レ タ ー

フレネルゾーンプレートを通しての光線追跡

神 谷 恒 吾・吉 田 稔

岐阜大学教養部物理学教室 岐阜市柳戸1番1 (〒501-11)

(1986年6月15日受理)

Ray Tracing through Fresnel Zone Plate

Kohgo KAMIYA and Minoru YOSHIDA

Department of Physics, Faculty of General Education,
Gifu University, 1-1 Yanagido, Gifu, 501-11

(Received June 15, 1987)

Simple equations for tracing rays through the Fresnel zone plate have been derived. The spot diagram constructed by means of the ray tracing shows an appearance of imagery of the Fresnel zone plate as a focusing element. The spot diagram can be obtained not only for the real images but also for the imaginary images. Some demonstrative examples of the spot diagram are given.

1. は じ め に

フレネルゾーンプレート (FZP—Fresnel Zone Plate) は分光と結像が同時にできる光学素子であり、波動光学実験の一つの道具として興味を持たれていた。最近、リソグラフィーなどの精密加工技術の進歩により、その実用が十分に可能な FZP が現実のものとなりつつあり、特にそれが極端紫外線・軟X線など、透明物質がなく通常の屈折光学レンズが使用できない波長領域での結像素子になる可能性がある点で注目される。

FZPを結像素子として用いたとき、その像には歪曲を除く全てのザイデル収差が現れて来る¹⁻⁵⁾。FZPが作るこのような収差を含んだ像がどんなものであるかを知るには、像の形が直接観測できるスポットダイアグラムを求めると都合がよい。

スポットダイアグラムは光源から光学素子を通り像面に至る多くの光線が、それぞれどのような途を通るかを追跡して求められる。レンズを通しての光線追跡の方法

は既に確立されていて多くの教科書に載っている。また回折格子が作るスペクトル像を描くための光線追跡の方法が十数年前に報告されている⁶⁾。それはかなり巧みな方法であって、僅かな変更で直ちに FZP を通しての光線追跡の方法が得られる。ここではその方法が極めて簡単な計算によって行われ、小さな計算機でも短時間にスポットダイアグラムを求めることができることを報告する。

2. 光線追跡の式

2.1. 光路関数

FZP の中心に原点Oをとり、FZP が xy 面にあるように直角座標をとる。従って、光軸が z 軸である。ここで、光線追跡に用いる式の導出は幾何光学的な取扱いであるので、FZPは不透明な膜に同心円になるよう円形スリット開口群が形成されたものであると考える。これら円形スリットの半径 σ_n は n 番目のものに対して、

$$\sigma_n^2 = w^2 + l^2 = 2nr^2, \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (1)$$

Fig. 1. Schematic representation of the optical system. The Cartesian coordinate system is used with the center of zone plate as the origin O, and the optical axis as the z axis. $A(x, y, z)$ and $B(x', y', z')$ are the point source and the image point, respectively.

で与えられる。ここで、 r は最内部ゾーンに相当する円の半径で、FZPはこの円の面積と等しい面積をもつ円環ゾーンの明暗の繰り返しで構成されているので、相次ぐ二つ毎の円環の境界が円形スリットである。

追跡しようとする光線は一点 $A(x, y, z)$ を発し、円形スリット上の点 $P(w, l, 0)$ を通ったのち一点 $B(x', y', z')$ に達するものである。FZPが結像素子として働いている場合には、FZPの中心を通過したと仮定される、中心光線 ($n=0$ の場合に対応する) と n 番目の円形スリットを通過した光線との光路差が、像のところで $nm\lambda$ になっている。(1)式を使うと、

$$nm\lambda = m\lambda \frac{\sigma_n^2}{2r^2} \quad (2)$$

と書き直される、ここで m は干渉の次数、 λ は光の波長である。従って、 A 点を発し FZP を通り B 点に達し結像に寄与する光線に関する光路関数は、

$$F = \langle AP \rangle + \langle PB \rangle + m\lambda \frac{\sigma_n^2}{2r^2} \quad (3)$$

で与えられる、ここで

$$\begin{aligned} \langle AP \rangle^2 &= (x-w)^2 + (y-l)^2 + z^2, \\ \langle PB \rangle^2 &= (x'-w)^2 + (y'-l)^2 + z'^2 \end{aligned}$$

である。 B 点が光点 A の像であるならば、Fermat の原理から

$$\frac{\partial F}{\partial w} = 0, \quad \text{および} \quad \frac{\partial F}{\partial l} = 0 \quad (4)$$

が同時に成立しなくてはならない。かくして、この条件に従う光線を追跡することになる。

2.2. 入射光線および出射光線の方角余弦

(1)式と(3)式を使って、(4)式の微分を行うと、

$$\frac{\partial F}{\partial w} = -\frac{x-w}{\langle AP \rangle} - \frac{x'-w}{\langle PB \rangle} + m\lambda \frac{w}{r^2} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial F}{\partial l} = -\frac{y-l}{\langle AP \rangle} - \frac{y'-l}{\langle PB \rangle} + m\lambda \frac{l}{r^2} = 0. \quad (5')$$

この二つの式から、

$$\begin{aligned} \frac{l}{w} \left(\frac{x-w}{\langle AP \rangle} + \frac{x'-w}{\langle PB \rangle} \right) &= \frac{1}{l} \left(\frac{y-l}{\langle AP \rangle} + \frac{y'-l}{\langle PB \rangle} \right) \\ &= \frac{m\lambda}{r^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

が得られる。ここで、 $(x-w)/\langle AP \rangle$ など(6)式の各項はそれぞれ A 点から P 点への入射光線および P 点から B 点への出射光線の方角余弦に対応している。入射光線の方角余弦を (L, M, N) 、出射光線の方角余弦を (L', M', N') とし、

$$L = -\frac{x-w}{\langle AP \rangle}, \quad M = -\frac{y-l}{\langle AP \rangle}, \quad (7)$$

$$L' = \frac{x'-w}{\langle PB \rangle}, \quad M' = \frac{y'-l}{\langle PB \rangle}, \quad (7')$$

と書くと、(6)式は

$$\frac{-L+L'}{w} = \frac{-M+M'}{l} = \frac{m\lambda}{r^2} \equiv T, \quad (8)$$

と書き直される。(8)式と、 $L'^2 + M'^2 + N'^2 = 1$ の関係を用いて、入射光線 AP に対する FZP からの出射光線 PB の方向余弦が次のように求められる、

$$\begin{aligned} L' &= wT + L, \\ M' &= lT + M, \\ N' &= [1 - (wT + L)^2 - (lT + M)^2]^{1/2}. \end{aligned} \quad (9)$$

2.3. 像面上光線通過点の位置

FZP から z' の距離にあり光軸に垂直な面を考え、この面でのスポットダイアグラムを求める*。

PB 間の幾何学的距離 d は、

$$d = z'/N', \quad (10)$$

である。かくて、この平面内で光線の通過点の位置は、

$$x' = w + L'd, \quad \text{および} \quad y' = l + M'd, \quad (11)$$

で与えられる。光点 A を固定し、FZP 上の光線通過点 $P(w, l, 0)$ を色々にとり、それぞれの P 点に対応した出

* スポットダイアグラムは平面上だけでなく、一般に2次曲面上にも求められる。(文献6参照)

射光線 PB の像面通過点 (x', y') をプロットしてスポットダイアグラムが描かれる。FZPに平行光束が入射する場合は、入射光線の方向余弦 L, M を (9) 式に代入するところから始めればよい。

3. スポットダイアグラム

ここでは、典型的なスポットダイアグラムの例を示す。以下、結像素子として仮定した FZP は、 $r=0.50$ mm、ゾーンの数 200 で最大半径 $\sigma_n=10$ mm のものである。また、仮定された光の波長は $\lambda=500$ nm である。スポットダイアグラムが描かれている枠は一辺が 4×10^{-2} mm に対応している。

Fig. 2a) は光軸に平行な光束が FZP いっぱいに入射

Fig. 2. Spot diagrams of the focus on the Gaussian image plane. a) Focus on the focal plane ($z'=f=500$ mm), when parallel beam falls normally on the zone plate. b) Image of the point source, which is placed on the optical axis at $z=-1000$ mm. The image plane is at $z'=1000$ mm.

したときの焦点 ($z'=f=500$ mm) の像で、Fig. 2b) は光軸上 $z=-1000$ mm に点光源を置いたとき像倍率が 1 になる像面 $z'=1000$ mm での像である。像面の位置 z' はレンズの場合と同じく

$$\frac{1}{z'} = \frac{1}{z} - \frac{m\lambda}{r^2} \quad (12)$$

の式から求められた。FZP に関しては $-m\lambda/r^2$ で与えられる量は焦点距離 f の逆数すなわちレンズのパワーに相当している。従って、FZP は m が負のとき凸レンズ、正のとき凹レンズと同じ働きをする。Fig. 2a), Fig. 2b) とも像は直径 5×10^{-3} mm 以下の円形に集光していることが解る。

Fig. 3 は干渉の次数 m が異なるスポットダイアグラムの例である。Fig. 3a) は $m=+1$ の場合で点光源を少し軸外し $A(x=0, y=20$ mm, $z=-1000$ mm) に置いたとき $z'=-333.3$ mm にできる虚像を示している。Fig. 3b) は同じ点光源に対し $m=-3$ のとき $z'=200$ mm にできる像で、Fig. 3c) では $m=-3$ のとき平行光束が方向余弦 $L=0, M=-20/1000$ で入射したとき焦点面 $z'=f=166.7$ mm の像を示す。

Fig. 4 は $m=-1$ にし、点光源 A を前例と同じ軸外しに置いたとき、焦点近傍の像を特に非点収差の様子がよく解るように走査したもので、図は a), b), c), d), e) の順にそれぞれ像面の位置が $z'=998.4$ mm, 998.8 mm, 999.2 mm, 999.6 mm, 1000.0 mm である。最後の e) の場合がガウス像面になっている。b)とd)はそれぞれ子午的焦線および球欠的焦線の像である†。c)はb)とd)の中

Fig. 3. Spot diagrams obtained with respect to some different m , when the source is off axis. a) An imaginary image at $z'=-333.3$ mm with $m=+1$. Point source is at $A(x=0, y=20$ mm, $z=-1000$ mm). b) An image at $z'=200$ mm with $m=-3$. Source is the same to case a). c) An image at $z'=f=166.7$ mm with $m=-3$, when parallel beam falls on the zone plate with direction cosine ($L=0, M=-20/1000$).

† b), d) に関する z' の値 $z_{m'}$ および $z_{s'}$ は次の式から計算された,

$$b) \frac{1}{z_{m'}} = \frac{1}{z} - \left\{ 1 + \left(\frac{x^2 + y^2}{z^2} \right) \right\}^{3/2} \frac{m\lambda}{r^2}, \quad d) \frac{1}{z_{s'}} = \frac{1}{z} - \left\{ 1 + \left(\frac{x^2 + y^2}{z^2} \right) \right\}^{1/2} \frac{m\lambda}{r^2}$$

Fig. 4. Spot diagram obtained successively on planes near to the Gaussian image plane, in order to show the astigmatism. b) and d) are the meridional focal line and the sagittal focal line, respectively. Point source is placed at $A(x=0, y=20 \text{ mm}, z=-1000 \text{ mm})$.

Fig. 5. Spot diagrams obtained successively on planes near to the Gaussian image plane. Parallel beam fall on the zone plate with direction cosine ($L=0, M=-20/1000$). A trochoid shape image represents coma, mainly.

間, a) は b) の前方に距離を各像面間のそれに等しくとった像面のものである。

Fig. 5 は平行光束を FZP 全面に斜入射 ($L=0$, $M=-20/1000$) させたときでコマ収差の様子が比較的よく現れている。図は Fig. 4 に習って描かれており、この場合像面の位置は a) から順にそれぞれ $z' = 499.6$ mm, 499.7 mm, 499.8 mm, 499.9 mm, 500 mm で、最後の e) がガウス像面である。図からはコマ収差特有のトロコイド型の像が観測される。

4. ま と め

FZPを通して光線追跡を行う方法が示された。使用される計算式は極めて簡単で、小さな計算機でも早い時間でスポットダイアグラムを得ることができる。

HP-85 計算機を使って FZP 上に 0.9 mm 方眼で約

380 の通過点を取った場合、3 分以内でスポットダイアグラムが描かれた。この方法では出射光線の方向余弦が与えられるので、一本一本光線を描いて火線をみるとか収差の大きさを算定することなども可能である。

文 献

- 1) O.E. Myers, Jr.: Am. J. Phys. **19**, 359 (1951).
- 2) K. Kamiya: Science of Light (Tokyo) **12**, 35 (1963).
- 3) M. Young: J. Opt. Soc. Am. **62**, 972 (1972).
- 4) W.A. Kleinhaus: Appl. Optics **16**, 1701 (1977).
- 5) K. Goto and H. Banjo: J. Opt. Soc. Am. **A3**, 2101 (1986).
- 6) H. Noda, T. Namioka, and M. Seya: J. Opt. Soc. Am. **64**, 1037 (1974).