多質点系の応答記録に基づく
弾塑性モード特性STUDY ON ESTIMATED MODAL
PROPERTIES USING INELASTIC
TIME-HISTORY RESPONSE RECORDS
OF MDOF SYSTEMS

益野英昌 ——*1 柴田明徳 ——*2

Hidemasa MASUNO ——*1 Akenori SHIBATA ——*2

キーワード:

弾塑性モード分解, 共分散マトリックス, 固有値解析, 多自由度モデルシステム

Keywords:

Estimated inelastic modal properties, Covariance matrix, Eigen value analysis, MDOF-systems

Using the method of estimating modal shapes and modal amplitudes from response time-history data proposed by the authors, the statistical properties of estimated modal values are examined based on the elastic and inelastic responses of 6 mass models against 10 simulated earthquake waves. The equivalent periods corresponding to large inelastic amplitudes are also discussed.

1. はじめに

筆者らは, 先に共分散マトリックスに基づく地震応答のモード解析の新たな方法を示し, 震害建物モデルの応答に適用した^{1) 2) 3)}。また, この方法を等質量モデル, 不等質量モデルの2つに適用し, これらのモデルの弾塑性応答変位の時系列記録の共分散マトリックスから, 弾塑性応答時のモード形・モード振幅の変動関数スペクトルを求め, 滝田らの方法⁴⁾と比較検討を行い, さらに求めた推定モードの直交性を確かめた⁵⁾。本報では, 10波の模擬地震動による質点系モデルの弾性及び弾塑性時系列記録から推定される, モード形及びモード振幅の特性を統計的に考察した。

2. 地震応答記録による弾塑性モード解析法

本方法は, 滝澤^{6) 7)}, 滝田らの方法⁴⁾を発展させ, 質量分布を考慮し, 1次, 2次と低次から順にモードを掃き出す様に工夫したものである。応答の共分散マトリックス $[C_v]$ から推定された推定モードマトリックス $[V]$ ^{1) 2)}を用いて, モード振幅の時間変動 $\{s a(t)\}$ を(1)式のように定義する。

$$\begin{aligned} \text{ここで } [C_v] &= E\{\{y(t)\}\{y(t)\}^T\} \quad \text{ただし } E; \text{時間平均。} \\ \{y(t)\} &= \{v_1\} a(t) + \{v_2\} a(t) + \dots + \{v_n\} a(t) \\ &= \sum_{s=1}^n \{v_s\} a(t) \\ &= [V] \{s a(t)\} \quad \dots\dots(1) \end{aligned}$$

$s a(t)$; s 次の時刻 t における推定モード振幅

$\{v_s\}$; s 次の推定モードベクトル ($\{v_s\}^T [M] \{v_s\} = 1$ に正規化)

$[V]$; 推定モードマトリックス ($\{v_s\}^T [M] \{v_s\} = 1$ に正規化)

$\{y(t)\}$; n 層の基礎からの相対変位応答値 (測定データのベクトル)

$[M]$; 質量マトリックス (対角)

推定モード $[V]$ が真のモードと同じく $[M]$ を介して直交すると仮定すれば, (1)式の両辺に前から $\{v_s\}^T [M]$ をかけると右辺では $\{v_s\}^T [M] \{v_s\}$ の項のみ残り, $s a(t)$ が以下のように求められる¹⁾。

$$s a(t) = \frac{\{v_s\}^T [M] \{y(t)\}}{\{v_s\}^T [M] \{v_s\}} \quad \dots\dots(2)$$

高次の推定モード $[V]$ を求める手順は, 以下の通りである。

- ① 応答の共分散マトリックス $[C_v]$ を直交化し, (3)式より求める推定モードマトリックス $[V]$ と(2)式を使って1次の $\{v_1\}$, $s a(t)$ を求める。ここでは, $[C_v]$ は実対称行列なので, $[V]$ は $[M]$ を介さずに直交する。

$$[C_v] = [V] [\Lambda] [V]^T \quad \dots\dots(3) \quad [\Lambda]; \text{固有マトリックス}$$

- ② 推定モードが真のモードと同じく $[M]$ に直交すると仮定し, $\{y(t)\}$ から1次成分を取り去った値 $\{y'(t)\} = \{y(t)\} - \{v_1\} a(t)$ を求め, $\{y'(t)\}$ の共分散マトリックス $[C_v']$ を直交化して, 推定モード $[V']$ を求める。

- ③ 推定モード $[V']$ より(2)式を使って最大固有値に対応する $\{v'_1\}$, $s a'(t)$ (s' が最大の時のモード)を求める。1次振動成分は②の操作で除かれているので, 2次振動成分が最大固有値に相当する。よって $\{v'_1\}$, $s a'(t)$ が, 2次モードの $\{v_2\}$, $s a(t)$ に相当すると考えられる。

- ④ $\{y(t)\}$ から1次, 2次成分を取り去った値, $\{y''(t)\} = \{y'(t)\} - \{v'_1\} a'(t)$ を求める。

以下同様に, n 次モードまで順次求める。

これをモード減算法と呼ぶ。等質量モデル(モデル1)の場合は, モード減算法の場合と $\{y(t)\}$ の共分散マトリックス $[C_v]$ より

(3)式で一挙に求めた場合の推定モードが一致する。

*1 仙台第二工業高等学校 教諭・博士(工学)
(〒983-0042 仙台市宮城野区東宮城野3-1)

*2 東北大学 名誉教授, 東北文化学園大学 教授・工博

*1 Instructor, Sendai Second Technical High School, Dr. Eng.

*2 Prof. Emeritus, Tohoku Univ., Prof., Tohoku Bunka Gakuen Univ., Dr. Eng.

3. 数値モデルによる検討

模擬地震波 10 波による応答記録（弾性・弾塑性） $\{y(t)\}$ から、推定モード $[V]$ 及びモード振幅の時間変動 $\{s a(t)\}$ を求め、検討を行った。模擬地震波の作成法は文献 8) による。模擬地震波 10 波の最大加速度の平均値は 405.6gal、変動係数は 0.09、継続時間は 40.96 秒である。 $[C_v]$ の評価時間は地震動の継続時間とした。

3.1 解析モデル

解析モデルは、図 1 に示すような等質量分布（モデル 1）及び、不等質量分布（モデル 2）で 1 次モード逆三角形分布となる 6 質点せん断型モデルであり、1 次弾性周期は両モデルとも 0.6 秒、2 次、3 次の弾性周期は表 1 に示した。耐力分布は A_i 分布、ベースシャは 0.4 とした。履歴特性は、バイリニア型とし、バイリニア係数 1%、減衰特性は質量比例型とした。1 次の初期減衰 h_1 は 5% とした。質量比例型減衰による地震応答記録には高次のモードが多く含まれるので、剛性比例型減衰より高次の分離がうまくいく⁹⁾。

3.2 地震応答記録 $\{y(t)\}$

模擬地震動 10 波による 2 種類の解析モデルの、地震応答計算値（弾性・弾塑性）合計 40 種類の $\{y(t)\}$ を用いた。

弾塑性応答では、各層塑性率の平均値は、モデル 1 では 2.32、モデル 2 では 2.54、変動係数はそれぞれ 0.28、0.27 となっている。

3.3 推定モード $[V]$ の性質

地震応答記録 $\{y(t)\}$ について求めた推定モード $[V]$ の平均値とその変動係数をモデルごとに表 2 に示す。なお、表 2 での各モードは、最下層の元を 1.00 として表し検討した。また比較のため、このモデルの弾性時の固有値解析により求めた固有モードを真のモードとして示した。

図 1. 解析モデル

a) 弾性推定モード $[V]$

弾性推定モードと真のモードとの違いを検討した。全ての弾性推定モードとも真のモードの値に近く、最も離れた場合でも、真のモードの値の 1 割程度の違いである。1 次の推定モードについては、各地震波とも、真のモードと $\pm 1\%$ 以下の違いである。変動係数も 1 次のほうが、2 次、3 次の変動係数より、1 桁少なくなっている。モデルによる違いでは、モデル 2 より、モデル 1 のほうが、真のモードに近く、変動係数が小さい。

b) 弾塑性推定モード $[V]$

推定 1 次モードを真の 1 次モードと比較すると、真のモードと最大で 1 割程度の違いで類似している。

高次モードでは、モデル 1 の 2 次、3 次モード形とモデル 2 の 2 次モード形が真のモード形に類似しているが、モデル 2 の 3 次モード形は、真のモード形と異なっている。

弾塑性推定モードの変動係数の大小という観点から見ると、低い次数の推定モードの方が、変動係数が小さい。また、モデル 2 より、モデル 1 が、変動係数が小さい。

c) 推定モード $[V]$ の直交性

得られた推定モード $[V]$ の質量マトリクス $[M]$ に対する直交性を調べた。すなわち非対称項 $\{v\}^T [M] \{v\}$ ($r \neq s$) の値がどれだけ 0 に近いかを検討した。なお、ここでの $\{v\}$ は $\{v\}^T [M] \{v\} = 1$ に正規化している。いずれの推定モード $[V]$ に対しても非対角項の値は、誤差の範囲で 0 に近く（弾性 $10^{-16} \sim 10^{-15}$ 、弾塑性 $10^{-10} \sim 10^{-8}$ ）で十分に数値的な直交性が示される。さらに、10 波それぞれの地震応答記録による推定モードの平均値においても、非対角項が、 10^{-1} 程度で大まかな直交性を示している。

表 1. スペクトルのピーク値、等価線形化による各次の固有周期（秒）

		1次	2次	3次
モデル 1	モデルの周期	0.600	0.245	0.155
	スペクトルのピーク(弾性)	0.594	0.248	0.153
	スペクトルのピーク(弾塑性)	0.594	0.248	0.152
	等価線形化周期1	0.914	0.373	0.236
	等価線形化周期2	0.764	0.312	0.197
モデル 2	モデルの周期	0.600	0.287	0.192
	スペクトルのピーク(弾性)	0.594	0.286	0.191
	スペクトルのピーク(弾塑性)	0.594	0.288	0.190
	等価線形化周期1	0.956	0.458	0.306
	等価線形化周期2	0.800	0.383	0.256

表 2. 真のモード、推定モード $[V]$ （最下層の元を 1.00 として表現）

モデル 1	真のモード			弾性推定モード $[V]$						弾塑性推定モード $[V]$					
	1 次	2 次	3 次	1 次		2 次		3 次		1 次		2 次		3 次	
				変動係数	変動係数	変動係数	変動係数	変動係数	変動係数	変動係数	変動係数	変動係数	変動係数	変動係数	変動係数
	6.00	-2.75	1.10	5.95	0.006	-2.58	0.02	1.05	0.04	6.57	0.33	-1.54	0.44	1.87	0.72
モデル 2	5.00	0.00	-1.65	4.96	0.005	-0.04	0.25	-1.50	0.04	5.54	0.30	-0.22	0.88	-1.67	0.64
	4.00	1.50	-0.90	3.97	0.004	1.38	0.02	-0.89	0.02	4.42	0.29	0.76	0.67	-1.56	0.94
	3.00	2.00	0.55	2.99	0.003	1.89	0.01	0.44	0.08	3.21	0.25	1.23	0.36	0.25	2.46
	2.00	1.75	1.30	1.99	0.002	1.70	0.01	1.21	0.03	2.05	0.15	1.32	0.21	0.99	0.45
	1.00	1.00	1.00	1.00	0.000	1.00	0.00	1.00	0.00	1.00	0.00	1.00	0.00	1.00	0.00
モデル 2	真のモード			弾性推定モード $[V]$						弾塑性推定モード $[V]$					
	1 次	2 次	3 次	1 次		2 次		3 次		1 次		2 次		3 次	
				変動係数	変動係数	変動係数	変動係数	変動係数	変動係数	変動係数	変動係数	変動係数	変動係数	変動係数	変動係数
	6.00	-5.73	3.08	6.07	0.008	-5.74	0.03	2.78	0.05	6.38	0.35	-3.28	1.00	1.15	4.03
	5.00	-1.56	-1.94	5.03	0.006	-1.46	0.02	-1.80	0.06	5.63	0.36	-0.80	0.95	-0.19	5.76
	4.00	0.85	-1.45	4.01	0.004	0.88	0.05	-1.34	0.03	4.33	0.34	0.14	4.54	-0.45	4.22
	3.00	1.83	0.35	3.00	0.003	1.79	0.03	0.31	0.16	3.13	0.30	0.92	0.41	-0.55	1.13
	2.00	1.72	1.27	2.00	0.002	1.68	0.01	1.20	0.03	2.04	0.21	1.21	0.17	0.32	1.94
	1.00	1.00	1.00	1.00	0.000	1.00	0.00	1.00	0.00	1.00	0.00	1.00	0.00	1.00	0.00

図2. モード振幅のスペクトル
[弾性, モデル1, 10波の平均値]

図3. モード振幅のスペクトル
[弾塑性, モデル1, 10波の平均値]

図4. モード振幅のスペクトル
[弾性, モデル2, 10波の平均値]

図5. モード振幅のスペクトル
[弾塑性, モデル2, 10波の平均値]

3.4 モード振幅 $\{s, a(t)\}$ の特性

a) 10波の地震応答記録による統計的性質

図2～5に3.2の地震応答記録 $\{y(t)\}$ を使って求めたモード振幅 $s, a(t)$ のフーリエ振幅スペクトルを示す。モデル1, 2の弾性, 弾塑性のそれぞれについて, 10波の地震応答記録によるスペクトルの平均を示している。スペクトルの各周期における変動係数の平均は, モデル1の弾性で0.61, 弾塑性では0.65, モデル2では弾性で0.61, 弾塑性では0.48となっている。

また, 全時間(40秒)の記録を用いた本方法のスペクトルのピーク値を表1に示す。さらに, 比較のためモデルの弾性周期及び等価線形化周期を同表中に示した。等価線形化周期 T_e として, 各モデルについて, 各層の塑性率の平均 $\bar{\mu}$ により, 以下の式により定義した。

$$T_e = \sqrt{\bar{\mu}} \times T \quad \dots\dots(4) \quad \text{[等価線形化1]}$$

$$T_e = \sqrt{0.7\bar{\mu}} \times T \quad \dots\dots(5) \quad \text{[等価線形化2]}$$

ただし T : 初期周期

弾性応答によるモード振幅 $s, a(t)$ のスペクトル

1, 2, 3次モードのスペクトルとも, それぞれのピークがはっきりしており, それぞれのピークが, 表1のモデルの周期とほぼ一致する。また, 各モードのスペクトルは, 単一のピーク成分を持ち, 他のモードの成分は分離されている。

弾塑性応答によるモード振幅 $s, a(t)$ のスペクトル

1次モードについては, 弾性1次周期に対するピークが最も大きく表れ, 塑性化周期のピークはわずかに表れている。塑性化周期は, 個々の地震波のスペクトルでは, かなりよく表れているが, 平均化すると見えにくくなる。

2次, 3次モードでは, それぞれ2次, 3次のピークはみえているが, 他のモードも残る。また, モデル1よりモデル2の方が, 他のモード成分が残る割合が多い。

b) 弾塑性1次モード振幅の検討

塑性化による, 長周期化をみるために, モード振幅 $s, a(t)$ が最大値を示す時刻の前後1秒間のフーリエ振幅スペクトルを求めた。モデル1の地震波1の地震応答記録を使って求めた1次の弾塑性のモード振幅スペクトルを図7に示す。比較のために, 同じ条件

で求めた弾性のモード振幅スペクトルを図6に示す。図6の弾性スペクトルには, モデルの1次周期の0.6秒がピークとして表れるのに対し, 図7の弾塑性スペクトルには, モデルの1次周期の0.73秒がピークとして表れる。このことは, 最大変形近傍の1次モードスペクトルのピークと, 表1の等価線形化周期2が対応していることを示している。

4. まとめ

本方法による弾塑性モード解析方法を使用して, 異なる2つのモデルについて, 10波の地震応答記録により弾性・弾塑性モード解析を行い, 弾塑性応答時のモード形・モード振幅の平均および変動関数スペクトルについて示し, 統計的に考察した。

さらに最大変形近傍での弾塑性応答によるモード振幅から, そのスペクトルを使い塑性化周期の検討を行った。

本方法を使うことにより, 弾塑性多質点系モデルの塑性化周期の伸びを明らかにすることができ, 塑性時の等価線形化周期を推定することができた。今後は, さらに異なる種類の応答量や塑性応答レベル等について検討を進めたい。

参考文献

- 1) 益野英昌, 柴田明徳: 震害建物モデルとした弾塑性地震応答のモード解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集B-2構造Ⅱ, pp. 391～392, 1998. 9.
- 2) 益野英昌, 柴田明徳: モード分解に基づくペントハウスを有する建物の地震応答性状の検討, 構造工学論文集, Vol. 45B, pp. 65～72, 1999. 3.
- 3) 益野英昌, 柴田明徳: 震害建物モデルとした弾塑性地震応答のモード解析(その2), 日本建築学会大会学術講演梗概集B-2構造Ⅱ, pp. 469～470, 1999. 9.
- 4) 滝田貢, 飛田潤, 毛呂真, 伊藤敬一: 多点同時記録による応答モードの評価, 構造工学論文集Vol. 43B, pp. 493～502, 1997. 3.
- 5) 益野英昌, 柴田明徳: 多質点系の応答記録に基づく弾塑性モード解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集B-2構造Ⅱ pp. 485～486, 2000. 9.
- 6) 滝澤春男, 関弘義: 架構の塑性履歴応答結果に対するモード分解手法とその意義, 構造工学論文集, Vol. 32B, pp. 89～100, 1986. 3.
- 7) 滝澤春男: 梁崩壊型塑性架構の動的機構形成における定モード成分の抽出, 構造工学論文集, Vol. 36B, pp. 245～258, 1990. 3.
- 8) 益野英昌, 柴田明徳, 小川淳二, 渋谷純一: RC造震害建物の応答解析に基づく付加構造物の制震効果の検討, 構造工学論文集, Vol. 44B, pp. 295～300, 1998. 3.
- 9) 益野英昌, 柴田明徳: 多質点系の応答記録に基づく弾塑性モード解析(その2), 日本建築学会大会学術講演梗概集B-2構造Ⅱ, pp. 535～536, 2001. 9.

図6. モード振幅のスペクトル
[弾性, モデル1, 地震波1, ピーク±1秒]

図7. モード振幅のスペクトル
[弾塑性, モデル1, 地震波1, ピーク±1秒]

[2001年10月11日原稿受理 2002年2月18日採用決定]