メタマテリアル設計解析のための電磁界解析法

Computational Electromagnetic Methods for Design Analysis of Metamaterials

宇野 亨 Toru Uno†

Summary

将来展望を含めたメタマテリアル研究開発の現状と応用事例については本小特集で詳しく述べられているから、本稿ではメタマテリアル及びそれを利用したマイクロ波や光デバイス及びアンテナの設計解析に不可欠な電磁界解析法の基本概念とメタマテリアル特有の取扱いを紹介する。計算機に適合した電磁界解析手法の研究分野を総称して計算電磁気学といい、周波数領域ではモーメント法と有限要素法、時間領域では FDTD 法がその中心的役割を果たす。これらの手法を用いれば数値的に正確な結果を得ることはできるが、結局は計算機の能力に頼る方法であるから、問題によっては必ずしも適切ではない。そこで本稿ではメタマテリアル設計に用いられる準解析的方法や近似手法についても簡単に述べる。

Key Words

計算電磁気学, モーメント法, 有限要素法, FDTD 法, メタマテリアル

1 まえがき

アンテナやマイクロ波の分野でメタマテリアルと言ったときには、それを構成する分子や原子といった微視的な性質が顕著になる物質（マテリアル）ではなく、導体や誘電体といった巨視的な性質を持つ物体で構成された人工周期構造のことを指す。したがって、本稿でもこのようなメタマテリアル構成物質を考えるが、簡単のために導体と言ったときには完全導体を指し、誘電体や磁性体は無損失・等方性であるものとする。これに対して、テラヘルツや光の領域になると、物質自体が周波数分散性や異方性を持つようになる場合が多い。広い周波数帯域にわたるメタマテリアルの基礎理論と実際に関しては、本小特集とともに文献 (1), (2) やその中で引用されている論文などを参照して頂きたい。

実際の応用では三次元周期構造を取り扱うことは極めてまれであるから、本稿でも 1 方向あるいは 2 方向に周期性を持った構造を考える。本稿で紹介する電磁界解析法はこのような構造のメタマテリアル解析にも適用できるが、特定の方向に基本モードだけが伝搬するような構造に対しては伝送線路近似が有効である⁽³⁾。メタマテリアル構成要素の形が分かっているならば伝送線路の回路定数も近似的に知ることができることから⁽⁴⁾、現在のところ、最も成功しているメタマテリアル設計

法であるといっても過言ではない。もちろん、正確な電磁界特性を得るには本稿で紹介する数値解析法が必要であるが、伝送線路近似法は導波路モードが興味の対象となるマイクロ波デバイスばかりではなく、漏れ波アンテナの設計にも応用されている。詳細は本小特集あるいは文献 (3), (5) 等を参照して頂きたい。

さて、メタマテリアルアンテナにはアンテナ構造自体にメタマテリアルの概念を取り入れたものと、アンテナは単純な構造のままで、その近傍に周期構造体を置いて全体として特性を向上させるものがある^{(1), (6)}。前者のアンテナは主に導体と誘電体及び一部に回路素子を含む有限の大きさを持つアンテナであるから、原理的にはモーメント法^{(7), (8)}、有限要素法^{(9), (10)}及び FDTD (Finite Difference Time Domain) 法^{(11)~(13)}がそのまま適用できると考えてよい。ただし、初期設計としては伝送線路近似を用いることが少なくない。これに対して後者は、実用化の段階では有限構造になるにしても、設計解析の段階では無限周期構造を考えた方が便利なが多い。このとき、周期構造による散乱ばかりではなく、構造内の伝搬特性もまた重要になる。EBG (Electromagnetic Band Gap) 構造や AMC (Artificial Magnetic Conductor) などがその代表例である。

本稿の目的はメタマテリアルの設計解析に用いられる電磁界解析手法を解説することであるから、まず最初に従来の数値電磁解析法の基本的な考え方と関連手法を簡単に述べ、次に無限周期構造による散乱解析と伝搬特性の解析手法を紹介する。これらの方法は導波系でも放射系でも数値的に正確な計算はできるが、多

† 東京農工大学大学院, 小金井市
Graduate School of Engineering, Tokyo University of Agriculture and Technology, Koganei-shi, 184-8588 Japan

くの計算機資源を必要とする。そこで、正確さは多少犠牲にしても計算機資源を節約できる、伝送線路近似とは別の近似手法についても簡単に述べる。

2 主な電磁界解析手法の基本概念

ほとんど全ての数値電磁界解析法は、解析対象を微細領域に分けて正確に解いておき、それを重ね合わせることによって全体の問題を解こうとするものであるから、波長に比べて大きな問題は本質的に不得手である。しかしながら、計算機的能力が格段に向上したため現在ではかなり大きなサイズの問題も比較的容易に解析できるようになってきている。具体的な計算手順や解析例に関しては文献(7)～(13)を参照して頂くことにして、ここでは代表的な電磁界解析法の基本概念だけを説明する。

一方、メタマテリアル開発のために市販のシミュレータを使いたいと考えている読者も少なくないであろう。有力な手段であることには間違いはないが、使用にあたっては少なくとも計算内容を理解するとともに、規範問題等に適用してその計算精度や適用限界などを事前にチェックしておくことを勧める。また、シミュレータの出力結果を盲目的に信じるのではなく、十分な物理的考察を行ってから最終判断をして頂きたい。

2.1 モーメント法

モーメント法は波動方程式や導波路の固有モード解析などにも原理的には適用できるが、導体表面や誘電体内部に流れる分極電流を未知関数とする積分方程式の数値解法であるというのが一般的な理解である。ここでは簡単のためにこの積分方程式を $L(f) = g(x)$ と表し、モーメント法による解法の基本的な手順を説明する。ただし、 L は積分作用素、 f 、 g はそれぞれ未知関数、既知関数で、それぞれ電磁流と入射電磁界に対応する。

モーメント法では、未知関数 $f(x)$ を N 個の既知関数(展開関数、あるいは基底関数という) $f_1, f_2, \dots, f_N$ の和として近似できると仮定して $f \approx f_a(x) = \sum_{n=1}^N a_n f_n(x)$ と置く。これを元の積分方程式に代入すると、 $R(x) = L(f_a) - g(x) = \sum_{n=1}^N a_n L(f_n) - g(x)$ だけの残差が生じる。この残差を N 個の重み関数(試行関数とも言う) $w_m(m=1, 2, \dots, N)$ に対して

$$\int_a^b R(x) w_m(x) dx = 0 \quad (1)$$

とすると、未知数 a_n に対する行列方程式が得られる。これがモーメント法の基本計算手順である。

図1 区分的一次関数

図2 導体球表面

$f_n(x) = w_n(x)$ とする方法をガラーキン・モーメント法と言い、最も計算精度が良いことが知られている。また、実際の問題では基底関数をどのように選ぶかが計算精度と計算時間に大きく影響する。例えば、ダイポールアンテナの電流はその端部で0となり、給電部では連続ではあるが滑らかではない。したがって、アンテナ全体で定義された関数よりも、区分的に定義された関数の方がよい。図1は区分的一次関数によって $f(x)$ を近似した例で、直線近似に対応する。また、図2は導体球面を微小区間に分割した例で、各微小三角形領域には区分的一次関数を二次元に拡張したRWG(Rao-Wilton-Glisson)関数が用いられる⁽¹⁴⁾。なお、RWG関数は多くのモーメント法シミュレータの基底関数に採用されている。

誘電体内部では誘電体を微小ブロックに分割して分極電流を区分的正弦関数や一次関数で近似する方法が用いられるが、特に三次元の場合は行列要素が一般的に六重積分となり、この積分を精度良く短時間で計算することは困難であるため、誘電体の解析はやや不得手である。

2.2 有限要素法

有限要素法とは、微分方程式の境界値問題がそれに対応する汎関数 F の最小値問題と等価になることを利用して、微分方程式を直接解くのではなく、 F を最小にするような近似関数を見付ける方法である。したがって、汎関数 F があらかじめ分かっている変分問題における標準的な方法を用いることができる。例えば、

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \lambda u^2 \right] dS \quad (2)$$

の最小問題は、二次元閉領域 Ω で波動方程式

$\nabla^2 u + \lambda u = 0$ を満足し、境界 Γ で条件 $u(\mathbf{r}) = h(\mathbf{r})$ を満たす関数 u を求める問題と等価である。ただし、 λ は固有値、 h は既知関数である。このように、有限要素法とは閉領域の解析手法である。

さて、式 (2) を最小にするような関数 u を求めることを考える。モーメント法と同様に未知関数 u を N 個の既知関数 u_n によって $u = \sum_{n=1}^N a_n u_n$ と展開し、 F に代入すると F は展開係数 a_n の関数となる。変分原理に従えば、汎関数が極値をとればそれが解であるから、

$$\frac{\partial F}{\partial a_n} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

を計算すれば、 a_n と λ に関する固有値方程式を得ることができる。原理的にはこれで良いが、境界の形状が複雑であったり、未知関数 u が急しゅんに変化すると予想される場合には領域全体で適当な基底関数 u_n を決めることは難しい。そこで有限要素法では、図 3 のように領域全体を要素と呼ばれる小さな領域に分割し、その一つ一つに式 (3) を適用して各要素に対する離散方程式を導き、最後に全ての要素について重ね合わせて全体方程式を得るようにしている。

このような考え方はモーメント法の考え方とよく似ているが有限要素法で特徴的なことは、各要素の基底関数（有限要素法では形状関数という）として多項式を用いることである。例えば、2 変数多項式で最も簡単なものは一次多項式 $Ax + By + C$ である。未知係数は A, B, C の三つであるから、これらの値を決めるには図 4 (a) のように 3 点の関数値だけを必要とする。更に精度を上げるには、この三角形の辺上に接点を持つ高次の要素が用いられる。したがって、実際の計算では、

図 3 解析領域と要素

図 4 二次元基本要素

係数 a_n ではなく、接点における関数値が未知数となる。

電磁波の問題は一般にベクトルの問題である。また、汎関数が必ずしも分かっているとは限らない。そのような場合には、微分方程式に対する残差を求めておき、式 (1) の重み付残差法を用いればよい。また、要素としては図 4 (b) のような辺要素が用いられる。

一方、有限要素法は閉領域の解法であるから、アンテナや電磁波の散乱問題のような開領域の問題を扱うには、解析領域を仮想的に無限領域として扱うための吸収境界が必要である。有限要素法がこのような問題に広く応用できるようになったのは、高精度吸収境界として PML (Perfectly Matched Layer) が開発されたためである⁽¹⁵⁾。

2.3 FDTD法

FDTD 法とはマクスウェルの偏微分方程式の空間及び時間に関する一次中心差分近似法である。例えば、磁界 $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ の時刻 t に関する偏微分は

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\mathbf{H}(\mathbf{r}, t + \Delta t / 2) - \mathbf{H}(\mathbf{r}, t - \Delta t / 2)}{\Delta t} \quad (4)$$

によって近似される。電界に関しては、 $\Delta t / 2$ だけずれた時刻で中心差分近似され、マクスウェルの方程式と組み合わせることによって時間に関する電界・磁界の表現式を得ることができる⁽¹¹⁾。ただし Δt は時間に関するサンプリング間隔で、時間ステップと言われる。なお、中心差分であるから時間に関する誤差は $(\Delta t)^2$ に比例する。

空間に関する偏微分も式 (4) と同様に中心差分近似される。ただし、差分近似する位置を、磁界の時間変化がその周りの電界を作るというファラデーの法則と、電界の時間変化が磁界を作るというアンペア・マクスウェルの法則を満足するように取るのが特徴である。したがって、空間のサンプリング間隔（セルサイズという）を $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ とすると、解析空間は図 5 のような立方体で埋め尽くされることになる。このように解析空間は電界のセルと磁界のセルの二重セル構造になっていることに注意してほしい。

FDTD 法では時間を少しずつ進めながら電磁界を計算することになるが、これは映画のフィルムを作るようなイメージで捉えると分かりやすいであろう。すなわち、こま送りしながら一こまごとに電磁界の空間分布を計算するのが FDTD 法である。ただし、こまには電界のこまと磁界のこまの二つがあつて、それらが時間ごとに交互に記録されている。一方、FDTD 法も有限要素法と同様に閉領域の解法であるから、開領域の問題を扱うには、吸収境界が必要である。今のところ PML が最も精度が良いため、FDTD 法でも PML が

図5 電界セルと磁界セル

用いられていることがほとんどである。また、計算が安定になるためには、時間ステップとセルサイズはCourantの安定条件を満たさなければならないから、セルサイズを決めると時間ステップを勝手に選ぶことはできない。更に、数値分散誤差を最小にするためには図5のセルは立方体である必要がある。このように幾つかの制約条件があるが、アルゴリズムが極めて単純で特別な工夫をすることなく実用的な計算精度が得られることから、多くの分野で使われている。なお、Courantの条件に縛られない陰解法もあるが⁽¹²⁾、数値分散が増えるため余り普及していない。

2.4 その他

FDTD 法と同様に時間領域の電磁界を計算する方法として空間回路網法がある⁽¹⁶⁾。原理的には FDTD 法と等価であるが⁽¹⁷⁾，計算機メモリが増えるという欠点があり，最近使われることほとんどなくなった。

一方、電磁界解析法として古くから高周波近似法が研究されてきた。高周波近似法は大きく分けて幾何光学的な近似法と物理光学的な近似法とがある⁽¹⁶⁾。いずれの方法も計算負荷は少なく、現象の理解が容易であるなどの利点があるが、波長に比べて遠方の現象を扱う手法であるから、近傍界が本質的となるアンテナの自己インピーダンス計算などには利用できない。

3 無限周期メタマテリアルの解析

メタマテリアルの大きさが有限で、その構成要素が全て線形であれば上で紹介した方法がそのまま適用できると考えてよい。非線形要素を含む場合にはモーメント法や有限要素法は原理的には適用できないが、FDTD 法ならば容易に適用できる。

一方，無限周期構造を含む問題には平面波の散乱問題と非周期的な波源の問題とがある．メタマテリアルの基本的な特性は前者の問題を解析することによって

図 6 周期構造による平面波の散乱

得られることが多いから，本章では最初に平面波散乱の問題を解析する手法を紹介し，次に単一波源の問題を取り扱う．また，メタマテリアルの設計においては構造内の伝搬特性もまた重要である．これについては本章の最後で説明する．

3.1 平面波の散乱

図6のように x 方向と y 方向に周期的な二次元周期構造による平面波の散乱問題を考える。構造体の周期をベクトル $\mathbf{L} = L_x \hat{\mathbf{x}} + L_y \hat{\mathbf{y}}$ で表したとすると、周波数領域の電界あるいは磁界 $\mathbf{F}$ はフロケの定理（あるいはブロッホの定理）：

$$\mathbf{F}(\mathbf{r} + \mathbf{L}) = \mathbf{F}(\mathbf{r})e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{L}} \quad (5)$$

を満足しなければならない。ただし $\mathbf{k}_i = k_x \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}}$ は $x-y$ 面内の波数ベクトルである。特別な場合として、 $z-x$ 面内を真空中から角度 θ で入射する場合には $\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{L} = k_x L_x = k_0 L_x \sin \theta$ となる。なお、点線で示した 1 周期の境界を周期境界 (PB: Periodic Boundary), PB で挟まれた領域をユニットセル (Unit cell) という。

3.1.1 モーメント法

簡単のために散乱体は完全導体とし、その表面を S 、単位法線ベクトルを $\hat{n}$ とする。散乱界 $\mathbf{E}^{scat}(\mathbf{r})$ は各散乱体による寄与の総和となるが、それぞれの散乱体に流れる電流はフロケの定理 (5) を満足するから適当な基準ユニットセル内の散乱体上に流れる電流を $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ とすると

$$\mathbf{E}^{scat}(\mathbf{r}) = -jk_0 Z_0 \int_{\Sigma} \bar{\bar{\mathbf{G}}}_p(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dS' \quad (6)$$

と表される。ここで $\bar{\mathbf{G}}_p(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$ は周期グリーン関数と呼ばれ、自由空間のグリーン関数 $\bar{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$ を用いると次式で表される。

$$\bar{\bar{G}}_p(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{\bar{G}}_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}' + m\mathbf{L}) e^{-jm\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{L}} \quad (7)$$

未知電流 $\mathbf{J}$ に対する積分方程式は S 表面の境界条件 $\hat{\mathbf{n}} \times \{\mathbf{E}^{inc} + \mathbf{E}^{scat}\} = 0$ によって導かれ、ユニットセル内だけの問題として扱うことができる。しかし、式 (7) の収束は極めて遅くモーメント法の難点の一つとなっている。これを解決するために、級数の加速法に関する多くの検討がなされているが、現在のところは Ewald 法⁽¹⁸⁾ が最も良いとされている⁽¹⁹⁾。

3.1.2 有限要素法

有限要素法の計算領域を図 7 に示す。ユニットセルは上下の吸収境界 (AB) と左右の周期境界 P_B によって囲まれている。吸収境界としては PML が用いられることが多いが、解析対象との距離を半波長から一波長程度離す必要があるとされている⁽²⁰⁾。

散乱界を求めるには、 P_B に式 (5) の周期境界条件を導入し、散乱波に関する波動方程式に通常の有限要素法を適用すればよい。反射係数等は、ユニットセル内の適当な位置に置かれた面 S_O 上の散乱界から計算することができる。なお、計算効率を上げるための方法が幾つか提案されているが誌面の都合で詳細は省略する。文献 (20), (21) 等で補って頂きたい。

3.1.3 US-FDTD

式 (5) を時間領域に変換すると

$$F(x, y, z, t) = F(x + L_x, y, z, t + L_x \sin \theta / c) \quad (8)$$

となる。ここで c は光速である。式 (8) は、現在の時刻 t における電磁界を計算するためには未来の時刻 $t + L \sin \theta / c$ の電磁界が必要であることを意味しており、2.3 で説明した FDTD 法をそのままの形で用いることはできない。ただし、 $\theta = 0$ の垂直入射の場合は同じ時刻の電磁界を使うから周期境界条件を容易に取り込むことができ、アルゴリズムの変更も必要としない。この場合、平面波は図 7 と同じユニットセル内の適当な面 S_E 上で与えればよく、モーメント法のような煩雑な計算は必要としない⁽²²⁾。

図 7 ユニットセル

斜め入射の場合は、上で述べた“未来の時間”問題を解決するために数多くの手法が提案されてきた⁽²³⁾。その中で最も有効であるとされているのは、ここで紹介する US (Unified Spectral)-FDTD 法 (Constant-k 法ということもある) である^{(6), (13)}。これを簡単に説明する。

フロケの定理 (5) は周波数領域の複素電磁界に対して成り立つ式である。そこでまず、解析領域を $\cos \omega t$ と $\sin \omega t$ で時間変化する二つの平面波で別々に励振し、前者の励振法に対する電磁界を $\mathbf{F}_r$ 、後者のそれを $\mathbf{F}_m$ と表す。次に、これらの電磁界を結合して新たに $\mathbf{F} = \mathbf{F}_r + j\mathbf{F}_m$ を作ったとすると、この複素電磁界は $e^{j\omega t}$ で励振した電磁界と等価であり、式 (5) を適用することができる。時刻ごとにこのような計算をすれば、 $\cos \omega t$ と $\sin \omega t$ に対する電磁界は $\mathbf{F}_r = \Re(\mathbf{F})$ と $\mathbf{F}_m = \Im(\mathbf{F})$ によって計算でき、定常状態に至るまでこの計算を続ければよい。これを Sine-Cosine 法という⁽²⁴⁾。この方法は単一周波数に対する解法であるが、パルス応答は $e^{j\omega t}$ に対する電磁界の重ね合わせであるから、 k_i が一定ならば、式 (5) を時間領域でも適用できる。

図 6 のような場合には k_i を固定しておいて電磁界の過渡応答を計算した後にそれをフーリエ変換すれば、 $\omega / c \sin \theta = k_i$ の関係があるから、入射角 θ を決めた場合の周波数特性を求めることができる。また、 ω を固定した場合の入射角特性も計算することも可能である。これが US-FDTD 法の基本的な考え方である。

計算例を図 8 に示す。(a) は解析モデルで誘電体スラブ表面に直方導体板が周期的に並んでおり、これに y 方向に偏波した平面波が入射している。(b) は入射角 θ を

(a) 無限周期導体板

(b) 反射係数の周波数特性

図 8 モーメント法と US-FDTD/ARMA

パラメータとしたときの反射係数の周波数特性である。ただし、 $L_x = L_y = 8 \text{ mm}$, $W_x = W_y = 4 \text{ mm}$, $d = 10 \text{ mm}$, $\epsilon_r = 4$, $\mu_r = 1$ とした。また、この計算では時間応答の収束が遅かったため、信号処理分野でよく用いられる自己回帰移動平均推定 (ARMA: Auto-Regressive Moving-Average estimator) ^{(25), (26)} を用いて収束を早めるようにした。US-FDTD/ARMA は入射角が大きくなったときでもモーメント法とよく一致している。

3.2 単一波源

ここでは無限周期構造近傍にある単一アンテナの解析法について説明する。モーメント法による解析は、散乱体による寄与のほかにアンテナに流れる電流による寄与を含めれば、3.1.1 で説明した方法と原理的にはほとんど同じである。しかし、メタマテリアル散乱体を含むアンテナの解析に使われることはほとんどない。これは原理的な問題というよりもむしろ構造の複雑さに起因する定式化の煩雑さによるものと思われる。

一方、有限要素法や FDTD 方法を用いようとして図 7 のユニットセル内にアンテナを置いたとすると、これはアンテナが無限に並んだ問題となる。このため、図 9 のようにアンテナとメタマテリアルの構成要素を含む解析空間を順次大きくしながら収束するまで計算を繰り返す Brute-Force 法以外には、現在のところ、解決策がない。しかしながら、膨大な計算機資源を必要とするばかりではなく収束する保証は必ずしもない。本節では一般的なアンテナを解析する第一歩として基本となる点電流源の問題を説明する。計算方法は有限要素法でも US-FDTD 法でも原理的には同じであるから、後者を例にとって説明する。

3.2.1 ASM-FDTD 法

任意の点 $\mathbf{r}_0$ に置かれた単一点波源 $\mathbf{p}_0$ による電界は、式 (5) のフロケの定理を利用すると、周期的な点 $\mathbf{r}_{mn} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{d}_{mn} = \mathbf{r}_0 + mL_x\hat{x} + nL_y\hat{y}$ に置かれた点電流源 $\mathbf{p}_0 e^{-jk_x \cdot \mathbf{d}_{mn}}$ による電界 $\mathbf{E}^\infty$ をブリュアン帯域 (Brillouin zone) $|k_x| \leq \pi/L_x$, $|k_y| \leq \pi/L_y$ 内だけの波数積分に変形することができて、

図 9 Brute-Force 法

$$\mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{d}_{mn}, t) = \frac{L_x L_y}{(2\pi)^2} \int_{-\pi/L_x}^{\pi/L_x} \int_{-\pi/L_y}^{\pi/L_y} \mathbf{E}^\infty(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) e^{-jk_x \cdot \mathbf{d}_{mn}} dk_x dk_y \quad (9)$$

となる ⁽²⁷⁾。ここで、 $\mathbf{E}^\infty$ とは図 7 のユニットセル内に $\mathbf{p}_0$ を置いた場合の電磁界であり、US-FDTD によって求めることができる。したがって、 $\mathbf{E}^\infty$ をブリュアン帯域で積分すれば単一波源 $\mathbf{p}_0$ による電磁界を求めることができる ⁽²⁸⁾。この方法を ASM (Array Scanning Method)-FDTD 法という。一方、周期構造の解析法として平面波展開法が知られているが、ASM の方が有効であると言われている ⁽²⁹⁾。

計算例を図 10 に示す。解析モデルは図 8 (a) と同じであるが、そのサイズは全て 10 倍とした。ただし、誘電率と透磁率は同じである。励振源は z 方向を向く微小電気ダイポールアンテナで、 $z = 100 \text{ mm}$ の点に置き、正弦波で変調されたガウスパルスで励振した。また、観測点は電気ダイポールから y 軸方向に $L_y = L_x$ だけ離れた点である。BF (Brute-Force)-FDTD 法計算においては、打ち切り誤差が無視できるくらい小さくなるように、微小ダイポールを含む 11×11 個のユニットセル全体を計算領域とした。一方、ASM-FDTD 法における式 (9) の $k_x - k_y$ の積分は 48×48 個のサンプリングデータから計算した。初期応答に関しては両者ともよく一致しているが、14 ns と 19 ns 付近ではやや差異が生じている。ASM-FDTD 法における k 空間のサンプリング点を増やすことによってこの差異は小さくなることから、ASM-FDTD 法における k 空間の積分については注意深い検討が必要である。

3.2.2 近似法

上で述べたように、無限周期構造近傍の有限な大きさを持つ単一アンテナの問題は Brute-Force 的な方法に頼らざるを得ず、膨大な計算機資源を必要とするの

図 10 散乱電界の時間変化

が現状である。一方、アンテナの設計という観点からは必ずしも数値的厳密性を要しない場合も少なくない。このため近似的な手法も魅力的である。1.で紹介した伝送線路近似法以外の方法としては、例えば均質化法がある⁽³⁰⁾。図6の境界 I_U と I_B の間にある周期構造を等価的な媒質に置き換えることができれば、解析はかなり簡単になると予想できる。この考え方を均質化法というが、その精度や適用条件などは今のところ十分には明らかにされていない。今後の発展に期待したい。

3.3 分散ダイアグラム

波数 k と角周波数 ω との関係、すなわち分散ダイアグラムを知ることはメタマテリアル内の電磁波伝搬の基本特性を知る上で極めて重要である。分散ダイアグラムはUS-FDTD法によっても計算できるが、筆者らの経験によると必ずしも効率的ではない。そこでここでは、有限要素法とFDFD (Finite Difference Frequency Domain) 法⁽³¹⁾による計算法を示す。後者は周波数領域の差分法であると考えてよい。ただし、解析空間のセル構造は図5と同じである。

有限要素法とFDFD法による分散ダイアグラムの計算法はよく似ている。それらのメッシュ構造を図11に示す。有限要素法では三角形であるのに対して、FDFD法では長方形である。四つの周期境界 P_B に周期境界条件(5)を適用すると、両者共に電磁界の関係式は

(a) FEM

(b) FDFD

図11 ユニットセル内のメッシュ構造

図12 分散ダイアグラム

$$A\mathbf{x} = \omega B\mathbf{x} \quad (10)$$

の固有値方程式によって表される。ここで、行列 A 、 B の要素は構成パラメータ、メッシュの構造パラメータ、 k などによって定まる。また、ベクトル $\mathbf{x}$ は格子点の電界あるいは磁界である。

このように分散ダイアグラムの計算は行列の固有値問題(10)に帰着される。行列のサイズは格子点の数であるから、精度を上げようとしてメッシュを小さくすると行列のサイズが極めて大きくなるという欠点はあるものの安定した計算が可能である。数値例を図12に示す。これは誘電率 $\epsilon_r = 8.9$ の周期誘電体円柱の分散ダイアグラムである⁽³²⁾。比較のためにFDTD法によって求めた結果も示している。ここで、横軸の Γ 、 X 、及び M はブリュアン帯域の $(k_x, k_y) = (0,0), (\pi/L, 0), (\pi/L, \pi/L)$ に対応する。

4 むすび

本稿では、数値電磁界解析ということに焦点を当てながら、メタマテリアルアンテナのモデリング法の現状について概説した。まず最初に計算電磁気学における主要な電磁解析法の基本的な考え方を簡単に紹介し、次に無限周期構造による散乱解析と伝搬特性の解析手法について議論した。更に、メタマテリアルアンテナ設計のための近似手法についても簡単に述べた。これらの方法は必ずしも完全ではない。今後の発展を望みたい。また、誌面の都合上割愛せざるを得なかった重要な方法もある。興味ある読者は参考文献で補って頂きたい。

文献

- (1) Metamaterials handbook, Part I: Theory and phenomena of metamaterials, Part II: Applications of metamaterials, P. Capolino, ed., CRC Press, New York, 2009.
- (2) メタマテリアルII, 石原照也, 真田篤志, 梶原浩太郎(監修), シーエムシー出版, 東京, 2012.
- (3) C. Caloz and T. Itoh, Electromagnetic metamaterials: Transmission line theory and microwave applications, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2006.
- (4) S. Tretyakov, Analytical modeling in applied electromagnetics, Artech House, Boston, 2003.
- (5) L. Liu, C. Caloz, and T. Itoh, "Dominant mode leaky-wave antenna with backfire-to-endfire scanning capability," Electronics Lett., vol.38, no.23, pp.1414-1416, Nov. 2002.
- (6) F. Yang and Y. R-Samii, Electromagnetic band gap structures in antenna engineering, Camb. Univ. Press, Cambridge, 2009.
- (7) W.C. Gibson, The method of moments in

- electromagnetics, Chapman & Hall/CRC, New York, 2008.
- (8) A.F. Peterson, S.L. Ray, and R. Mittra, Computational methods for electromagnetics, IEEE Press, New York, 1998.
 - (9) J.L. Volakis, A. Chatterjee, and L.C. Kempel, Finite element method for electromagnetics, IEEE Press, New York, 1998.
 - (10) J. Jin, The finite element method in electromagnetics, 2nd ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 2002.
 - (11) 宇野 亨, FDTD 法による電磁界およびアンテナ解析, コロナ社, 東京, 1998.
 - (12) A. Taflov and S.C. Hagness, Computational electrodynamics; The finite-difference time-domain method, 3rd Ed., Artech House, Boston, 2005.
 - (13) Y. Hao and R. Mittra, FDTD modeling of metamaterials, theory and application, Artech House, Boston, 2009.
 - (14) S.M. Rao, D.R. Wilton, and A.W. Glisson, "Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape," IEEE Trans. Antennas Propag., vol.AP-30, no.3, pp.409-418, May 1982.
 - (15) J.-P. Berenger, "A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves," J. Comput. Phys., vol.114, no.2, pp.185-200, Oct. 1994.
 - (16) 電磁波問題の基礎解析法, 山下栄吉 (監修), コロナ社, 東京, 1987.
 - (17) 羽石 操, 平澤一紘, 鈴木康夫, 小形・平面アンテナ, 電子情報通信学会, 東京, 1996.
 - (18) P.P. Ewald, "Die Berechnung Optischer und Elektrostatischen Giterpotentiale," Ann. Phys., vol.64, no.3, pp.253-287, 1921.
 - (19) G. Lovat, P. Burghignoli, and R. Araneo, "Efficient evaluation of the 3-D periodic Green's function through the Ewald method," IEEE Trans. Microw. Theory Tech., vol.56, no.9, pp.2069-2075, Sept. 2008.
 - (20) 佐藤慎悟, 長谷川弘治, "多層周期構造による平面波散乱特性の有限要素解析法の比較," 計算数理工学論文集, vol.7, no.3, pp.219-224, March 2008.
 - (21) A. Dorodnyy, V. Shklover, and C. Hafner, "Hybrid FEM-FMM approach for efficient calculations of periodic photonic structures," Prog. Electromagn. Research M, vol.33, pp.121-135, Oct. 2013.
 - (22) 井出 守, 宇野 亨, 櫛山祐次郎, 有馬卓司, "誘電体スラブ上周期ストリップ導体による平面電磁波散乱の高速モーメント法解析," 信学論 (B), vol. J94-B, no.9, pp.1086-1093, Sept. 2011.
 - (23) T. Uno, "Electromagnetic modeling of metamaterials," IEICE Trans. Commun., vol. E96-B, no.10, pp.2340-2347, Oct. 2013.
 - (24) P. Harms, R. Mittra, and W. Ko, "Implementation of the periodic boundary condition in the finite-difference time-domain algorithm for FSS structures," IEEE Trans. Antennas Propag., vol.42, no.9, pp.1317-1324, Sept. 1994.
 - (25) L.B. Jackson, Digital filters and signal processing, Kluwer, Boston, MA, 1986.
 - (26) A.K. Shaw and K. Naishadham, "ARMA-based time-signature estimator for analyzing resonant structures by the FDTD method," IEEE Trans. Antennas Propag., vol.49, no.3, pp.327-339, March 2001.
 - (27) R. Sigelmann and A. Ishimaru, "Radiation from periodic structures excited by an aperiodic source," IEEE Trans. Antennas Propag., vol.13, no.3, pp.354-364, May 1965.
 - (28) F. Capolino, D.R. Jackson, and D.R. Wilton, "Fundamental properties of the field at the interface between air and a periodic artificial material excited by a line source," IEEE Trans. Antennas Propag., vol.53, no.1, pp.91-99, Jan. 2005.
 - (29) F. Capolino, D.R. Jackson, D.R. Wilton, and L.B. Felsen, "Comparison of methods for calculating the field excited by a dipole near a 2-D periodic material," IEEE Trans. Antennas Propag., vol.55, no.6, pp.1644-1655, June 2007.
 - (30) D.R. Smith and J.B. Pendry, "Homogenization of metamaterials by field averaging," J. Opt. Soc. Am. B, vol.23, no.3, pp.391-403, March 2006.
 - (31) K. Yasumoto, Electromagnetic theory and applications for photonic crystals, CRC Press, New York, 2006.
 - (32) A.G. Hanif, Y. Kushiya, T. Uno, and T. Arima "FDFD and FDTD methods for band diagram analysis of 2-dimensional periodic structure," IEICE Trans. Commun., vol.E93-B, no.10, pp.2670-2672, Oct. 2010.

宇野 亨 (正員：フェロー)

1985 東北大学院博士了。工博。同年同大学・工・助手。1991 同助教授。1998 東京農工大・工・教授。電磁波における逆散乱問題、計算電磁気学などの研究に従事。「FDTD 法による電磁界及びアンテナ解析」, 「電磁気学」(共にコロナ社)。