の平均値
エルセントロ NS	0.02	0.999	0.981
	0.06	0.996	0.969
	0.10	0.992	0.957
	0.20	0.982	0.933
八戸 EW	0.02	1.000	0.980
	0.06	0.999	0.961
	0.10	0.997	0.945
	0.20	0.995	0.913
タフト NS	0.02	0.999	0.981
	0.06	0.995	0.970
	0.10	0.990	0.959
	0.20	0.975	0.937

の凸凹を均した形状をしており、減衰系の V_E スペクトルの上下限値は地動加速度のフーリエ振幅スペクトルの上下限値の間に存在する。しかも、減衰定数が多いほど、平滑化のウィンドウが広がるので V_E スペクトルの形状はより平坦になり、 V_E スペクトルの値はより安定化する。つまり、減衰系の V_E スペクトルは弾性固有周期の誤差に対してより鈍感になり、その最大値は地震動固有の強さに支配されると言える。

4. 完全弾塑性1質点系における V_E と $|F|$ の関係

4.1 振動周期の時間変動

減衰の無い完全弾塑性1質点系の自由振動方程式は、弾性域で、

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (22)$$

塑性域で、

$$\ddot{x} + \left(\frac{Q_p}{m} \cdot \frac{1}{x} \right) x = 0 \quad (23)$$

ここで、 Q_p : 降伏せん断力

(22), (23) 式を比較すると、塑性域における円振動数は次式で与えられることがわかる。

$$\omega_t = \sqrt{\frac{Q_p}{m} \cdot \frac{1}{x}} \quad (24)$$

したがって、 ω_t は x とともに時々刻々変化することに

Fig. 4 完全弾塑性系の履歴カーブ (半サイクル)

なる。そこで、Fig. 4 に示す 1/2 サイクルの自由振動における塑性域での振動数の変化を調べる。初期条件として、 $t=0$ で $\dot{x} = v_0$, $x = x_p$ とすると、(23) 式の解は、

$$x = -\frac{Q_p}{2m} t^2 + v_0 t + x_p \quad (25)$$

ここで、Fig. 4 に示すように塑性変形量を $\mu \cdot x_p$ とすると、エネルギー保存より、

$$\frac{1}{2} m \cdot v_0^2 = \mu \cdot x_p \cdot Q_p$$

よって、

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\mu \cdot x_p \cdot Q_p}{m}} = \sqrt{2\mu} \cdot \frac{Q_p}{m\omega_0} \quad (26)$$

ここで、次式を適用した。

$$x_p = \frac{Q_p}{k_0} = \frac{Q_p}{m\omega_0^2} \quad (27)$$

さらに、 $t=t_1$ で塑性化が終了するとすれば、 $\dot{x}(t_1)=0$ より、

$$t_1 = \frac{\sqrt{2\mu}}{\omega_0} \quad (28)$$

(24) 式に (25), (26), (27) 式を代入し、さらに $\omega_t = 2\pi f_t$ の関係を用いると次式を得る。

$$f_t = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2} \left(t - \frac{\sqrt{2\mu}}{2\pi f_0} \right)^2 + \frac{\mu+1}{(2\pi f_0)^2}}} \quad (29)$$

ただし、

$$0 < t < \frac{\sqrt{2\mu}}{2\pi f_0} \quad (30)$$

および

$$\frac{f_0}{\sqrt{\mu+1}} < f_t < f_0 \quad (31)$$

(31) 式より、塑性化の度合いが大きいほど、つまり μ が大きいほど振動周波数が低域に広がることがわかる。これは文献 4) において導入されている置換履歴系の等価周期が μ が大きいほど長くなるというのと同じである。

$Z = f_t/f_0$ として、 Z の確率密度関数 $f_z(z)$ を (17) 式と同様の方法で求めると次の結果が得られる。

$$f_z(z) = \frac{1}{\sqrt{\mu(\mu+1 - \frac{1}{z^2})}} \cdot \frac{1}{z^3} \quad (32)$$

ただし、

$$\frac{1}{\sqrt{\mu+1}} < z < 1 \quad (33)$$

(32) 式で与えられる振動数の確率密度関数を Fig. 5 に示す。 $z \rightarrow 1/\sqrt{\mu+1}$ のとき、 $f_z(z) \rightarrow \infty$ となるが、 Z の全確率は 1 となる。

4.2 V_E と平滑化 $|F|$ の関係

(32) 式で与えられる周波数の確率密度関数をウィンドウとして用い、地震入力加速度のフーリエ振幅スペク

Fig. 5 完全弾塑性系の $Z=f_i/f_0$ の確率密度関数

トルを平滑化することができる。ただし、半サイクルにおける塑性率 μ (ここでは Fig. 4 に示すように塑性変形を弾性限変形を除いたもの) は応答結果から定める必要がある。地震応答中の塑性化回数を n_p 回として、各回における塑性率を μ_i とすると、各塑性化応答における周波数の確率密度関数が (32) 式から定義できる。ただし、各確率密度関数の全確率は、その塑性化応答におけるエネルギー吸収量に比例するように修正が必要であり、弾性応答におけるエネルギー吸収も考慮する必要がある。弾性ひずみによる吸収エネルギーは $\frac{1}{2} Q_p x_p$ 、各塑性化応答における吸収エネルギーの合計は $\sum_{i=1}^{n_p} \mu_i Q_p x_p$ で表される。したがって、平滑化に用いるウィンドウは次のようになる。

$$f_z(z) = \frac{1}{2A} \cdot \delta(z-1) \cdots \cdots (34)$$

$$f_z(z) = \frac{1}{\sqrt{\mu_i(\mu_i+1-\frac{1}{z^2})}} \cdot \frac{1}{z^3} \cdot \frac{\mu_i}{A}$$

$$\text{各 } \mu_i \text{ について } \frac{1}{\sqrt{\mu_i+1}} < z < 1 \text{ のとき} \cdots \cdots (35)$$

ここで、

$$A = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n_p} \mu_i \cdots \cdots (36)$$

$\delta(\cdot)$: ディラックのデルタ関数

このようなウィンドウを用いて得られた平滑化 $|F|$ スペクトルを完全弾塑性系の応答解析に基づいて (21) 式から得られた V_E スペクトルと比較したのが Fig. 6 である。同図には、エルセントロ波に対して弾性固有周期 $T=1.0$ 秒における累積塑性変形倍率 $\eta_1 (= \sum_{i=1}^{n_p} \mu_i)$ が 5、他の周期に対しては $5/T$ となる場合の結果を描いている。両者はおおむねよく一致している。さらに、エルセントロ波について、累積塑性変形倍率 η_1 を変化した場合について、両者の相関係数および比の平均を調べたのが Table 4 である。 η_1 の増大に伴い両者の相関は低下

Fig. 6 完全弾塑性系の V_E スペクトルと平滑化 $|F|$ スペクトルの比較 (エルセントロ, NS, $\eta_1=5$)Table 4 完全弾塑性 1 質点系の V_E スペクトルと平滑化 $|F|$ スペクトルの相関 ($0.2 \leq T \leq 5.0$ sec)

地震波	累積塑性率 η_1	V_E と F の相関係数	V_E/F の平均値
エルセントロ NS	2	0.904	0.990
	5	0.907	0.962
	10	0.882	0.925
	20	0.869	0.893

するがおおむね良好と言える。

以上より、塑性化に起因する復元力ばね定数の時間的変動、換言すれば振動周期または周波数の時間的変動に基づいて決定したウィンドウを用いて平滑化したフーリエ振幅スペクトルは、完全弾塑性系の V_E スペクトルとおおむね一致するとみなすことができる。したがって、完全弾塑性系の V_E スペクトルは地動加速度のフーリエ振幅スペクトルの凸凹を均した形状をしており、その上下限値は地動加速度のフーリエ振幅スペクトルの上下限値の間に存在する。しかも、塑性化の度合いが大きいほど、平滑化のウィンドウが広がるので V_E スペクトルの形状はより平坦になり、 V_E スペクトルの値はより安定化する。これは、前節の減衰系と全く同じ現象としてとらえることができる。ただし、減衰系の平滑化ウィンドウが弾性固有振動数を基準にしてほぼ対称なウィンドウであったのに対して、完全弾塑性系の平滑化ウィンドウは弾性固有振動数を基準にしてその低振動数域のみに広がる低域フィルターである点が異なっている。

5. 無減衰弾性多質点系における V_E と $|F|$ の関係

無減衰弾性 n 質点系への総エネルギー入力 E の速度換算を全質量 M を用いて、(5) 式と同様に $V_E = \sqrt{2E/M}$ で定義すると、モーダルアナリシスにより次式を得る⁸⁾。

$$V_E = \sqrt{\sum_{j=1}^n (\beta_j |F(\omega_j)|)^2} \cdots \cdots (37)$$

ここで、 $|F(\omega_j)|$ は j 次固有円振動数における入力加速

Fig. 7 n 質点系の V_E スペクトル ($n=1, 3, 10$)

度のフーリエ振幅値である。 β_j は、モードベクトルに正規化条件 $[\phi]^T [m] [\phi] = M[1]$ を課して定めた j 次刺激係数であり (ここで, $[m]$ =質量マトリックス, $[\phi]$ =モードマトリックス, $[\phi]^T = [\phi]$ の転置マトリックス, M =全質量, $[1]$ =単位マトリックス), 次の等式が成り立つ。

$$\sum_{j=1}^n \beta_j^2 = 1 \quad (38)$$

したがって, (37), (38) 式より

$$\min ||F(\omega_j)|| \leq V_E \leq \max ||F(\omega_j)||$$

これらの関係は, V_E が $|F(\omega_1)|, \dots, |F(\omega_n)|$ の β_j による一種の重み付け平均であることを意味している。さらに, (38) 式の条件より, 無減衰弾性多質点系の V_E は, フーリエ振幅スペクトル $|F|$ を β_j 群輝線ウインドウで平滑化したものであることがわかる。ただし, このウインドウは一次固有振動数を基準にすると高域フィルターの性質を持っている。

Fig. 7 にせん断型多質点系の V_E を質点数 $n=1, 3, 10$ の場合について描いた。ここでは, 振動系の各質点の質量はすべて等しく, また各層のせん断ばね定数はその層が支える質量に比例するものとした。質点数の増加に伴いスペクトルが平滑化される様子がわかるが, 減衰系や弾塑性系ほど平滑化の度合いは大きくない。

6. V_E スペクトルと地震動固有の強さ

現実の構造物は, 構造剛性の非線形性や減衰の存在により振動中に周期が変化する。したがって, 以上の検討結果から, 現実の構造物のエネルギー入力換算速度応答スペクトル V_E は, 多かれ少なかれフーリエ振幅スペクトル $|F|$ を平滑化したものとなる。一般に, 地震動加速度のフーリエ振幅スペクトルを平滑化したものは, 横軸を周期にすると Fig. 8 に示すようにバイリニアなカーブで近似できることが多い。これは, 相対速度応答スペクトルが多くの地震波についてバイリニアカーブで近似できること^{5), 10)} と同じである。なぜなら, 既に述べたようにフーリエ振幅スペクトルと相対速度応答スペクトルは同じ形をしているからである。Fig. 8 のバイリニ

Fig. 8 V_E スペクトルのバイリニア近似

アカーブの折れ曲がり点の横座標を地震動の卓越周期 T_0 で定義すれば,

$$V_E = \frac{V_{E0}}{T_0} \cdot T \quad T \leq T_0 \text{ のとき} \quad (39a)$$

$$V_E = V_{E0} \quad T > T_0 \text{ のとき} \quad (39b)$$

この性質に着目して, V_E スペクトルの上限 V_{E0} を求めると次のようになる。まず, Parseval の定理により, 次式が成り立つ。

$$\int_0^{t_0} \ddot{y}(t)^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |F(\omega)|^2 d\omega \quad (40)$$

上式の左辺は加速度パワーと呼ばれるもので, これを I_E で表す。つまり,

$$I_E = \int_0^{t_0} \ddot{y}(t)^2 dt \quad (41)$$

前章までの検討により, 近似的に

$$V_E = \text{smoothed} |F(\omega)| \quad (42)$$

平滑化において, 近似的に次の条件が満たされている (本研究で用いたスペクトルウインドウは対称ウインドウではないので厳密には成り立たない)。

$$\int_0^\infty |F(\omega)|^2 d\omega = \int_0^\infty (\text{smoothed} |F(\omega)|)^2 d\omega \quad (43)$$

したがって,

$$I_E = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty V_E^2 d\omega = 2 \int_0^\infty V_E^2 \frac{1}{T^2} dT \quad (44)$$

上式に V_E のバイリニア特性, つまり (39) 式を代入すると, 次式が得られる。

$$I_E = 4 \frac{V_{E0}^2}{T_0}$$

あるいは

$$V_{E0} = \frac{\sqrt{I_E \cdot T_0}}{2} \quad (45)$$

これは, 文献 9) において別の方法で求められたものと一致する。

結局, V_E スペクトルは各種の平滑化要因によって, その上限は安定し, その上限値は地震動固有の加速度パワーと卓越周期のみで決定され, 構造物の特性には依存しないと言える。なお, 平滑化がかなり進行しても平滑化フーリエスペクトルがバイリニア型とはならない特種な場合 (例えばメキシコ地震におけるようなある特定の

調和波が極端に卓越するような場合)があるので、その時には(45)式による上限予測は適切ではない³⁾。また、弾塑性系の場合には、平滑化が低減フィルターで行われるので、Fig.8の矢印で示すようにバイリニア型の V_E スペクトルの折れ曲がり点が低周期側にシフトする。これは、文献4)で応答解析により明らかにされている。

7. 結 論

本研究は、地震動による構造物への入力をエネルギーで表現したとき、その入力量は地震動加速度の平滑化フーリエ振幅スペクトルから決定することができることを数理解的に明らかにしたものである。つまり、構造物への地震入力エネルギーを速度に換算したエネルギー換算速度応答スペクトル(V_E スペクトル)は、振動中の構造物の変動周波数の確率密度関数をスペクトルウィンドウとして用いて平滑化したフーリエ振幅スペクトルと極めてよく一致することを定量的に示した。減衰の増大や、塑性変形の増大、あるいは高層建物の2次以上の固有周期の影響が増大すると、構造物の振動周期の変動幅が大きくなるのでそれに伴い平滑化のウィンドウが広くなり V_E スペクトルはより平均化するという現象を解明した。

これらの知見に基づき、 V_E スペクトルを用いることにより地震荷重を構造特性と分離でき、しかも安定した荷重として扱うことができるという従来からの主張を支持するに至った。具体的には、与えられた地震動に対する V_E スペクトルが構造物の振動特性のうち弾性固有周期のみに支配されること、および V_E スペクトルがバイリニア型となる一般的な地震波について V_E の上限値は地震動固有の特性のうち加速度パワーと卓越周期のみか

ら決まり地震動に含まれる位相情報は無関係であることが明らかにされた。

参考文献

- 1) 加藤 勉, 秋山 宏: 強震による構造物へのエネルギー入力と構造物の損傷, 日本建築学会論文報告集, 第235号, pp.9~18, 1975.9
- 2) 日本建築学会: 建築耐震設計における保有耐力と変形性能(1990), 鋼構造, pp.261~337, 1990.10
- 3) Kuwamura, H. and Galambos, T. V.: Earthquake Load Effect for Seismic Risk Assessment, Proc.9 WCEE, Vol. V, pp.313~318, 1988.8
- 4) 秋山 宏: 建築物の耐震極限設計, 東大出版, 1980.9
- 5) 田治見宏: 建築振動学, コロナ社, 1973.2
- 6) 大崎順彦: 地震動のスペクトル解析入門, 鹿島出版会, 1980.4
- 7) Hudson, D. E.: Some Problems in the Application of Spectrum Techniques to Strong-Motion Earthquake Analysis, BSSA, Vol.52, No.2, pp.417~430, 1962.4
- 8) 桐野康則: 地震動のフーリエスペクトルとエネルギー入力スペクトルの相関に関する研究, 東京大学卒業論文, 1992.3
- 9) 桑村 仁: 耐震建築物の限界状態と破壊規範式, 日本建築学会構造系論文報告集, 第387号, pp.45~54, 1988.5
- 10) Housner, G. W.: Limit Design of Structures to Resist Earthquake, Proc. WCEE, No.5, pp.1~13, 1956.6
- 11) 桐野康則, 桑村 仁, 秋山 宏: 地震動のフーリエスペクトルとエネルギー入力スペクトルの相関に関する研究, 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.185~186, 1992.8

(1992年4月27日原稿受理, 1992年8月25日採用決定)