動的計画法による再突入飛行の最適軌道設計^{*1} Optimal Trajectory Design for Reentry Flight by using Dynamic Programming

原 田 明 徳^{*2}・宮 沢 与 和^{*3}
Akinori HARADA and Yoshikazu MIYAZAWA

Key Words: Reentry, Optimal Control, Guidance, Optimal Trajectory, Multipurpose Optimization, Dynamic Programming

Abstract: Optimal trajectory design for reentry flight is studied by using Dynamic Programming (DP) method. DP is selected to make use of its ability of generating the optimal trajectory in real time as well as its simplicity to handle inequality constraint conditions for the trajectory optimization. The large amount of calculations to reduce discretization error in case of fewer control variables than the state variables is one of the drawbacks, but it is solved with two proposed techniques of Augmented Control Variables (ACV) method and the Least-error Grid-point Selection (LGS) method.

1. は じ め に

スペースシャトルは2011年に30年間にわたる運用を終えたが、有翼型の宇宙往還機は有人宇宙活動の基本要素であり、将来宇宙輸送システムの研究において検討は続けられている。特に、宇宙からの帰還における再突入飛行には空力加熱の問題があり、機体システム設計において基本課題を残している。機体システムの検討において再突入飛行の軌道設計は重要な要素であり、研究の進展のためには設計条件を変えた数多くの解析を行う必要がある。本研究は、軌道最適化の計算を短時間に確実に行うことができる動的計画法の利点を活かして再突入飛行に応用し、簡単な例題を用いてその有効性を検討する。

最適制御問題に対しては古くから変分法による数値解法が確立しており、一般によく利用される^{1~3)}。変分法とはEuler-Lagrangeの微分方程式を2点境界値問題として解くものであり、適当な初期解を定めて繰り返し計算を行う必要があるため、初期値や終端条件、評価関数、拘束条件の変更に対して調整を必要とする。また、最近では計算機の実能力の向上に伴い、制御変数や状態変数を有限個の変数に離散化し、汎用のパラメータ最適化の数値解析手法を用いて最適解を求める直接法も使用される³⁾。近年では少ない離散点で高精度の解が得られる方法としてPseudospectral法が盛んに研究されている^{4,5)}。しかし、直接法には、局所最適解の問題や、与えられた誤差の範囲内に収めるように反復計算を行うため計算時間が不確定であるという欠点がある。再突入飛行の解析ばかりでなく、誘導制御システムの設計において、扱いやすく短時間で確実に最適軌道を求めることができる最適化の数値解析手法が求

められている⁶⁾。この要求を満たす方法として動的計画法(Dynamic Programming, DP)を選択し、最適制御問題への適用可能性について検討する。

動的計画法はHamilton-Jacobi-Bellmanの偏微分方程式を数値的に解くものであり以下のような利点と欠点を持つ⁶⁾。

利点

- ①システムの状態を有限個の格子点で表し、遷移のすべての組み合わせを効率よく探索する。格子点間では繰り返し計算が不要なため計算量が予測でき、軌道生成が確実に可能となる。
- ②すべての組み合わせを調べるため大域的最適解が得られ、局所最適解の問題が生じない。
- ③状態変数と制御変数に制約条件がある場合でも容易に対応できる。制約条件の変化に対して計算法が複雑になることがなく、同じアルゴリズムで解くことができる。

欠点

- ①状態変数を分割することにより離散化誤差が発生する。この離散化誤差を小さくするため分割の方法に工夫を要する場合がある。
- ②制御変数の個数が状態変数の個数よりも少ない場合、格子点を結ぶ解が極端に少なくなり非常に細かい格子が必要となる。
- ③状態変数の次元が大きくなると計算量、メモリ容量が極端に増加し計算に膨大な時間を要するようになる。この欠点は動的計画法を提案したBellmanにより「次元の呪い」と名付けられた^{1,3,7)}。

これらの欠点は動的計画法の適用範囲を狭める原因となっている。しかし、計算機の実能力すなわち計算速度およびメモリ容量は近年急速に進歩しており、応用範囲の拡大を追求すべきである。本研究の目的は、上記の欠点を克服して動的計画法を適用できる問題の範囲を拡張し、宇宙往還機システムの研究推進に貢献することである。特に、欠点

^{*1}©2012 日本航空宇宙学会

平成23年11月17日、日本航空宇宙学会西部支部講演会にて発表
平成24年5月28日原稿受付

^{*2}九州大学大学院工学府航空宇宙工学専攻

^{*3}九州大学大学院工学研究院航空宇宙工学部門

②の制御変数が少なく離散化誤差の抑制が困難な問題に対する解決方法を提案する。

2. 再突入飛行における最適軌道設計

現在までに実用化された再使用型宇宙往還機 (Reusable Launch Vehicle, RLV) は弾道飛行を行うカプセル回収方式とスペースシャトルに代表されるような有翼回収方式に大別される。両者の大きな違いは、カプセル型RLVの飛行では加速度が 6G程度と人間の耐えうる限界値に近くなるのに対し、有翼型RLVでは揚力を調節することにより 1.5G程度に抑えられることである。本稿では後者による再突入飛行を対象とする。宇宙空間から地上へ帰還するには、初期の大きな力学的エネルギーを空力加熱による熱エネルギーへ変換することで適切な速度に減速する必要がある。機体表面は熱防護材で覆われているが、これらの量を抑制するために機体の受ける加熱量を制限しなければならない。空力加熱には速度と空気密度が関係し、加熱量を小さくするには速度に適した高度を飛行する必要がある。また、強度設計の条件より機体にかかる荷重には制限が加わる。これらの条件から回廊と呼ばれる飛行可能な領域が決まるが、再突入飛行を行う機体は適切な制御によりこの領域をくぐり抜けることができる。速度に応じた空気密度、すなわち高度をとるためには、経路角が適切な値となるようバンク角を調節することで揚力の鉛直方向成分を変化させる。バンク角制御にはエレボンなどの空力舵面や姿勢制御システム (Reaction Control System, RCS) が用いられる。この一連の制御方法は有翼型RLVに特有のものであり、米国のスペースシャトル技術において開発された^{8,9)}。

2.1 支配方程式 縦の軌道設計において、以下のような質点近似した機体の運動方程式を用いる⁹⁻¹¹⁾。

$$\frac{dV}{dt} = -g \sin \gamma - D^* \quad (1)$$

$$\frac{dD^*}{dt} = \left(-\frac{V}{H_0} \sin \gamma + 2 \frac{\dot{V}}{V} + \frac{1}{C_D} \left(\frac{\partial C_D}{\partial \alpha} \dot{\alpha} + \frac{\partial C_D}{\partial M} \dot{M} \right) \right) D^* \quad (2)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \left(\frac{V}{R_0 + H} - \frac{g}{V} \right) \cos \gamma + \frac{L}{mV} \cos \sigma \quad (3)$$

ここで最適化に用いる状態変数は、

V : 速度

D^* : 抗力加速度 (D/m)

γ : 経路角

制御変数は以下のバンク角である。

σ : バンク角

迎角 α を制御変数として揚力係数 C_L および抗力係数 C_D を調節することも可能ではあるが、機体の表面温度分布は迎角により決まるので熱防護材の設計の点から、迎角は 40 度程度の一定値をとるとする。

他の変数は以下のとおりである。

L : 揚力, g : 重力加速度, H : 高度,

m : 機体の質量, R_0 : 地球の半径

大気モデルには、以下のような単純な指数関数モデルを用いている。

$$\rho(H) = \rho_0 \exp \left(-\frac{H}{H_0} \right) \quad (4)$$

H_0 はスケールハイトと呼ばれる定数である。重力加速度および揚力、抗力は以下の式で与えられる。

$$g(H) = g_0 \left(\frac{R_0}{R_0 + H} \right)^2 \quad (5)$$

$$L = \frac{1}{2} \rho(H) V^2 S C_L(\alpha, M) \quad (6)$$

$$D = \frac{1}{2} \rho(H) V^2 S C_D(\alpha, M) \quad (7)$$

2.2 独立変数 運動方程式には状態変数の他に時間の関数がないので状態変数のうち一つを独立変数とすることができる。動的計画法により最適軌道を求める際、単調に変化する変数を独立変数として最適性の原理を適用する必要がある。飛行のほとんどで減速することが予想されるので速度は独立変数として使用できる可能性があるが、深い経路角の場合、必ずしも減少する訳ではない。無推力の機体において力学的エネルギーは抵抗によって必ず減少するので、力学的エネルギーを独立変数とする方が適当である。力学的エネルギーは速度とジオポテンシャル高度を用いて表現できる。これを機体の質量で除し独立変数とする。

$$E^* = \frac{1}{2} V^2 + g_0 H_p \quad (8)$$

ジオポテンシャル高度は以下の式で定義される。

$$H_p = \frac{R_0 H}{R_0 + H} \quad (9)$$

変数 E^* を独立変数として運動方程式を記述することにより、状態変数を一つ減らすことができる。すなわち、

$$\frac{dE^*}{dt} = V \frac{dV}{dt} + g_0 \frac{dH_p}{dt} = -VD^* \quad (10)$$

より、運動方程式は以下のように2つの状態変数によって記述される。

$$\frac{dD^*}{dE^*} = \frac{\sin \gamma}{H_0} + 2 \frac{g \sin \gamma + D^*}{V^2} \quad (11)$$

$$\frac{d\gamma}{dE^*} = \left(\frac{g}{V} - \frac{V}{R_0 + H} \right) \frac{\cos \gamma}{VD^*} - \left(\frac{C_L}{C_D} \right) \frac{\cos \sigma}{V^2} \quad (12)$$

2.3 飛行軌道制限 飛行可能領域は、あるエネルギーにおける抗力加速度の上下限值により決定される。以下に抗力加速度の上下限値の設定方法について説明する。

抗力加速度の上限

抗力加速度の上限値は、空力加熱率と機体にかかる荷重の条件から決まる。まず、空力加熱による制限を示す。機体の表面温度はよどみ点において最高となる。よどみ点における曲率半径を r とすると、空力加熱率の制限は以下の式で示される⁹⁾。

$$\frac{dq}{dt} = \frac{C_q}{\sqrt{r}} \sqrt{\rho} V^3 \leq \dot{q}_{max} \quad (13)$$

これは空気密度と飛行速度の関数で与えられる簡易なモデルである。 C_q は実験式から得られる空力加熱率係数であり $1.65 \times 10^{-4} [\text{Ws}^3/\sqrt{\text{kg}/\text{m}^3}]$ とする⁹⁾。空力加熱率の制限値

$\dot{q}_{max}$ を600[kW/m²]と定める⁹⁾と、格子点上の V を用いて E^* に対し ρ の上限値が決まり、抗力加速度 D^* の上限値が求められる。次に荷重条件による制限を示す。空気力は動圧に比例し、マッハ数と迎角の関数である空力係数に比例する。

$$F_N^* = \frac{F_N}{m} = \frac{1}{2m} \rho V^2 S C_N(\alpha, M) \leq F_{N,max}^* \quad (14)$$

法線方向の空気力による加速度を F_N^* とし、この制限値 $F_{N,max}^*$ は35[m/s²]に設定する。(14)式より、空力特性から抗力加速度の上限値を与える。

抗力加速度の下限

抗力加速度の下限値は、バンク角ゼロの釣り合い飛行の条件から導かれる。すなわち、経路角およびその時間変化率がゼロであることが条件となる。よって、(3)式より

$$\frac{V^2}{R_0 + H} - g + D^* \left(\frac{C_L}{C_D} \right) = 0 \quad (15)$$

となる。(15)式より、空力特性から抗力加速度の下限値を与える。

2.4 最適軌道設計 動的計画法を用いて再突入飛行における最適軌道を導く。評価関数 J には空力加熱率を積分した総加熱量を設定する。(13)式に示す空力加熱率は運動に影響を及ぼさない量であるので評価関数として扱うことができる。

$$\begin{aligned} J &= \int_{t_0}^{t_f} \frac{dq}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_f} \frac{C_q}{\sqrt{r}} \sqrt{\rho} V^3 dt \\ &= \int_{E_0}^{E_f} \frac{C_q}{\sqrt{r}} \sqrt{\rho} \frac{V^2}{D^*} (-dE^*) \end{aligned} \quad (16)$$

最適な評価関数 J_{opt} は状態変数 D^*, γ および独立変数 E^* の関数であり、 $J_{opt}(D^*, \gamma, E^*)$ と表すことができる。動的計画法は状態変数を離散化し、各格子点間における遷移軌道の組み合わせ最適化問題に帰着させることで最適軌道の近似解を求めるものである。動的計画法のアルゴリズムに基づき、単調に減少する独立変数 E^* に対し第1図のように (D^*, γ) を離散化し、以下の最適性の条件から各格子点間における遷移軌道を求める。

$$\begin{aligned} J_{opt}(D_{i_{k+1}}^*, \gamma_{j_{k+1}}^*, E_{k+1}^*) \\ = \min_{\substack{i_{k+1} \rightarrow i_k \\ j_{k+1} \rightarrow j_k}} \left\{ J_{opt}(D_{i_k}^*, \gamma_{j_k}^*, E_k^*) + \Delta J(D^*, \gamma, E^*) \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\Delta J = \int_{E_{k+1}^*}^{E_k^*} \frac{C_q}{\sqrt{r}} \sqrt{\rho} \frac{V^2}{D^*} (-dE^*) \quad (18)$$

(17)式の左辺は、第1図に示す $E_{k+1}^* \rightarrow E_k^*$ の遷移において格子点間のすべての軌道を探索し、評価関数が最小となるものを一つ選択することで導かれる。 (D^*, γ) の遷移を実現するためには制御変数であるバンク角 σ を調節する。可制御なシステムにおいては、制御変数を時間の関数として自由に動かすことができれば離散化された2点間を結ぶことができるが、ここではアルゴリズムの複雑化と計算時間の増大を避けるため一定とする。しかし、2次元の格子点間において制御変数を一定すると2点を結ぶことが不可能となる。このように制御変数の数が状態変数の数よりも少

第1図 格子点と遷移軌道

ない場合、格子を細かくすると同時に何らかの条件の緩和を行い、離散化誤差を許容する必要がある。格子を細かくすると計算量が増大するので、計算量を抑えつつ工学的に意味のある最適軌道を求める方法を提案する必要がある。

2.5 補助制御変数法 2つの格子点を結ぶ解が存在しなければ制御変数 σ のみで経路角 γ を制御するのは不可能ということになる。そこで離散化された2点間を遷移させるために制御変数の自由度を緩和する。具体的には経路角を調節するための制御変数 σ を補助する制御変数として補助制御変数 T^* を導入する。これは推力を機体質量で除したものであり系にエネルギーを与える。よって評価関数である総加熱量を大きくする効果を持つので最適化の過程において2つの格子点を結ぶためだけに必要な最低限の値をとることが期待される。この値が離散化誤差として許容できるほど微小であれば得られた軌道は最適軌道となり、加熱量においては、安全側の値を示す。この方法を補助制御変数法 (Augmented Control Variable, ACV) と呼ぶこととする。運動方程式(11)式、(12)式に補助制御変数 T^* を導入し、微分項を差分近似することで以下のような代数方程式を得る。

$$\frac{\Delta D^*}{\Delta E^*} = \frac{\{-V^2 \sin \gamma + 2H_0(-g \sin \gamma + T^* - D^*)\} D^*}{H_0 V^2 (T^* - D^*)} \quad (19)$$

$$\frac{\Delta \gamma}{\Delta E^*} = \frac{\left(\frac{V}{R_0 + H} - \frac{g}{V} \right) \cos \gamma + \left(\frac{C_L}{C_D} \right) \frac{D^*}{V} \cos \sigma}{V (T^* - D^*)} \quad (20)$$

これらの2式を連立して解くことで、状態空間の2点間の遷移を実現するために必要な制御変数 σ および補助制御変数 T^* が求められる。ただし、格子点間の状態量は2つの点における値の平均値を用いる。

$$\begin{aligned} D^* &= (D_{i_k}^* + D_{i_{k+1}}^*)/2, \quad \gamma = (\gamma_{j_k} + \gamma_{j_{k+1}})/2, \\ E^* &= (E_k^* + E_{k+1}^*)/2 \end{aligned}$$

また、状態の変化量は以下の差分式により近似する。

$$\Delta D^* = D_{i_k}^* - D_{i_{k+1}}^*, \quad \Delta \gamma = \gamma_{j_k} - \gamma_{j_{k+1}}, \quad \Delta E^* = E_k^* - E_{k+1}^*$$

2.6 ACV 法による計算結果 解析に用いる各定数および状態変数の初期値は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} m &= 12,000[\text{kg}], \quad S = 50[\text{m}^2], \quad r = 1.0[\text{m}] \\ R_0 &= 6,368[\text{km}], \quad \rho_0 = 1.752[\text{kg/m}^3]^9, \quad H_0 = 6,700[\text{m}]^9 \\ C_L &= 0.7, \quad C_D = 0.7, \quad L/D = 1.0, \quad \alpha = 45[\text{deg}] \\ V(t_0) &= 7,650[\text{m/s}] \end{aligned}$$

$$D^*(t_0) = 0.98[\text{m/s}^2], \quad H(t_0) = 80,000[\text{m}]$$

初期状態量については、経路角のみ自由とし、速度、抗力加速度、高度については固定する。計算時間を増やさず精

第2図 抗力加速度の最適軌道 (ACV法)

第3図 経路角の最適軌道 (ACV法)

第4図 バンク角 (ACV法)

第5図 補助推力 (ACV法)

度のよい結果を得るため、計算領域を以下のように設定し離散化を行った。

$$\begin{aligned} D^* : 100 \text{ 分割} \quad & D_{min}^* \leq D^* [\text{m/s}^2] \leq D_{max}^* \\ \gamma : 100 \text{ 分割} \quad & \gamma_{min} \leq \gamma [\text{deg}] \leq \gamma_{max} \\ E^* : 100 \text{ 分割} \quad & E_{min}^* \leq E^* [\text{m}^2/\text{s}^2] \leq E_{max}^* \\ \gamma_{min} = -2.0, \quad \gamma_{max} = 0, \quad \Delta\gamma = 2.0 \times 10^{-2} \\ E_{min}^* = 8.39 \times 10^6, \quad E_{max}^* = 3.00 \times 10^7 \\ \Delta E^* = 2.16 \times 10^5 \end{aligned}$$

ただし、差分近似を用いた計算により振動解が発生する恐れがある。これは状態を大きく変化させた方が最適解付近をより細かく調べられ、評価関数を小さくすることができるためである。そこで基準のバンク角 σ_0 からのずれを評価することで離散化誤差による高周波振動を抑えるという工夫を施す。よって、以下のように評価関数に振動を抑える項を追加する。

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{C_q}{\sqrt{r}} \sqrt{\rho} V^3 + w_\sigma \frac{(\sigma - \sigma_0)^2}{dt} \right\} dt \quad (21)$$

総加熱量のみを評価して振動解が発生した場合、その時の最適 σ をスムージングし、基準バンク角 σ_0 に設定する。振動が発生しない範囲で w_σ の値を小さくしていき、振動が発生する場合と比較して総加熱量の値の差が十分小さくなれば、得られた軌道は現実的な最適軌道であると言える。

第2図はエネルギーと抗力加速度の最適軌道、第3図は経路角の最適軌道をプロットしたものである。第4図およ

び第5図はバンク角と補助制御変数としての推力の結果である。最適制御の一例として一定経路角による飛行を考えるとその最適軌道は一点鎖線で表される。終端における総加熱量は一定経路角の場合198.09[MJ/m²]であるのに対し動的計画法による軌道では174.34[MJ/m²]と約12.0%削減された。初期状態から徐々に抗力加速度を増していき空力加熱の上限に沿って飛行している。荷重制限による上限へ切り替わる部分では補助推力が多少大きな値をとっているが格子を細かくすることで離散化誤差を許容するために導入した変数として十分小さな値となる。

補助制御変数として評価関数を悪くする効果を持つ変数を導入すると、最適化の過程においてこの効果が最小となる軌道が選択され、工学的に有意な最適軌道を得ることができる。ACV法は評価関数への影響が一方的である場合には有効であるが、多目的最適化問題のように必ずしも補助制御変数が最小になるとは限らない場合は使うことができない。そこで、離散化による誤差の影響を抑えつつ工学的に意味のある最適軌道を設計する新たな手法を提案する。

2.7 最小誤差格子点選択法

離散化した状態変数により構成される状態空間において、状態の遷移は制御変数の調節により実現される。ここで、制御変数の個数が状態変数の個数に比べて少なく2つの格子点の間で制御変数を一定とすると解が存在しなくなる場合の解決方法を提案する。

解くべき運動方程式は(11)式および(12)式から成る連立方程式であり、未知数は制御変数 σ である。状態量には2

つの格子点の平均値を用いる． σ を一定値として解こうとすると，両式を厳密に満足する解は存在しない．これは第6図に示すように，離散化して与えた格子点以外の部分に解が存在するためである．

第6図 遷移間で σ 一定とした場合の到達可能曲線

第7図から第9図より，制御変数のバンク角は経路角を直接制御することができるが，抗力加速度への感度はほとんどない．これは，経路角の変化率はバンク角に，抗力加速度の変化率は経路角にそれぞれ支配されるからである．

そこで，以下のような手順で近似解を求める．ただし，微分項には差分近似を適用する．

①(11)式の左辺と右辺の差を ε とし，ある γ に対し，抗力加速度の方向にこの値の変化を調べる．

$$\varepsilon = \frac{\Delta D^*}{\Delta E^*} - \left(\frac{\sin \gamma}{H_0} + 2 \frac{g \sin \gamma + D^*}{V^2} \right) \quad (22)$$

第7図 抗力加速度の最適軌道 (LGS法)

格子点の間に存在する正解をまたぐとき， ε の符号が変化するのでそのような2点に着目する．

②これらの2点に対し ε の絶対値が小さい方を，真の解に最も近い近似解が得られる格子点として採用する．

③この格子点を用いて(12)式より σ を導く．

$$\sigma = \cos^{-1} \left\{ \left(g - \frac{V^2}{R_0 + H} \right) \frac{\cos \gamma}{D^*} - V^2 \frac{\Delta \gamma}{\Delta E^*} \right\} \quad (23)$$

与えた格子点の中で正解に最も近い点が得られるということで，この方法を最小誤差格子点選択法(Least-error Grid-point Selection, LGS)と呼ぶこととする．この方法の大きな利点として以下の2点が挙げられる．

最小誤差格子点選択法の利点

- 補助制御変数法とは異なり，微分方程式の誤差が解の両側にばらつくので，誤差が蓄積されることがなく，評価関数に複数の最適化条件が含まれる多目的最適化問題に適用することができる．
- 誤差の大小は格子の分解能にのみ依存するので，分割数を上げれば解の精度は必ず向上する．

2.8 LGS法による計算結果

LGS法の有効性を確認するため，総加熱量のみを最小化する単一目的最適化問題をLGS法で解き，ACV法の結果と比較する．したがって，評価関数および計算条件は2.6節に示したものと同一とする．

第8図 経路角の最適軌道 (LGS法)

第9図 バンク角 (LGS法)

第10図 微分方程式誤差 (LGS法)

第10図は微分方程式の誤差である ε に ΔE^* を乗じ、補助制御変数 T^* の単位と揃えてプロットしたものである。抗力加速度および経路角についてはACV法と同様の結果が得られた。バンク角については、空力加熱による限界線に達するまでの値が、ACV法の結果と若干異なっている。これは空気密度が微小な高高度においては揚力がほとんど発生せず、バンク角を変化させても抗力加速度には影響が及ばないためであると考えられる。また、 $E^* = 1.5 \times 10^7 [\text{m}^2/\text{s}^2]$ 付近における微分方程式誤差はACV法のものよりも小さいため、引き起こしを行うための浅いバンク角はLGS法の方がより精度よく求められていると言える。

終端における総加熱量は $171.10 [\text{MJ}/\text{m}^2]$ となり、経路角を一定とした基準軌道と比較すると約13.6%削減された。LGS法では誤差がゼロのまわりにばらついて分布するため評価関数によらず離散化誤差の増大を引き起こすことなく、格子の分割を細かくすれば解の精度は必ず向上するという点で有効な手段である。これらの性質により多目的最適化問題においても現実的な最適軌道を設計することが可能となる。

3. 多目的最適化問題

3.1 飛行レンジの追加 LGS法はACV法に比べ誤差が蓄積されにくいという性質が明らかとなったため、評価関数に加熱量ばかりでなく飛行レンジを調節する要素を付加し、多目的最適化問題とする。有翼型RLVの再突入飛行

では、到着地点が指定されているため、再突入開始時には到達可能距離を把握しておくことが必要不可欠となる。経路角を制御するためにバンク角を調節することから横にずれが生じるが、このずれはバンクリバーサルと呼ばれるバンク角の左右を入れ替える操作により修正する。この操作中は抗力加速度の誘導は行われないが、短時間であると仮定して縦の運動には影響が及ばないとする。

レンジ R_{ϕ} は次式で定義する。

$$R_{\phi} = \int_{t_0}^{t_f} V \cos \gamma dt = \int_{E_0^*}^{E_f^*} \frac{\cos \gamma}{D^*} (-dE^*) \quad (24)$$

このレンジに任意の重み w_R を付加し、総加熱量と組み合わせて評価関数とする。

$$J = \int_{E_0^*}^{E_f^*} \left\{ \frac{1}{q_0} \frac{C_q}{\sqrt{r}} \sqrt{\rho} \frac{V^2}{D^*} - w_R \frac{1}{R_{\phi 0}} \frac{\cos \gamma}{D^*} + w_{\sigma} \frac{(\sigma - \sigma_0)^2}{(-dE^*)} \right\} (-dE^*) \quad (25)$$

3.2 計算結果 正規化定数である q_0 と $R_{\phi 0}$ は、経路角一定とした基準軌道に沿って飛行したときの値に設定する。

$$q_0 = 198.09 [\text{MJ}/\text{m}^2] \quad (26)$$

$$R_{\phi 0} = 2825.46 [\text{km}] \quad (27)$$

(25)式の重みを $w_R = 0.38$, $w_{\sigma} = 0.01$ として計算した結果を第11図から第14図に示す。総加熱量のみを評価した2.8節の結果と比較すると、 $E^* = 2.5 \times 10^7 [\text{m}^2/\text{s}^2]$ 付近までは抗力加速度の下限值に沿って釣合い飛行を行っている点が

第11図 抗力加速度の最適軌道 (多目的最適化)

第12図 経路角の最適軌道 (多目的最適化)

第13図 バンク角 (多目的最適化)

第14図 微分方程式誤差 (多目的最適化)

異なる。これは、空気密度の小さいところでは飛行レンジを伸ばすためにより大きな揚力を発生させ、その後、最大の加熱率となる飛行を行って加熱量を最小化しようとするためである。終端における総加熱量および飛行レンジを第1表に示す。飛行レンジは、総加熱量のみを評価した場合に比べて約2300km増加した。総加熱量も増加しているが、これは飛行レンジとともに評価することで飛行時間が増加したためである。

第1表 最適値の比較

	単一目的最適化	多目的最適化 ($w_R = 0.38$)
総加熱量[MJ/m ²]	171.10	225.75
飛行レンジ[km]	2055.20	4357.97

次に、重み w_R の値を変化させた場合について検討を行った。第15図より、 w_R を大きくすると総加熱量および飛行レンジはともに増加することが分かる。機体の質量に占める熱防護材の質量の限界値から、設計要求として終端における総加熱量の最大値が決まるので、それに応じて到達可能距離としての飛行レンジを導くことができる。

第16図は重み w_R に対するそれぞれの最適軌道を重ねて図示したものである。小さい w_R では総加熱量を重く評価するため、抗力加速度は上限値を取る部分が多いが、 w_R を大

きくすると飛行レンジを伸ばすため、抗力加速度の下限値に沿って釣合い飛行を行う部分が多くなる傾向がある。 w_R を増やすと浅い経路角で飛行する部分が多くなるが、経路角を深くして抗力加速度の上限値へと遷移した後は加熱量を小さくするため、どの w_R についても同様の軌道となる。最適軌道はエネルギーを保持して飛行レンジを伸ばすフェーズとエネルギーを熱として消費するフェーズに分かれており、その間を遷移するタイミングはどちらを重く評価するかによって決まる。また、バンク角については遷移する部分で170°程度となり、背面飛行を行って最速で抗力加

第15図 最小総加熱量と最大飛行レンジの関係

第16図 重み w_R と最適軌道の結果

第 2 表 結果のまとめ

重み w_R	総加熱量[MJ/m ²]	飛行レンジ[km]	初期経路角[deg]	総飛行時間[sec]
0	171.10	2055.20	-1.82	320
0.3	171.90	2076.45	-1.68	323
0.32	172.09	2081.15	-1.68	324
0.34	216.15	3973.77	-0.04	578
0.36	220.71	4161.22	-0.04	603
0.38	225.75	4357.97	-0.04	630
0.40	243.14	4994.94	-0.02	720
0.42	253.95	5366.36	-0.02	774
0.44	262.35	5643.98	-0.02	815
0.46	271.28	5922.51	-0.06	858
一定経路角	198.09	2825.46	-0.55	435

参 考 文 献

速度の上下限を遷移している。今回の計算ではバンク角の制限値は設定していないが、バンク角を 90° 以下とする制限を加えて背面飛行を行わない場合の最適軌道を求めることも容易に行える。

4. ま と め

一般に最適制御問題は取り扱いが難しく、設計者の要求をすべて満たす実用的なツールが存在しないことから誘導制御系の設計現場において敬遠されることが多い。そこで本論文において、扱いやすく有用な最適制御のツールとして動的計画法を提案し、再突入飛行における最適軌道を設計した。特に、制御変数の数が状態変数の数よりも少ない場合の離散化誤差の問題に取り組み、解決する方法として、補助制御変数法および最小誤差格子点選択法を提案した。2つの方法を再突入飛行の軌道最適化へ応用して有効性を確認することができた。動的計画法には計算時間が予測でき、拘束条件への対応が容易であるという利点がある一方で計算規模の課題が残されている。動的計画法の欠点である「次元の呪い」と呼ばれる課題の解決は困難としても、計算機の能力が大幅に向上した現在では適用範囲の限界は以前より広がっている。本論文において、再突入飛行への応用を通して最適化計算を容易に行えることが示され、動的計画法の実用範囲を広げることができた。

- 1) Bryson, A.E. and Ho, Y.C.: Applied Optimal Control, Ginn and Company, Waltham, Massachusetts, 1969, pp. 42-147.
- 2) 加藤寛一郎: 工学的最適制御 非線形へのアプローチ, 東京大学出版会, 1988, pp. 77-191.
- 3) Betts, J. T.: Survey of Numerical Methods for Trajectory Optimization, Journal of Guidance, Control and Dynamics, **21**, 2 (1998), pp. 193-207.
- 4) Elnagar, J. and Kazemi, M. A.: The Pseudospectral Legendre Method for Discretizing Optimal Control Problems, IEEE Transactions on Automatic Control, **40**, 10 (1995), pp. 1793-1796.
- 5) Fahroo, F. and Ross, I. M.: Direct Optimization by a Chebyshev Pseudospectral Method, Journal of Guidance, Control and Dynamics, **25**, 1 (2002), pp. 160-166.
- 6) 宮沢与和: 動的計画法による経路最適化と D-SEND#2 への応用, 第 49 回飛行機シンポジウム講演集, 2011, pp. 657-662.
- 7) Bellman, R.: Dynamic Programming, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1957, pp. 183-221.
- 8) Harpold, J. C. and Graves, C. A. Jr.: Shuttle Entry Guidance, American Astronautical Society, Anniversary Conference, 25th, Oct. 30-Nov. 2, 1978.
- 9) Lu, P.: Entry Guidance and Trajectory Control for Reusable Launch Vehicle, Journal of Guidance, Control and Dynamics, **20**, 1 (1997), pp. 143-149.
- 10) Vinh, N.X.: Optimal Trajectories in Atmospheric Flight, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, 1981, pp. 295-367.
- 11) 加藤寛一郎: スペースプレーン, 東京大学出版会, 1989, pp. 121-137.
- 12) Bellman, R. and Kalaba, R., 野村弘光訳: ダイナミックプログラミングと現代制御理論, 東京図書株式会社, 1972, pp. 35-105.