繰返し分布荷重を受ける構造物の静的崩壊解析の簡易的手法の提案

PRACTICAL METHOD FOR STATIC COLLAPSE ANALYSES OF STRUCTURES SUBJECTED TO CYCLIC MULTIPOINT LOADING

鈴木琢也 ——— * 1 中村尚弘 ——— * 2

Takuya SUZUKI ——— * 1 Naohiro NAKAMURA ——— * 2

キーワード：
 静的解析, 変位制御法, 多点载荷, 繰返し载荷, 崩壊解析

Keywords:
 Static analysis, Displacement control method, Multi-point loading, Cyclic loading, Collapse analysis

In this paper, a static collapse analysis method for cyclic multipoint-loaded structures using the displacement control is proposed. Then, It is confirmed that this method can be applied to the post peak analysis and the cyclic loading analyses by an example problem. In this method, “loading element” is proposed. This element calculates inner forces so that given load ratio conditions are always fulfilled. For application to the existing analysis program, we only have to add this proposed loading element. So, application of this method is very easy and simple.

1. はじめに

図1に示すような静的な地震荷重を繰返し受ける構造物の崩壊挙動を数値解析により把握することを考える。この解析においては、複数箇所に一定の荷重比率をもった繰返し荷重を受ける構造物の静的解析を、最大耐力後耐力劣化が生じる領域まで行う必要がある。本報はこのような解析をより簡便に実施するための手法について検討するものである。

上記のような構造物の解析に対して荷重制御法を適用すると、荷重の増分を定めそれを満たす点を探索するという性質から、最大耐力後荷重が低下する領域まで解析することはできない(図2(a))。

これに対し、荷重ではなく変位増分を定める変位制御法の適用がまず考えられる(図2(b))。ただし、一般的な変位制御方法は載荷点、すなわち変位制御点が1点である場合には容易に適用できるものの、今回対象とする多点载荷の問題には適用が難しい。なぜなら、多点载荷の場合、構造物の非線形化に伴い荷重分布比率を一定とするような変形状態は時々刻々と変化し、解析開始前に予め各載荷点の変位増分を決定することが困難であるためである。

一方、より高度な制御法として、弧長法¹⁾²⁾と呼ばれる手法が存在し、多くの汎用解析プログラムにも実装され、図1のような問題を解くことができる。弧長法は解くべき釣り合い式の荷重項を(1)式の右辺のように荷重パラメータ λ と、荷重モード $\mathbf{f}_{ref}$ に分け、荷重モードを既知として、(2)式の拘束条件式と連立することで、変位増分および荷重パラメータを求める手法である¹⁾。

$$\mathbf{K} \cdot \Delta \mathbf{u} = \lambda \mathbf{f}_{ref} \quad \dots\dots\dots (1)$$

図1 検討対象例

図2 各種制御法の違い

¹⁾ ㈱竹中工務店技術研究所 研究員・博士(工学)
 (〒270-1395 印西市大塚1-5-1)
²⁾ ㈱竹中工務店技術研究所 主任研究員・博士(工学)

¹⁾ Researcher, Takenaka Corporation, Dr. Eng.
²⁾ Chief Researcher, Takenaka Corporation, Dr. Eng.

図3 繰返し履歴

$$S(\Delta u, \lambda) = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

この拘束条件式には様々なものが提案されている^{例えは 2)3)4)}が Crisfield によって示された超球面型拘束⁵⁾に代表される、既知の釣り合い点から次の釣り合い点までの経路のベクトル長に拘束を加えて解く手法が広く知られている。ベクトル長を一定とする拘束を加えて経路探索した場合を図2(d)に示すが、弧長法の適用により、最大耐力後に耐力とともに変位が戻るような複雑な挙動（スナップバック）を示した場合であっても解析可能となる。しかし、弧長法は制御パラメータの設定が難しいほか、場合によっては除荷方向に経路を辿ってしまい望んだ解が得られないこともある⁶⁾。また、変位増分を設定するわけではなく、自動的に釣り合い点が探索される手法であるため、載荷が単調載荷で行われる場合には問題ないが、図3に示すような折り返し点の変位が指定された繰返し載荷で行われる場合には、載荷→除荷→載荷→除荷→・・・のそれぞれにおいて解析ステージを分ける必要があり、解析の実施が非常に煩雑になってしまう。また、既存のプログラムに組み込むことを考えた場合、その修正はアルゴリズムの制御部分の修正となり容易ではない。

この弧長法の短所を解決する手法として、Ramm⁷⁾、和田⁸⁾らなどの方法があり、複数の荷重を受けるラチスシェルの弾塑性座屈性状の解析等に適用されている⁹⁾。これらの手法は変位制御の枠組みで解析を行うため、スナップバックの挙動を解くことはできないものの、多点繰返し載荷問題も安定的に解くことができる。しかし、これらの手法を既存の解析プログラムに組み込むことを考えた場合、弧長法と同様、解析アルゴリズムの制御部分の修正が必要となるため、容易に適用可能であるとは言い難い。

現在までに建築構造解析用の非線形特性については多くの研究がなされ、多種多様な非線形特性が提案され、高度な構造計算に用いられるようになっていく。しかしながら、これらの非線形特性を利用して図1のような問題を解こうとした場合、まず、「非線形特性の入った既存のプログラムの制御機能を修正する」という方法が考えられるが、既に述べたように弧長法、Rammらの方法とも容易に導入できるとは言い難い。また、「弧長法等の制御機能を持つ汎用プログラムに非線形特性を実装する」という方法もあるが、コンクリートひび割れを3次元的に考慮できる非線形特性^{例えは 10)}のように複雑な特性を汎用プログラムに実装することは、コーディングの仕様やプログラム間の相性によっては、非常に多くの時間が必要となる場

表1 各種手法の特徴

制御法 (制御変数)	提案法 (変位)	Rammの方法 ⁷⁾ (変位)	弧長法 (弧長)
繰返し載荷への 適用性	○	○	×
実装の容易さ	○ 要素サブルーチン の追加のみ	△ 制御部分の大幅 な修正が必要	△ 同左

合がある。このため、最新の知見を反映させた特性を図1に示すような問題に適用するのは容易ではないといえる。

そこで、本研究においては、繰返し載荷でも解析ステージを分けずに実施でき、かつ簡便に実装できる分布荷重を受ける構造物の静的崩壊解析手法の提案を行う。なお、提案手法は Ramm らの方法の修正法の位置づけとなる。ただし、Ramm らの方法とは異なり、制御の部分の修正を必要とせず、要素の追加という極めて容易な修正で適用が可能な方法とする。表1には本提案手法と既存の手法の特徴をまとめる。

まず、提案する解析手法の詳細について説明する。つづいて提案手法による解析事例を示し、耐力劣化後も設定した荷重比率を保ちつつ履歴を追跡可能であること、繰返し荷重に対しても良好に機能することを確認する。

2. 載荷ばね要素を用いた静的解析手法の提案

2.1 提案手法の概要

本研究で提案する解析手法は、ある変位制御点（1点）および載荷点の変位に対して、常に設定した荷重比率の荷重を返す「載荷ばね」要素を用いて荷重比率の制御を行いつつ、解析全体としては指定した1点の変位を制御して解析するという手法である。

変位制御手法を選択することで、最大耐力後に除荷点を選択する場合がある弧長法に比べて安定的に解析できるほか、強制変位履歴を図3左上のように入力すれば繰返し挙動に対しても解析ステージを分けることなく容易に解析できる。また、文献4)の方法で必要となる入力変位の変換を必要とせず、直接制御点の変位を入力することが可能である。

加えて、変位制御法を用いるため、弧長法の組み込まれていない一般的な汎用構造解析プログラムに対して、提案する載荷ばねの追加という容易な変更で適用できるという特徴を有する。なお、前章で述べたように、提案手法は大別すれば変位制御法に分類されるため、座屈後挙動などの耐力劣化と変位の戻りが同時に生じるような問題を高精度に解くことは不可能であるが、図2(c)のような形であれば最大耐力後も釣り合い点を求めることはできる。

本提案手法を用いることで、図1に示すような高さ方向にある分布をもつ地震荷重を受ける建物や、ある一定の相関をもった軸力と曲げを受ける部材、あるいは、平面方向にある分布をもつ鉛直地震荷重を受けるスラブといった、分布荷重を受ける様々な構造物の静的構造解析を、耐力劣化を生じる場合や繰返し載荷を行う場合にも、安定的に解を求めることができる。

2.2 載荷ばね要素の構成

簡単な例を図4に示し、載荷ばね要素の構成および設置方法について説明する。

提案手法に用いる載荷ばね要素は、構造体の外側に仮想的に設けた解析上の変位制御点（図4中M点）と構造体中の各載荷点（図4中A～D点）とを結ぶばね群で構成される。ばね群は、他のばねに参照され荷重比率制御の基準となるばね要素（以降、マスタばねと呼ぶ）と、マスタばねの内力を参照し、自身の内力が予め設定した比率となるばね要素（以降、スレーブばねと呼ぶ）で構成される。マスタばねは要素の中にただ一つ存在し、解析上の変位制御点Mと変位を制御したい載荷点（図4の場合A点）を結ぶばねとなる。なお、解析上の変位制御点と実際に変位を制御したい載荷点が別の点になるが、両者を結ぶばね要素の剛性を極めて剛にすることで、工学的に問題のない範囲で構造体中の載荷点を制御することが可能となる。

つづいて、提案する載荷ばね要素の剛性マトリクスについて説明する。図4に示すように、マスタばねの剛性を K_m 、スレーブばね剛性を K_{si} とおけば、これらのばね要素の剛性マトリクスは一般的には式(3)のようになる。ここで、 f_N は N 点の節点力、 u_N は N 点の変位を示す。

$$\begin{Bmatrix} f_m \\ f_A \\ f_B \\ f_C \\ f_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_m + \sum K_{si} & -K_m & -K_{s1} & -K_{s2} & -K_{s3} \\ & K_m & & & \\ & & K_{s1} & & \\ & & & K_{s2} & \\ \text{Sym} & & & & K_{s3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_m \\ u_A \\ u_B \\ u_C \\ u_D \end{Bmatrix} \cdots (3)$$

しかしながら、本報で提案する載荷ばね要素は M 点と A 点の変位から定まるマスタばね要素の内力、および設定した荷重比率によって、節点力が全て定まるようにするため、要素内力の計算時には剛性マトリクスを式(4)のように定義する。なお、 α_N は A 点の載荷荷重に対する N 点の載荷荷重の比率であり予め設定されるものである。明らかに反力 $f_B \sim f_D$ は、それぞれ $\alpha_B \cdot f_A \sim \alpha_D \cdot f_A$ となり、設定した荷重比率が維持される。

$$\begin{Bmatrix} f_m \\ f_A \\ f_B \\ f_C \\ f_D \end{Bmatrix} = K_m \begin{bmatrix} 1 + \sum \alpha_i & -(1 + \sum \alpha_i) & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_B & \alpha_B & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_C & \alpha_C & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_D & \alpha_D & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_m \\ u_A \\ u_B \\ u_C \\ u_D \end{Bmatrix} \cdots (4)$$

なお、プログラムの中で変位から内力を計算する際に(4)式の剛性マトリクスを使ってもよいが、結果的に内力ベクトル $\{f\}$ を計算するのに必要な節点変位は、図4の場合、マスタばね要素に繋がる節点の変位 u_m 、 u_A のみであるから、下記のようにまず(5)式により、A 点に生じる節点力 f_A を計算したのち、その他の点の節点力を(6)式を用いて求めれば、計算効率は高くなる。

$$f_A = -K_m(u_m - u_A) \cdots (5)$$

図4 ばね要素群の設置

図5 荷重比率制御のフロー

1) 残差力は載荷用ばねと構造体内部全体を合わせたものとなる。

図6 ステップ内の収束判定フロー

$$\begin{Bmatrix} f_m \\ f_B \\ f_C \\ f_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 - \sum \alpha_i \\ \alpha_B \\ \alpha_C \\ \alpha_D \end{Bmatrix} f_A \dots\dots\dots (6)$$

ところで、(4)式の剛性マトリクスに現れないことから判断されるように、スレーブばねの剛性 K_{si} は載荷ばねの内力計算に実質的な意味をもたない。ただし、非線形解析の収束計算には初期剛性マトリクスや接線剛性マトリクスが必要となり、これには(3)式の形の剛性マトリクスを用いるため、スレーブばねの剛性 K_{si} を仮に定めておく必要がある。

本提案手法は、一般的な収束法であれば適用可能と考えられるため、ここでは接線剛性法（Newton-Raphson 法）を標準とする。接線剛性法において載荷ばねの接線剛性マトリクスは、式(3)中に現れるスレーブばねの剛性 K_{si} を、ひとつ前のイテレーションループにおいて得られた当該スレーブばねに対応する載荷点の反力 (F_N) を仮想のばね変位 ($\delta_N = u_N - u_m$) で除したものととして、イテレーションループ毎に更新する。なお、第1ステップ時の剛性マトリクスは、スレーブばね剛性 K_{si} をマスタばね剛性 K_m と同一の値とする。接線剛性法を適用する場合の収束性については、3章の例題解析時に、初期剛性法との比較を通して検討を行う。

2.3 荷重比率制御フロー

図5に提案したばね要素群によって荷重制御が行われる過程を示す。ステップ開始時の(a)の状態から変位制御点にある強制変位を加えると、最初のイテレーションでは設定した初期剛性を用いて計算

図7 3質点系せん断モデル

図8 せん断ばねの復元力特性

表2 要素物性値					
Ele.No.	K kN/m	δ_1 cm	δ_2 cm	α	β
3	5.0	1.0	3.0	0.50	0.20
2	5.0	1.0	3.0	0.50	0.20
1	5.0	2.0	4.0	0.40	-0.20

図9 荷重変位関係（単調載荷）

図10 要素内せん断力変形関係（単調載荷）

された仮定変位（図5(b)の状態）に対して載荷ばねおよび構造体の内力が計算される。このとき、載荷ばねに生じる内力は、マスタばねに生じている内力と設定された荷重比率を用いて式(4)により計算されるため、設定した荷重比率は満たされている。しかしながら、一般的に構造体に生じている内力とは釣り合っていないため、残差力が生じることになる。その場合、生じた残差力に応じて仮定変位が修正され、再度構造計算がなされ図5(c)の状態となる。ここでも残差力の確認が行われ、収束基準を満たしていれば次のステップへ、満たしていなければ、再度仮定変位の修正が収束条件を満たすまで繰り返される。

図6に本解析法における収束判定フローを示すが、載荷ばねと構造体の釣り合いも全体の残差力計算に含めることで、収束判定フローは一般的な構造計算のそれと何ら変わることがない。このため本提案手法は、汎用の構造解析プログラムにも導入しやすい特徴を有しているといえる。

3. 水平地震力を受ける3質点系モデルによる例題解析

3.1 解析対象

図7に示すせん断型3質点モデルが分布荷重を受ける場合の静的構造解析に本研究で提案する手法を適用した例を示す。

モデルは各質点について水平方向のみに自由度を持ち、高い点から順に3:2:1の比率で水平荷重を受ける。変位制御する点は頂部の質点とする。

質点間を繋ぐせん断ばねの復元力特性を図8に示す。なお、復元力特性はRC耐震壁を想定して設定する。スケルトン曲線は(a)に示す正負対称のトリリニア型とし、第2折れ点後の第3勾配には、 β

図 11 荷重比率の確認

図 12 繰返し載荷スケジュール

図 13 荷重変位関係（繰返し載荷）

を負とすることで負勾配を設定できる。履歴特性は(b)に示すように処女載荷時にはスケルトン曲線をトレースし、除荷時には原点指向型、再載荷時には最大点を指向するものとする。各要素の非線形特性を表 2 にまとめる。初期剛性は全て同じとし、最下層の要素 1 のみ 2 倍の弾性域を有するものとし、中間の要素 2 の降伏が先行するようにしている。また、要素 1 は第 2 折れ点後の第 3 勾配において耐力劣化を生じ、要素 2, 3 は耐力劣化を生じないものとする。最終的に要素 1 に変形が集中して崩壊するように設定している。

3.2 解析結果

(1) 単調載荷

図 9 に頂部質点の水平変位を単調に増加していったときの、最下層せん断力（総荷重）－頂部水平変位の関係を示す。図より各要素の剛性低下後とともに、要素 1 で最大耐力後に耐力が劣化する領域まで解析で追うことができています。図 10 には各要素の作用せん断力および要素変形量の関係を示すが、要素 1 が最大耐力後耐力劣化していくと要素 2 および要素 3 の変形は戻っている。これは要素 1 の耐力劣化に伴い全体荷重も低下し、要素 2 および要素 3 に作用するせん断力が除荷されるためである。この現象は、文献 4) でも指摘されているように、外力の比率を一定として適切な静的解析を行った場合に現れるものである。

図 11 には、荷重比率制御が高精度に行われているかを確認するために、各ステップにおける外力（すなわち、非線形ばね群の内力）の比率を示す。比率はそれぞれの外力を最下層の外力で除して求めている。図より、最大耐力の前後を問わず設定した荷重比率（1:2:3）は常に満たされており、本提案手法による荷重比率制御が良好に機能していることが確認できる。

(2) 繰返し載荷

つづいて、図 12 に示す変位履歴を強制変位として加えた解析を行い、繰返し載荷時における本提案手法の適用性を検討する。繰返し変位は図 9 の結果を参考に、1 サイクル目を全要素が降伏に至る $\pm 6\text{cm}$ 、2 サイクル目を要素 1 が最大劣化状態になる $\pm 12\text{cm}$ とし、最終サイクルは正側に押し切る履歴とした。

最下層せん断力（総荷重）－頂部水平変位の関係を図 13 に示す。図より繰返し載荷に対しても安定して解析結果を得ることができていることがわかる。また、解析上変位制御している節点は頂部質点ではないものの、変位制御点と頂部質点を繋ぐ載荷ばねを十分剛とすることで図 12 に示した載荷履歴を精度よく再現することができ

(a) 総荷重

(b) イテレーション回数

図 14 接線剛性法と初期剛性法の収束性の差異

ている。以上より、提案手法は精度の高い変位制御が可能であり、繰返し荷重に対しても適用可能であるといえる。

3.3 収束性に関する検討

2 章で説明したように、本報で提案する載荷ばねは載荷点のマススタバねの両端の節点変位のみから全載荷点の荷重を定めるため、一般的に収束計算が必要となる。ここでは、収束方法の違いが本提案手法の収束性に与える影響を確認する。比較する収束方法は、3.2 節でも用いた提案手法の標準である接線剛性法および初期剛性法とする。収束判定は「各自由度の残差力」によって行い、許容誤差は 0.01kN としている。なお、いずれの収束法においても、全てのステップにおいて収束条件を満たした。

図 14 は、単調載荷時の各ステップにおいて解として得られた総荷重およびイテレーション回数を示したものである。図中、黒実線が接線剛性法を、灰破線が初期剛性法に対応する。

得られた荷重値を比較すると、耐力劣化後にわずかに両者の差異が確認できるが、いずれも収束条件を満たしているため、その差異はごく小さい。イテレーション回数を比較すると、接線剛性法では図中網かけで表わした耐力劣化域においてやや回数が増しているが、最大でも 14 回で収束値を得ている。一方、初期剛性法は、耐力上昇域で概ね 100～300 程度、耐力劣化域では 1000～1600 程度のイテレーション回数となっている。したがって、提案手法において、初期

剛性法を用いた場合の収束速度は、接線剛性法に比べて非常に遅く、接線剛性法が優位であるといえる。ただし、接線剛性法は各イテレーションループにおいて接線剛性マトリクスを更新する必要があるため、計算時間という観点では、初期剛性法に比べて優位となる場合があり、扱う解析モデルによって使い分けが必要と考えられる。

4. まとめ

本報では、複数箇所にある一定の荷重比率をもった繰返し荷重を受ける構造体の静的解析を、耐力劣化を生じる場合や繰返し载荷を行う場合にも適用でき、かつ既存のプログラムに容易に適用できる手法の開発を目的とし、経路探索に変位制御を選択するとともに、荷重比率を一定にするための载荷ばね要素を配して解析する手法を提案した。

さらに例題解析を実施し、提案手法が一般的な架構に対して、i) 各载荷点の荷重比率の維持、ii) 最大耐力後の挙動までの適用、iii) 繰返し载荷時の制御点変位の高精度な制御、が可能であることを確認した。

本提案手法の特徴の一つとして、解析プログラムの制御部分の変更を必要とせず、要素の追加という比較的容易な機能追加で済む点がある。本提案手法を適用することで、通常の変位制御のみが利用可能な既存のプログラムであれば、本研究で対象とするような問題を解析可能なプログラムに容易に修正することができる。

参考文献

- 1) 久田俊明, 野口裕久: 非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善, 2004
- 2) 野口裕久, 久田俊明: 座屈後挙動における感度解析手法の開発, 日本機械学会論文集 (A編), Vol.58, No.556, pp.2415-2422, 1992
- 3) Batoz, J. L. and Dhatt, G.: Incremental Displacement Algorithms for Nonlinear Problems, Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 14, pp.1262-1267, 1979
- 4) Ekkenhard Ramm: Strategies for Tracing the Nonlinear Response Near Limit Points Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics (Ed. Wunderlich, W. et al.), pp.63-89, 1981
- 5) Crisfield, M., A., A Fast Incremental/iterative Solution Procedure that Handles Snap Through, Compt. & Struct., Vol.12, pp.55-62, 1981
- 6) Abaqus Analysis User's Manual (Abaqus 6.11)
- 7) Ekkenhard Ramm: The Riks/Wempner approach - An extension of the displacement control method in nonlinear analysis, Recent advances in nonlinear computational mechanics, Pineridge, Swansea, UK, 1982
- 8) 須藤福三, 和田章: 複数の荷重を受ける構造物の不安定領域を含んだ非線形解析法について, 日本鋼構造協会第11回大会研究集会マトリクス解析法研究発表論文集, pp217-222, 1977
- 9) 向秀元, 和田章: 弾塑性座屈性状, 屋根型円筒ラチスシェル構造の解析・設計, 日本建築学会, pp123-126, 1995.12
- 10) Noguchi, H. et al.: TTC Hsu Symposium, ACI, SP-265, pp. 223-244, 2009.

[2012年6月20日原稿受理 2012年8月17日採用決定]