変位モード指定の構造形態解析法

ANALYTICAL METHOD OF STRUCTURAL SHAPE UNDER THE PRESCRIBED DISPLACEMENT MODE

半谷 裕彦*, 原田 和明**

Yasuhiko HANGAI and Kazuaki HARADA

An analytical method of structural shape, which belongs to the inverse problem in the field of structural analysis, is presented under the prescribed displacement mode. First, the load-displacement relation whose coefficient matrix is a function of an unknown position vector representing the structural shape, and the subsidiary condition for the prescribed displacement mode are formulated. Then, these two equations are analytically analyzed by using the Bott · Duffin inverse matrix. The obtained nonlinear equation which is a function of a position vector is numerically analyzed by Newton-Raphson method and by steepest descent method. Numerical examples show the validity of the proposed method.

Keywords : shape analysis, inverse problem, Bott · Duffin inverse, generalized inverse, Newton-Raphson method, steepest descent method

形態解析, 逆問題, Bott · Duffin 逆行列, 一般逆行列, Newton-Raphson 法, 最大傾斜法

1. 研究目的

構造解析の分野における逆問題のひとつに, 形態解析がある。 $\mathbf{x}$ を構造物の形態を表す位置ベクトルとするとき, 応力解析では形態 $\mathbf{x}$, 外力 $\mathbf{f}$, 境界 $\mathbf{C}$ を指定して, 変位 $\mathbf{d}$ や応力 σ を解析する (図-1)。一方, 形態解析では, 変位や応力 (あるいはその一部) 等を指定して構造形態 $\mathbf{x}$ を解析する。応力解析の方向を順方向とすると形態解析の方向は逆方向となっている。応力解析においては, 線形の基礎方程式を採用する場合, 解の存在や唯一性は保証されている。しかし, 形態解析では特別な場合を除き, 非線形基礎方程式となり, 解の存在や唯一性は保証されない。そのため, 基礎方程式の定式化や解析法の開発に工夫が要求され, 未解決な問題が多い。

図-1 応力解析と形態解析 (一は指定する量を示す)

形態解析法に関する既往の研究としては, 梅谷の成長変形法¹⁾, 尾田によるパターン変換法²⁾, 中桐の構造シンセシスによる方法³⁾, 瀬口らによる逆変分原理に基づく方法⁴⁾, 畔上の成長の構成則を取り入れた方法⁵⁾, 半谷らの一般逆行列による方法⁶⁾, 中村らの形態創成法に関する一連の研究^{7)~8)}, などを挙げることができる。形態解析を扱っている図書, レビュー論文として^{9)~15)}をあげておく。

形態解析を行う場合には, 目標とする量, あるいは形態が必要である。既往の研究の多くは, 最小重量や最大剛性, あるいは, 一様応力や一様ひずみエネルギー密度, 等を目標としている。本論文では「指定した荷重下において, 構造, あるいは, 構造の一部が変形前, 後において

指定した形状と同一となるように構造形態を決定すること」を目標とする。著者らは変位モード指定下において立体トラス構造の形態解析法をホモログス変形概念とともに提案した⁶⁾。その際, 一般逆行列を利用した解の存在条件を基礎とし, 解析法を定式化した。一方, 制約条件付きの連立方程式の解法としての Bott · Duffin 逆行列を利用し, 変位制

* 東京大学生産技術研究所 教授・工博

** 東京電力(株)技術研究所構造研究室 主任・工修

Prof., Institute of Industrial Science, Univ. of Tokyo, Dr. Eng.

Research Eng., Engineering Research Center, Tokyo Electric Power Company, M. Eng.

限を持つ構造物の解析法を提案した¹⁶⁾。本論文では Bott・Duffin 逆行列を利用した変位モード指定の形態解析法を述べる。

2. 基礎方程式

有限要素法, 差分法, ガラーキン法, 等により離散型の荷重・変位関係を求め, 境界処理を行うと次式に帰着できる。

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{d} \quad \cdots \cdots \cdots (1)$$

ここに, $\mathbf{f}$: 外力ベクトル, $\mathbf{K}(\mathbf{x})$: 剛性マトリクス, $\mathbf{d}$: 変位ベクトル, $\mathbf{x}$: 構造形態を表す座標パラメータ, である。ここで, $\mathbf{x}$ を 4 個のグループに分類する (図-2)。

$\mathbf{x}_h$: 変位モード指定を受ける座標パラメータ

(自由度 h)

$\mathbf{x}_f$: 形態変化する独立な座標パラメータ

(自由度 f , 未知量)

$\mathbf{x}_g$: 形態変化する従属な座標パラメータ

(自由度 g , $\mathbf{x}_g = \mathbf{g}(\mathbf{x}_f)$)

$\mathbf{x}_c$: 形態変化しない固定された座標パラメータ

(自由度 c)

全自由度数は $n = h + f + g + c$ で, $\mathbf{K}$ は $n \times n$ マトリクスとなっている。

変形後の形態は, 変形前の形態に変位を加えることで表すことができるので, 指定する形態を変位モードを用いて次式で与える。

$$\mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{0} \quad \cdots \cdots \cdots (2)$$

ここに, $\mathbf{A}$ は $m \times n$ マトリクスで, m は制約条件数である。ただし, $m < n$ とする。式 (2) において, 制約条件をすべて独立であるとする次式が成立する。

$$\text{rank}(\mathbf{A}) = m \quad \cdots \cdots \cdots (3)$$

$\mathbf{A}$ の行数とランクが一致しており, 次式が成立する¹⁰⁾。

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \quad \cdots \cdots \cdots (4)$$

ここに, $\mathbf{A}^+$ は $\mathbf{A}$ の Moore-Penrose の一般逆行列である。この場合, 次式は成立するが, $\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ ($\mathbf{I}_n$: n 次元単位マトリクス) は一般的には成立しない。

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{I}_m \quad \cdots \cdots \cdots (5)$$

(a) 初期形態

以上より, 変位モード指定の形態解析問題は, 式 (2) を制約条件とする式 (1) の解析問題 (未知量は $\mathbf{x}_f$ と $\mathbf{d}$ の一部) に帰着できた。しかし, このままの形式では解析が困難であるので, $\mathbf{x}_f$ のみを未知量とする基礎方程式に定式化する。

式 (1) は次式で与えられる全ポテンシャルエネルギー関数 Π の停留条件より得られる。

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} - \mathbf{f}^T \mathbf{d} \quad \cdots \cdots \cdots (6)$$

そこで, 式 (2) を制約条件とする上式の停留問題の定式化に Lagrange 乗数法を適用する。Lagrange 乗数ベクトル λ を導入し, $\mathbf{d}$ と λ を未知量とする制約条件無し の停留問題に変換する。その場合の全ポテンシャルエネルギー関数として次式を採用する。

$$\Pi_k = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} - \mathbf{f}^T \mathbf{d} + \lambda^T \mathbf{A} \mathbf{d} \quad \cdots \cdots \cdots (7)$$

$\mathbf{d}$ と λ の各成分で偏微分し, 零と置くことにより $\mathbf{d}$ と λ を未知量とする次の連立方程式が得られる。

$$\mathbf{K} \mathbf{d} - \mathbf{f} + \mathbf{A}^T \lambda = \mathbf{0} \quad \cdots \cdots \cdots (8)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad \cdots \cdots \cdots (9)$$

ここで,

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}^T \lambda \quad \cdots \cdots \cdots (10)$$

と置くと, 式 (8) は

$$\mathbf{K} \mathbf{d} + \mathbf{r} = \mathbf{f} \quad \cdots \cdots \cdots (11)$$

以上より, 式 (9), (11) が基礎方程式となる。ここで, $\mathbf{r}$ と λ の一対一対応を示しておく。式 (5) の転置をとると $(\mathbf{A}^+)^T \mathbf{A}^T = \mathbf{I}_m$ となる。式 (10) の両辺に $(\mathbf{A}^+)^T$ を掛けると

$$\lambda = (\mathbf{A}^+)^T \mathbf{r} \quad \cdots \cdots \cdots (12)$$

$\mathbf{A}^+$ は唯一に定まるから, $\mathbf{r}$ が与えられると λ も唯一に定まることがわかる。

3. 変位モード指定の形態解析の定式化

式 (11) において, $\mathbf{K}$ は $\mathbf{x}_f$ の関数であり, $\mathbf{x}_f$ が変化すると $\mathbf{r}$ も変化する。つまり, $\mathbf{r}$ も $\mathbf{x}_f$ の関数となる。そこで, 式 (11) を次式のように書き換える。

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}_f) = \mathbf{f} - \mathbf{K}(\mathbf{x}_f) \mathbf{d} \quad \cdots \cdots \cdots (13)$$

(b) 解形態

図-2 座標パラメータの分類

解となる形態を $\bar{x}_f$ で表すと、式 (1), (2) において、 $K(\bar{x}_f)d=f$, $Ad=0$ の両式を満足することから、

$$r(\bar{x}_f)=0 \quad (14)$$

以上より、変位モード指定の形態解析は以下のように定式化される。「 x_f 形態を表す未知ベクトルとする。このとき、

$$K(x_f)d+r(x_f)=f \quad (15)$$

$$Ad=0 \quad (16)$$

において、 $r(\bar{x}_f)=0$ となる $\bar{x}_f$ を求めよ。」

4. Bott・Duffin 逆行列による $r(x_f)$ の定式化

式 (15), (16) は x_f を固定したとき、 r と d の $2n$ 個を未知量とする $(n+m)$ 個の連次一方程式となっている。そこで、 r と d を分離し、 r と d を x_f の関数とする方程式を作成する。そのため、ここでは Bott・Duffin 逆行列を利用した解析法¹⁶⁾を採用する。

最初に d と r の直交性を示す。式 (10), (16) より

$$d^T r = d^T A^T \lambda = (Ad)^T \lambda = 0 \quad (17)$$

上式の関係より、 L を n 次元空間の部分空間、 $L^\perp$ を n 次元空間の L に対する直交補空間とすると

$$d \in L, \quad r \in L^\perp \quad (18)$$

となる。そこで、 P_L : n 次元空間から L 上への正射影マトリクス、 $P_{L^\perp}$: n 次元空間から $L^\perp$ 上への正射影マトリクス、 a : n 次元内のベクトル、とすると次式が成立する。

$$d = P_L a \quad (19)$$

$$r = P_{L^\perp} a \quad (20)$$

式 (19), (20) を式 (15) に代入すると

$$[KP_L + P_{L^\perp}]a = f \quad (21)$$

上式より

$$a = [KP_L + P_{L^\perp}]^{-1} f \quad (22)$$

上式を式 (19), (20) に代入すると

$$d = P_L [KP_L + P_{L^\perp}]^{-1} f \quad (23)$$

$$r = P_{L^\perp} [KP_L + P_{L^\perp}]^{-1} f \quad (24)$$

式 (23) の係数マトリクスを $K_{(b)}^{(1)}$ と置くと $K_{(b)}^{(1)}$ は K の Bott・Duffin 逆行列と呼ばれる。 $P_L, P_{L^\perp}$ は A によって定まったマトリクスとなり、 A が与えられると自動的に作成することができる¹⁰⁾。

式 (24) を式 (14) に適用すると、解は次式を満足する x_f となる。

$$r(x_f) = P_{L^\perp} [K(x_f)P_L + P_{L^\perp}]^{-1} f = 0 \quad (25)$$

ここで、上式の位置付けを行っておく。式 (15), (16) の定式化は、 $Ad=0$ を満足させながら $K(x_f)d=f$ の誤差 $r(x_f)$ を 0 とすることにある。他の定式化として、 $K(x_f)d=f$ を満足させながら、 $Ad=0$ の誤差 $e(x_f)$ を 0 とする方法がある。その場合の $e(x_f)$ は、

$$e(x_f) = AK^{-1}(x_f)f \quad (26)$$

で与えられる。本論文の目的は、Bott・Duffin 逆行列

を利用して式 (25) の定式化を試みたものである。

5. 数値解析法

式 (25) は x_f に関する非線形方程式であり、陽な形で解を求めることはできない。そのため、ここでは Newton-Raphson 法と最大傾斜法を用いて数値解析を行う。

$$f(x_f) = |r(x_f)| \quad (27)$$

と置き、 $f(x_f)=0$ となる x_f を求める。以下では、 $x=x_f$ として定式化を行う。Newton-Raphson 法と最大傾斜法は、反復法と呼ばれる手法である。まず、初期点 x_0 を定め、次に解に接近する一連の点、 $x^{(r)}$ ($r=1, 2, 3, \dots, n$)、つまり、 $f(x^{(r+1)}) < f(x^{(r)})$ の関係を満足する $x^{(r+1)}$ を求めて最小化を進める。

5.1 Newton-Raphson 法

点 $x^{(r)}$ における目的関数 $f(x)$ を、 x の接線勾配で近似し最小化を進める。

$$x_i^{(r+1)} = x_i^{(r)} - \frac{1}{(\partial f / \partial x_i^{(r)})} f(x_i^{(r)}) \quad (28)$$

ここに、 $x_i^{(r)}$: r ステップにおける x の i 成分、 $x_i^{(r+1)}$: $(r+1)$ ステップにおける x の i 成分、 $\partial f / \partial x_i^{(r)}$: r ステップにおける x の i 成分による関数 f の偏導関数、である。

5.2 最大傾斜法

目的関数 $f(x)$ の減少率が最大となる方向 $d^{(r)}$ を求め、最小化を進める。

$$x^{(r+1)} = x^{(r)} + h^{(r)} d^{(r)} \quad (29)$$

$$d^{(r)} = \frac{1}{[\sum (\partial f / \partial x_i^{(r)})^2]^{1/2}} \begin{bmatrix} \partial f / \partial x_1 \\ \partial f / \partial x_2 \\ \vdots \\ \partial f / \partial x_n \end{bmatrix} \quad (30)$$

ここに、 $x^{(r)}$: r ステップにおける x 、 $x^{(r+1)}$: $(r+1)$ ステップにおける x 、 $h^{(r)}$: ステップ長さ、 $d^{(r)}$: 最大傾斜方向ベクトル、である。ただし、ステップ長さ h については、解析傍における収束性を向上させるために次の規則を適用する。

$$f(x^{(r+1)}) \geq f(x^{(r)}) \text{ のとき、} h^{(r)} = h^{(r)}/2$$

$$f(x^{(r+1)}) < f(x^{(r)}) \text{ のとき、} h^{(r)} = h^{(r)}$$

6. 数値解析例

本論文で提案した方法の有効性を確かめるため、図—3(a)に示す解析モデル(平面トラス)の数値解析を行う。上弦節点に同一の鉛直方向荷重を作用させる。このときの変位を図—3(b)に示す。荷重が作用したときの節点 i の X, Y 方向の変位を $DX(i)$, $DY(i)$ とすると、上弦節点 1, 2, 3 の鉛直方向 (Y 方向) 変位は $DY(1)$, $DY(2)$, $DY(3)$ となる。変位モード指定として、節点 1, 2, 3 が変形後においても同一直線上に並ぶ ($DY(1)=$

$DY(2)=DY(3)$ ことを条件として設定する。このとき、指定した変位モードを満足する構造形態、つまり、節点4, 5, 6のY座標値を求める。ただし、 $Y(4)=Y(6)$ とするので未知パラメータ数は2($Y(4), Y(5)$)となる。

図-3(a) 解析モデル

図-3(b) 変位図

図-4 $|r|$ 曲面

図-5 $|r|$ 曲面の等高線図

この解析モデルにおいて、式(25)の $|r|$ と $Y(4)$, $Y(5)$ の関係を図-4に示す。このように非常に複雑な曲面となる。また、 $|r|$ 曲面の等高線図を図-5に示す。 $|r|=0$ となる曲線(網かけ部の境界線)上の点が、解形態を与える。解形態の一例として、図-5における点(a)~(f)の構造形態を図-6に示す。このように非常に複雑な $|r|$ 曲面において、零となる点を効率よく求める必要がある。そこで、 $|r|$ 曲面上での $|r|$ の最小化に、Newton-Raphson法および最大傾斜法を適用する。Newton-Raphson法による $|r|$ とステップ数の関数を、図-7に示す。最大傾斜法による $|r|$ とステップ数の関係を、ステップ長さ $h=-1.0, -0.5, -0.25$ の場合について、それぞれ図-8, 図-9, 図-10に示す。また、 $Y(4)$ とステップ数の関係、 $Y(5)$ とステップ数の関係を図-11, 図-12に示す。Newton-Raphson法と最大傾斜法を比較するために、平面的な収束状況を図-13に示す。さらに、最大傾斜法の収束状況の詳細を図-14に示す。この例の場合、Newton-Raphson法では解が発散している(解が得られた具体例は、文献18)に示してある)。

このように、Newton-Raphson法を採用すると、解を

図-6 解形態

図-7 ステップ数と $|r|$ の関係 (Newton-Raphson法)

求めることが不可能である場合も存在することがわかる。最大傾斜法を採用した場合は必ず収束し、かつ、ステップ長さ h が小さいほど初期点に近い解に収束することがわかる。

7. 結 語

構造形態は (a) 地震や風などの外部環境に対する抵抗能力を確保すること, (b) 機能上の要求を満足すること, (c) 人工構造物として環境に同化させること (美しいこと等), など, 種々の条件によって決定されてくる。ここでは, (b) 項に属する問題として, 与えられた外力の作用下において, 変位モードを満足する構造形態解

図-8 ステップ数と $|r|$ の関係 (最大傾斜法, $h=-1.0$)

図-9 ステップ数と $|r|$ の関係 (最大傾斜法, $h=-0.5$)

図-10 ステップ数と $|r|$ の関係 (最大傾斜法, $h=-0.25$)

析法を述べた。

形態解析法は構造解析における逆問題のひとつとして, 高度な非線形問題に属している。そのため, 解の存在条件や唯一性条件をはじめ, 解析法自身においても未解決の課題は多い。本論文では, 変位モードを満足する構造解析法のひとつの定式化を提案し, 具体例に適用した。図-5に示すように, このような簡単な例でも無数の解が存在する。そのため, 実際の設計において無数の解の中から, 他の条件によって設計すべき形態を決定することが必要となる。

式 (25) で与えられる非線形方程式は, 非常に複雑な $|r|$ 曲面を形成している。そのため, 微分係数に直接依存する Newton-Raphson 法では, 解が得られない場合が生じることがある (図-13)。今後, 非常に複雑な $|r|$ 曲面において, 零となる点を効率よく求める数値解析法が要望される。

図-11 ステップ数と $Y(4)$ の関係 (最大傾斜法)

図-12 ステップ数と $Y(5)$ の関係 (最大傾斜法)

図—13 収束状況 (Newton-Raphson 法と最大傾斜法)

図—14 収束状況の詳細 (最大傾斜法)

参考文献

- 1) 梅谷陽二：骨の形態と成長変形法，日本機械学会誌，第 79 巻 693 号，pp. 749～754，1976.
- 2) 尾田十八：機械構造設計の最適化手法とその応用 機械の研究，第 40 巻，6 号，1988.
- 3) 中桐 滋：離散化モデルと構造シンセシス 培風館，1992.
- 4) 瀬口靖幸，多田幸生：逆変分原理による構造物の形状決定問題 日本機械学会論文集，第 44 巻 381 号，pp. 1469～1477，1978.
- 5) 畔上秀幸：成長の構成則を用いた形状最適化手法の提案 日本機械学会論文集，第 54 巻 508 号，pp. 2167～2175，1988.
- 6) 半谷裕彦，関 富玲：ホモログス変形を制約条件とする立体トラス構造の形態解析 日本建築学会構造系論文報告集，第 405 号，pp. 97～102，1989.
- 7) 中村恒善，大崎 純：曲率半径をサブパラメータとした振動数領域に対する最適円筒状立体トラス生成法 構造工学論文集，35 B，pp. 103～110，1989.
- 8) 中村恒善：トラスの形態創成と最適トポロジー自然生成法 建築雑誌，Vol. 107，No. 1334，pp. 58～59，1992.
- 9) 日本機械学会編：構造・材料の最適設計 技報堂出版，1989.
- 10) 半谷裕彦，川口健一：形態解析——一般逆行列とその応用 培風館，1991.
- 11) 日本機械学会編：逆問題のコンピュータアナリシス コロナ社，1991.
- 12) 久保司郎：逆問題 培風館，1992.
- 13) 高木隆司：形の数理 朝倉書店，1992.
- 14) Topping, B.H.V. : Shape Optimization of Skeletal Structures, A Review, Journal of Structural Engineering, Vol. 109, No. 8, pp. 1933～1951, 1983.
- 15) Ding, Y. : Shape Optimization of Structures, A Literature Survey, Computers and Structures, Vol. 24, No. 6, pp. 985～1004, 1986.
- 16) 半谷裕彦，関 富玲：Bott・Duffin 逆行列による変位制限を持つ構造物の解析 日本建築学会構造系論文報告集，第 396 号，pp. 82～86，1989.
- 17) 大森博司：変分原理を用いた構造形態力学に関する基礎的研究 シェルと空間構造に関する夏期セミナー資料，1991.
- 18) Y. Hangai, K. Harada, : Analytical Method of Structural Shape under the Prescribed Displacement Mode, Proceedings of the IASS-MSU International Symposium, pp. 499～506, 1993.

(1993 年 2 月 9 日原稿受理，1993 年 8 月 17 日採用決定)