<査読論文 2016年12月22日 採択>

物価連動国債の元本保証 —消費者物価指数に関するリアルオプション— Face Value Guarantee for the Inflation-Indexed Government Bonds - Real Options on Consumer Price Index -

森平 爽一郎
(早稲田大学 大学院ファイナンス研究科)

湯山 智教
(早稲田大学 大学院商学研究科)

Soichiro Moridaira (Graduate School of Finance, Waseda University)
Tomonori Yuyama (Graduate School of Commerce, Waseda University)

Summary: In this paper, we first overview several issues related to price-linked government bonds in several countries in terms of the policy background and conditions of issuance, then we discuss risk premium and principal guarantee option when extracting the expected inflation rate by Break-Even Inflation rate (BEI). When we try to derive the pricing model for the principal guarantee option premium, we employ the pricing kernel (SDG: Stochastic Discount Factor) approach. Therefor we can obtain the value of guarantee as a put option pricing formula by maximizing the expected utility from consumption of representative investors. Regardless of the fact that we assumed the investors are risk averse, it is possible to derive risk neutral valuation formula, which is free from the risk preference and the expectation of the investors. We also derive the exact formula for the future deflation probability embedded in the equilibrium price. It can be shown that necessary information to compute the probability comes from the market price of actual nominal discount bonds and inflation-indexed government bonds only. We also discussed the possibility of estimating the degree of risk aversion of the representative investors based on the Japanese government bond price.

1. はじめに

我が国では、物価連動国債(償還年限は10年。以下、単に「物価連動債」ともいう)が2004年3月以降、第16回債まで年4回発行されたものの、リーマンショックの影響や、デフレが続く元本減少が続いたことなどから需要が減少したこともあり、2008年10月に一時発行が休止された。その後、2013年10月から発行が再開されたが、発行条件が変更され、米国等と同様、インフレ率がマイナスすなわちデフレが生じた場合、元本支払いが保証される形に発行条件が変更された(財務省 2013)。すなわち、デフレ保証あるいはデフレ保険が付されたことになる。これにより、物価連動債の利回りは、行使価格が元本価格であるプットオプションの価値が差し引かれる形、すなわち本来の利回りから、そのプットオプション価値相当分だけ低くなる形で評価されると考えられる。発行者である政府の立場からみると、その分だけ発行コストが安くなる一方、投資者の立場からみる

と、その分だけ利回りが低くなることになるが、デフレ時の元本割れリスクを回避できる。

また、このデフレ保険に関するオプションプレミアムは、物価連動債の取引時に考慮する必要があるだけでなく、物価連動債利回りを元に算出されるブレイク・イーブン・インフレ率(以下、「BEI」という)を評価する際に考慮すべき要素となる。BEIは、中央銀行を含めた市場関係者が注目している指標であり、その背景としては、これにより市場参加者による将来の物価上昇率に対する期待(以下、「期待インフレ率」という)を評価することができることがあげられる。特に、物価安定目標を有する国にとっては、期待インフレ率は金融政策の先行きを示しうる指標であることから、注目されている。例えば、我が国においても、日本銀行が消費者物価上昇率2%の「物価安定の目標」を掲げた2013年1月前後に、BEIが0%台前半から1%台半ばへと上昇したが、これが期待インフレ率の上昇を示すものとして市場関係者等の間で注目された(黒田(2013)等)。

本稿では、物価連動債に係る仕組みや各国における発行状況・発行の背景等について概観し、続いて BEI による期待インフレ率抽出の際のリスクプレミアムと元本保証オプションプレミアムのもたらす影響について示す。その上で、その元本保証にかかるオプションの経済的な含意について述べる。

(注) 2015年9月までのデータ。直近銘柄 BEI は直近に発行された物価連動債の同年限国債とのスプレッド。2008年10月～2013年9月の間は発行休止されていたため残存年限は必ずしも10年ではない。

(出所) 日経 QUICK

図1 我が国の直近銘柄 BEI、物価連動債利回り、国債利回り(10年物)の推移

2. 我が国の物価連動債の仕組み

我が国の物価連動債は、発行後に物価(具体的には全国消費者物価指数(生鮮食品を除く総合指数。以下「CPI」という))が上昇した場合に、その上昇率に応じて、連動係数変動し、元金額が増加(以下、増減後の元金額を「想定元金額」という)する仕組みとなっている。なお、連動係数が参照する CPI は3か月前のものとなるため、物価と元金償還額には3か月のラグが存在することになり、厳密に言えば我が国の物価連動債はこの期間分のインフレリスクを負うことになっている。

償還額は、償還時点での想定元金額となるが、2013年の発行再開後の物価連動債には、償還時の CPI への連動係数が1を下回る場合、額面金額にて償還される元本保証(フロア)が設定された。利払いは年2回

であり、利子の額についても、各利払い時の想定元金額に表面利率を乗じて算出される。表面利率は発行時に固定し、全利払いを通じて同一であり、物価上昇により想定元金額が増加すれば利子の額も増加するが、利払い時の連動係数には元本保証は付されていない。

(注) 連動係数(期初を1として全国消費者物価指数に連動)が、①1を下回る場合、期中の想定元金額は額面を割り込み、②償還時に1以上の場合、そのまま想定元金額を算出し、元金・利息が支払われ、③償還時に1を下回る場合、額面金額で償還される。ただし、利息に対してフロア効果はなし。

(出所) 財務省ホームページより抜粋。

図2 我が国の物価連動債の仕組み

3. 主要国における導入状況

次に、欧米諸国及び我が国における発行状況を概観する¹。物価連動債は、ほぼすべての主要先進国で導入されているが、主要先進国で初めて発行されたのは英国であり、「Linker」と呼ばれ1981年に発行が開始された。

それ以前の物価連動債発行国は、ブラジルやメキシコなどの高インフレ国やイスラエル・アイルランドなどに限られていた。英国の物価連動債は、その流通量も多く、2015年3月末時点で全国債発行残高の25%を占め、主要先進国では最も多い。他方、我が国や米独仏と異なり、デフレ時の元本保証が付されていないこと、参照される物価が消費者物価指数ではなく、RPI(小売価格指数)であることが特徴となっている²。米国では、長年にわたる議論の末、1997年か

¹ Brynjolfsson and Fabozzi, eds(1999)等を参考とした。

² 英国政府は2010年に、参照物価指数を RPI のかわりに

CPI とすることを検討し市中協議に付したものの、結局、CPI の採用をやめ、RPI を使用継続することと決定した。

ら発行が開始され、"TIPS(Treasury Inflation-Protected Security)"と呼ばれている。発行規模は主要国の中で最も大きく、また 2015 年 11 月末で国債に占める割合も 9%程度となっている。他方、我が国の状況をみると、2004 年から 10 年物で導入が開始されたが、国債発行残高に占める割合が低く、その流動性の向上が課題になっている。流動性が低い場合には、物価連動債にかかる流動性リスクプレミアムが大きくなり、発行コストも高くつくためである(後述)。また、我が国の物価連動債への投資家の多くは、海外機関投資家であるとみられ(北村 2010)、国内の年金基金や保険会社等などに投資家層を広げることも課題となっている。

	日本	米	英	独	仏
導入時期	2004 年	1997 年	1981 年	2006 年	1998 年
発行年限	10 年	5,10, 30 年	5~55 年	5,10 年	2~5 年 7~30 年
参照指数	CPI(生鮮食品を除く)	CPI	RPI 注 1	HICP 注 2	CPI(たばこを除く) HICP 注 2
償還時の元本保証	あり (2013 年以降)	あり	なし	あり	あり
国債に占める割合	0.6% (2015 年 3 月末)	8.8% (2015 年 11 月末)	25% (2015 年 3 月末)	7% (2015 年 末)	12% (2014 年 末)
債務管理当局	財務省 理財局	Office of the Debt Management	Debt Management Office	Finance Agency GmbH	Agence France Tresor

(注 1) 小売物価指数

(注 2) ユーロ圏消費者物価指数(除くたばこ)

(出所) 財務省(2013, 2015)、各国債務管理当局ホームページ等

表 1 主要国における物価連動債の状況

これは、デフレ期待が根強かったことから、そもそもこれらの投資家においてインフレに対する懸念が少なかったことも背景として考えられるが、2013 年の日本銀行による「量的・質的金融緩和(2%の物価安定目標の設定を含む)」なども相まってあらためて注

目された。

なお、物価連動債には個人等への譲渡制限がっていたが、2016 年 1 月以降に満期を迎える物価連動債については、2015 年 1 月より、譲渡制限が解除され、個人等による保有も可能となる。2016 年度(平成 28 年度)の国債発行計画では、年間 2 兆円の発行予定となっている(2013 年度は 6000 億円、2014 年度は 1.8 兆円、以降は年間 2 兆円の発行計画を維持)³。

4. 物価連動債導入の背景

では、なぜ各国は、物価連動債を導入したのか。その背景について、発行当局、投資家、市場参加者の 3 つの立場から考えてみる⁴。

まず発行当局の立場からみると、物価連動債はインフレリスクプレミアムに相当する分だけ発行コストが減少することが見込まれたことがあげられる。すなわち、フィッシャー方程式が成立していると考ええると、通常の普通国債の利回り(i)は、実質金利(r)と期待インフレ率($E\pi$)に加えて、将来のインフレ変動リスクに相当する分だけ、インフレリスクプレミアム(IRR)が生じていると考えられる。

$$i = r + E\pi + IRR \quad (25)$$

一方、物価連動債($TIPS$)はインフレを完全にヘッジできるためにそのリスクが発生しないため、この分だけ発行コストを削減できる⁵。米国において、発行がなされた最大の理由も、この発行コスト削減に資するというものであったとされる⁶。

また、高インフレ国の発行当局にとって、インフレになればその分だけ償還額が増える物価連動債を発行することは、政府にとってインフレ抑制のためのインセンティブが働くとも考えられた。政府債務削減のためにインフレを起こして実質債務残高を減らすというインセンティブをなくすことにより、政府のインフレ抑制に対する信認が増すことが見込まれたわけである。同時に高インフレ国にとって、物価連動債の場合、当初の発行コストに期待インフレ率相当額が含まれないで実質金利のみで済むことから、発行コストが抑えられると考えられたこともあげられる。

では、過去の発行状況に関する限り、普通国債と比

³ 財務省「平成 28 年度国債発行計画」(財務省ホームページより)

⁴ 各国における導入の背景については、Brynjolfsson and Fabozzi, eds.(1999)、Campbell, Shiller, and Viceira.(2009)等を参考とした。

⁵ この式は恒等式でなく経済的な均衡式として求めること

ができる。導出とその経済的な意味付けについては、第 6.2.4 節の式(20)を参照のこと。

⁶ もっとも、実際には、後述のとおり、発行時の流動性リスクプレミアムが予想以上に大きかったことから、普通国債よりも発行コストが増加しかねない状況も生じた。

較して物価連動債の発行コストは抑えられたのだろうか。事後的にみれば、近年、世界的にみてインフレ率が抑制されてきたことから、発行時の期待インフレ率よりも実績のインフレ率が低く収まったケースが多いとみられ、普通国債対比でみて発行コストは抑えられたとみられる。もっとも、発行コストは事後的にみるべきではなく、発行当時の BEI と実際の投資家の期待インフレ率の比較で考えるべきという指摘もある(Dudley, Roush, and Steinberg, 2009)。この考え方による場合、BEI を、例えば期待インフレ率のサーベイ予測と比較して、BEI の方が高い場合にコスト抑制的であると考えられる。物価連動債の発行時の利回り(発行時のコスト)は、発行時の期待インフレ率が高く、そして実績のインフレ率が低いほど、小さくなると考えられるためである。逆にいうと、発行時の期待インフレ率が低い時、すなわちデフレが見込まれるときには発行時の利回りが高くなりかねない。実際、我が国においてもリーマンショック後には、デフレが見込まれた上に、後述の流動性リスクプレミアムも生じ⁷、発行コストが高く、物価連動債の発行を取りやめた(北村 2010)。

次に、物価連動債への投資家の立場からみると、インフレリスクに晒されかねない長期投資家、具体的には年金基金や保険会社などの機関投資家にとって、インフレリスクを長期においても完全にヘッジしてくれる物価連動債は投資対象として魅力があったことがあげられる。また、投資先の分散化に資するとともに、投資家である国民にとってインフレリスクのない投資対象の選択肢が増えることから、貯蓄率向上に資することなども指摘されている⁸。

最後に、市場参加者、特に中央銀行などの物価安定に責務を有する市場参加者の立場からみると、物価の影響を受けない実質金利(r)であるとみなされる物価連動債利回り、普通国債利回り(i)の差から計算されるブレイク・イーブン・インフレ率(BEI)は、フィッシャー方程式より、期待インフレ率を示すと考えられたことから、市場の期待する期待インフレ率を示す指標、そして中央銀行の政策変更の先行きを示しうる指標として有用であると考えられた。もっとも、BEI は、式(1)により示されるように、インフレリスクプレミアムに相当する分だけ、真の期待インフレ率を過大に評価していると考えられることにも留意する必要がある(式(2))。

$$BEI(\doteq E\pi) = i - r - IRR \quad (26)$$

5. リスクプレミアムや元本保証オプションプレミアムが BEI にもたらす影響

物価連動債の利回りは、物価の影響を受けないことから理論的には実質金利に等しいとも考えられるが、実際には、物価連動債の流動性が必ずしも十分とはいえないことから、流動性リスクプレミアムが生じていると考えられる⁹。このため、物価連動債利回り($rTIPS$)は、実質金利(r)にその流動性リスクプレミアム(LRR)を加えて考える必要がある。

さらに、既に述べたとおり、英国を除き、我が国を含めた主要国の物価連動債には元本保証が付されている。このため、将来の期待インフレ率にマイナスが見込まれる場合には、その分を補填するオプションが付されていると考えられる。このオプションプレミアムに相当する分は、元本を保証している政府が受けとるプットオプションプレミアムに相当すると考えられことから、その分だけ発行コストが削減されることになる。すなわち、物価連動債利回り($rTIPS$)は、実質金利(r)に、流動性リスクプレミアム発行時の利回りを加えた水準から元本保証オプションプレミアム(POP)相当分を差し引いて考える必要がある(式(3))。

$$rTIPS = r + LRR - POP \quad (27)$$

このことは、普通国債と物価連動債を用いて抽出される BEI に対しても影響を与える。すなわち、BEI が真の市場参加者による期待インフレ率を示すものとみなされるためには、普通国債利回りから物価連動債利回りを差し引いた単純な BEI では不十分であり、インフレリスクプレミアム、流動性リスクプレミアム、それに元本保証オプションプレミウムを勘案して考える必要がある。

$$BEI(\doteq E\pi) = i - rTIPS - IRR + LRR - POP \quad (28)$$

式(4)に示されるように、単純な BEI は、真の期待インフレ率を、流動性リスクプレミアム分だけ過小評価し、インフレリスクプレミアムと元本保証オプションプレミウムの分だけ過大評価しているものと考えられることになる。これらのプレミアムの水準がどの程度であるかを把握することが、真の期待イ

⁷ このため、リーマンショック時の前後で流動性が著しく不足した期間には、物価連動国債の流動性を増やすための流動性供給入札等を実施した(北村 2010)。

⁸ 米国で物価連動債導入の理由のひとつとして、貯蓄率向

上に資することがあげられている(IMF, 1997)。

⁹ 例えば、図1をみると、リーマンショック後に物価連動国債利回りが急上昇していることが読み取れるが、これは流動性リスクプレミアムの影響と指摘されている。

ンフレ率を抽出するためには極めて重要となる。図3に、普通国債利回り、物価連動債利回りとBEIの関係について示す。では、これらのプレミアムの水準はどの程度であると考えられるのだろうか。

湯山・森平(2017)は、我が国の物価連動債によるBEIに関するインフレリスクプレミアムと流動性リスクプレミアムの水準について、カルマンフィルターを用いて推計し、我が国ではインフレリスクプレミアムが比較的小さい上に、時にはマイナスも示した一方で、流動性リスクプレミアムの水準が大きく、単純なBEIは期待インフレ率を過小評価している可能性が高いことを示した。

(注)正確には、実質金利にも実質金利リスクプレミアムが含まれると考えられる。

図7 普通国債利回り、物価連動債利回りとBEIの関係

海外の先行研究をみてもおおむね同様の結果を示しており、例えばD'Amico, Kim and Wei(2014)は、米国において2000年代前半に100bp程度、リーマンショック時には350bp程度の流動性リスクプレミアムが生じ、インフレリスクプレミアムよりも流動性リスクプレミアムが大きいと考えられることを示した。

他方、物価連動債の元本保証オプションプレミアムに関する研究は多くない。これは、リーマンショッ

ク以前の先進国の状況を見ると物価がマイナスとなるような状況よりもむしろインフレ懸念の方が多かったため、物価がマイナス時のことを考えたオプションプレミアムはほぼ無視しても構わなかったためであると推察される。こうした中、リーマンショック後のデフレ懸念を受けてなされたGrishchenko, Vanden, and Zhang (2012)は、数少ない先行研究のひとつであり、米国物価連動債(TIPS)に内包されるオプション価値を推計し、その水準はデフレ期待に応じて時変であり、例えば10年物の物価連動債では極めて小さいが5年物物価連動債では無視できない水準となり27bp程度にまで達すると推計しており、リーマン・ショック後の2009年にピークに達したことを示した。

また、Wright(2009)は残存期間が同じ2つのTIPSであっても、発行時点が異なれば参照とするCPIの水準が異なることを活用し、元本保証オプションプレミアムを求めることが可能であると示している。Christensen, Lopez, and Rudebusch (2014)も、米国において名目・実質のアフィン金利期間構造モデルを構築することで推計されたイールドカーブ情報を用いて、デフレに陥る確率を推計し、これを用いて物価連動債にかかる元本保証オプションプレミアムを推計する方法を示し、その水準は2009年にピークに達し41bpに達したとしている。

我が国における研究としては、森平・湯山(2015)があげられる。以下において、この研究に沿って、物価連動債にかかる元本保証を非完備市場におけるオプション価格決定理論によって、その特徴を分析する。

6. オプション理論による支払い保証評価

元本保証は物価に関するプットオプションと考えることができるが、物価そのものは取引されているわけではないし、そのデリバティブもすでに述べたように取引が活発でないため流動性リスクを抱えている。そのため、デリバティブ評価の一般的な方法であるリスク中立的評価は適切とはいえない¹⁰。したがって、代替的な方法としてプライシング・カーネル(確率的割引率)法を用いた価格決定モデルを採用する。この場合、投資家の効用関数を特定化することによってプライシング・カーネルを導く方法と、効用関数を特定化せずに、プライシング・カーネルが未知の状態変数、あるいは特定の経済変数、例えば短期金利や物価水準の関数であるとする、2つの方法がある。後者の方法を採用したものとしては、Campbel, Shiller,

Wright (2013), Smith(2012), Wu,(2012)など多数がある。

¹⁰ こうした論文としては、例えば、Grishchenko, Vanden, and Zhang (2012), Bodie(1990), Falbo, Paris, and Pelizzari(2010), Formica and Kingston (1991), Kitsul, and

and Viceira (2009)、Foresi, Penati, and Pennacchi(1997)、Evans(1998)などがある。前者の代表的な論文としては、Pennacchi(1991)や Lioui and Poncet(2005)がある。しかし、これらの論文では(1)問題を不確実性下における動的最適化問題として定式化し、(2)投資家の効用関数を対数効用関数に限定したこと、結果の導出と得られた結果の解釈が複雑になっている。以下で示すモデルでは、消費と物価に連続的な確率過程を仮定するものの、投資家の効用関数を消費に関するベキ型に従うものと定式化した上で、1 期間モデルの枠組みでの分析を行い、より分かりやすい結果を得ている。

6.1 元本・クーポン支払い保証を物価に関するオプションによって実現

物価連動債の元本のみならず、ここでは、クーポンに関してもデフレ保証を付与することが許容できる事例を考え、その時の「デフレ保証物価連動債」の均衡価格を導く。

3つ異なるタイプの割引債が発行されているとしよう。第1は満期に額面1円をその時の物価水準に関わらず支払う通常の割引国債(以下、「名目割引債」という)、第2は満期の額面1円の支払いが物価に連動する割引国債(以下、「(保証のない)割引物価連動債」という)、第3は、物価に連動はするが、デフレ時に、満期時の額面保証がある物価連動債(以下、「(額面)保証のある割引物価連動債」という)である。

1 円の支払いを額面保証する割引物価連動債からの満期ペイオフは、保証のない割引物価連動債の額面償還額と額面保証1円との大きい方であるから、

$$\text{Max}\left[1, \left(\frac{I_T}{I_0}\right)1\right] \quad (29)$$

と書くことができる。ここで I_T/I_0 は基準時点 ($t=0$) 時点の物価に対する元本償還時期 ($t=T$) の物価変化率を示している。

この割引物価連動債の1円保証は、2つの異なるタイプのポートフォリオによって合成できるとも考えられる。第1のポートフォリオは、保証のある物価連動債を、保証の無い物価連動債の買いと、物価に関するプットオプションの買いとからなるものと考えられる。この点を式(29)が次のように変形できることによって説明できる。

$$\begin{aligned} & \text{Max}\left[1, \left(\frac{I_T}{I_0}\right)1\right] \\ &= \left(\frac{I_T}{I_0}\right) + \text{Max}\left[1 - \left(\frac{I_T}{I_0}\right), 0\right] \\ &= \left(\frac{1}{I_0}\right)\tilde{I}_T + \left(\frac{1}{I_0}\right)\text{Max}\left[I_0 - \tilde{I}_T, 0\right] \end{aligned} \quad (30)$$

最後の式の右辺第1項は、 T 年後の元本1円あるいはクーポン1円の支払いが物価水準 I_T に連動する国債を $1/I_0$ 単位買うことから得られるキャッシュフローを表し、第2項は行使価格が I_0 円、原資産が物価水準 I_T 、残存期間が T 年のプットオプションを $1/I_0$ 単位買ったことからのキャッシュフローを示している。

式(30)の右辺と左辺との関係はまた図4によっても示すことができる。

図4 1円保証のある割引物価連動債の満期損益：保証の無い物価連動債と物価に関するプットオプションによる合成

図4の横軸は T 年後の物価水準であり、縦軸はそれぞれの資産からの T 年後のキャッシュフローを表している。図4の左図が1円保証のある割引物価連動債の満期キャッシュフローを表し、中央図が元本あるいはクーポン1円の約定支払いがその時々物価水準に連動する国債を $1/I_0$ だけ購入した時のキャッシュフローを、そして右図が物価水準を原資産とし、行使価格を基準時点 ($t=0$) の物価水準 I_0 円とする、物価に関するプットオプションを $1/I_0$ 単位だけ購入した時のキャッシュフローを示している。左のキャッシュフローは中央と右のキャッシュフローの合計になっている。

同様のことは、物価に関するコールオプションを用いても表現できる。元本保証のある割引物価連動

債の額面価値は、額面償還時の物価水準がどのようなであろうとも、確定的な額面 1 円を支払う割引国債

1 単位の買いと、行使価格が基準時点の物価水準 I_0

である物価に関するコールオプションを I_T/I_0 単位買うことによって合成できる。数式を用いてこの点を説明すると次のようになる。

$$\begin{aligned} & \text{Max}\left[\left(\frac{I_T}{I_0}\right)1, 1\right] \\ &= 1 + \text{Max}\left[\left(\frac{I_T}{I_0}\right) - 1, 0\right] \\ &= 1 + \left(\frac{1}{I_0}\right) \text{Max}\left[\tilde{I}_T - I_0, 0\right] \end{aligned} \quad (31)$$

この点は図5によっても図4と同様に説明できる。

図5 1円保証のある割引物価連動債の満期損益：割引債と物価に関するコールオプションによる合成

6.2 デフレ保証の価格決定

額面保証のある割引物価連動債の現在時点での価値は、したがって、式(30)あるいは式(31)のリスク調整後の期待現在価値として求めることができる。いずれの式を用いても同じ結果が得られるが、その経済的な含意はそれぞれの式の右辺が異なる資産から成り立っていることから異なった意味を持っている。

ここでは図5で示された物価に連動しない名目割引債と物価に関するコールオプションによって保証のある割引物価連動債を合成する方法によって議論をすすめることにする。この場合、期待現在価値の計算にあたって、よく知られた Black and Scholes(1973) あるいはリスク中立化法のいずれをも用いることは適切でない。なぜならば、物価が取引されていないことから、いずれの場合であっても、仮定を満たさないからである。本稿では、そのかわりに、Rubinstein(1976)による投資家の期待効用を最大にするような均衡オプション価格を導く方法を採用する。この方法を用いると、オプション価格のみならず、名目割引債(リスクフリーレート)と割引物価連動債の価格をも同時に導くことができる。

6.2.1 プライシング・カーネル

将来キャッシュフローを、時間価値とリスクを同時に考慮して現在価値に割り引くためには何らかの割引ファクターが必要になる。割引ファクターが確率的であるようなもの、つまりプライシング・カーネルを考え、状態変数として代表的投資家の消費が対数正規分布に従うとする。また、代表的投資家の効用関数がベキ型であるとする。

代表的投資家の消費：消費は負にならないので、消費に関し次のような幾何ブラウン運動に従う確率微分方程式を考える。

$$d\tilde{C}_t = \mu_c C_t dt + \sigma_c C_t d\tilde{W}_t^c \quad (32)$$

ここで μ_c は消費変化率の期待値であり、 σ_c はその

ボラティリティ(標準偏差)である。 $d\tilde{W}_t^c$ は消費の増分ブラウン運動を示し、標準正規分布する確率変数

を $\varepsilon_t^c \sim N(0,1)$ とすれば、 $d\tilde{W}_t^c = \varepsilon_t^c \sqrt{dt}$ と表すこ

とができる。伊藤の補題を用いてこの確率微分方程式を解くと、将来 T 期の消費水準は

$$\tilde{C}_T = C_0 \exp\left[\left(\mu_c - \frac{\sigma_c^2}{2}\right)T + \sigma_c \tilde{W}_T^c\right] \quad (33)$$

投資家の効用関数：消費に関するベキ型効用関数は

$$u(\tilde{C}_T) = \frac{1}{1-\lambda} \tilde{C}_T^{1-\lambda} \quad (34)$$

で示される。ここで λ はリスク回避度を示している。ベキ型効用関数は相対的リスク回避度が一定であるような特徴を有する。

プライシング・カーネル：将来キャッシュフローを時間価値とリスクの両面を考慮して現在価値に割り引くためのプライシング・カーネル M_T は、 β を効用に関する時間選好率とすると、

$$\tilde{M}_T \equiv \beta^T \frac{u'(\tilde{C}_T)}{u'(C_0)} = \beta^T \left(\frac{\tilde{C}_T}{C_0}\right)^{-\lambda} \quad (35)$$

と示される。ここで $u'(C_t)$ は消費の限界効用を示す。

つまり、将来キャッシュフローを現在価値に割り引

くためには、消費の限界代替率が重要な役割を示すことがわかる。式(33)の両辺を現在の消費水準 C_0 で割った結果を式(35)の右辺に代入し整理をすると、

$$\tilde{M}_T = \exp \left\{ T \ln \beta - \lambda \left(\mu_c - \frac{\sigma_c^2}{2} \right) T + \lambda \sigma_c \tilde{W}_t^c \right\} \quad (36)$$

を得る。

6.2.2 名目割引債価格

満期時に、その時の物価水準に関わらず 1 円を確実に払う割引国債(名目割引債)の現時点の価値は、式(36)のプライシング・カーネルを用いると、

$$\begin{aligned} Z_0^N(T) &= E_0^P \left[\beta^T \left(\frac{\tilde{C}_T}{C_0} \right)^{-\lambda} 1 \right] \\ &= 1 \exp \left\{ \left(\ln \beta - \lambda \left(\mu_c - \frac{\sigma_c^2}{2} \right) + \frac{\lambda^2 \sigma_c^2}{2} \right) T \right\} \end{aligned} \quad (37)$$

と表すことができる(導出に関しては**数学付録 A-1**を参照)。他方、名目割引債価格は将来 1 円の確定的な支払いを名目金利 i によって現在価値に引き戻したものの、つまり $Z_0^N(T) = \exp\{-i_T T\}$ と定義できるので、これと式(37)の右辺を比較することにより、名目金利は

$$i_T = -\ln \beta + \lambda \left(\mu_c - \frac{\sigma_c^2}{2} \right) - \frac{\lambda^2 \sigma_c^2}{2} \quad (38)$$

と表すことができる。つまり名目金利 i は、(1) β :

時間選好率、(2) μ_c : 消費の期待成長率、(3) σ_c^2 : 消費変化率の分散、(4) λ : 投資家の相対的リスク回避度によって説明できる。

6.2.3 割引物価連動債価格

額面がその時時の物価水準に連動する国債価格を求めるために、物価水準の変動が次のような確率微分方程式によって表現できるとしよう。

$$d\tilde{I}_t = \mu_I I_t dt + \sigma_I I_t d\tilde{W}_t^I \quad (39)$$

つまり物価水準 I_t は対数正規分布に従う。 μ_I は物価変化率の期待値であり、 σ_I はそのボラティリティ(標準偏差)を、

$d\tilde{W}_t^I$ は物価の増分ブラウン運動を示している。さらに、消費と物価には相関 ρ_{cI} があると考え

$$d\tilde{W}_t^c d\tilde{W}_t^I = \rho_{cI} dt \quad (40)$$

と定式化する。

式(39)の確率微分方程式を解くことにより現在と将来時点の物価変化率は、

$$\frac{\tilde{I}_T}{I_0} = \exp \left(\left(\mu_I - \frac{\sigma_I^2}{2} \right) T + \sigma_I \tilde{W}_T^I \right) \quad (41)$$

となるので、この結果とプライシング・カーネルを用いると、割引物価連動債価値は次のようになる(導出に関しては**数学付録 A-2**を参照)。

$$\begin{aligned} Z_0^R(T) &= E_0^P \left[\beta^T \left(\frac{\tilde{C}_T}{C_0} \right)^{-\lambda} \frac{\tilde{I}_T}{I_0} 1 \right] \\ &= \exp \{ (\mu_I - i_T - \lambda \rho_{cI} \sigma_c \sigma_I) T \} \end{aligned} \quad (42)$$

ここで r_T は物価連動債の T 期間の利回り、つまり T 期間実質利回りを、言い換えるならば実質金利を示すものとする。

6.2.4 リスクとリスク回避度を考慮した Fisher 方程式

式(42)の割引物価連動債価格は、 T 期間実質金利 r_T を用いると $Z_0^R(T) = \exp\{-r_T T\}$ と表現できるので、この結果と式(42)の右辺を比較すると、実質金利は

$$r_T = i_T - \mu_I + \lambda \rho_{cI} \sigma_c \sigma_I \quad (43)$$

となる。この式を名目金利に関して解くと、名目金利と実質金利との間の関係は

$$i_T = r_T + \mu_I - \lambda \rho_{cI} \sigma_c \sigma_I \quad (44)$$

で示される。この式は物価のシステムティックなリスク $\rho_{cI} \sigma_c \sigma_I$ とリスク回避度 λ を考慮した Fisher 方程式になっており、既を示した式(44)が**均衡モデル**として得られたことを示している。式(44)の右辺の第 1 項は実質金利であり、第 2 項は「期待インフレ率」である。第 3 項はリスク回避度と消費変化率と物価変化率の間の共分散を示している。つまり最後の項は物価変化に関するリスクプレミアムを表していると考えることができる。

相関係数の符号：データによる確認

注意すべき点は、相関係数の値に応じて、リスクプレミアムはプラス、マイナス、ゼロのいずれもの値を理論的に取りうることである。リスク回避度がプラスであると仮定すると、消費変化率と物価変化率の相関がマイナス、プラス、ゼロの値を取る場合、リスクプレミアム項は、それぞれマイナス、プラス、ゼロの値を取りうる。

物価と消費の成長率の相関がプラスであることは、消費リスクがヘッジされていることを意味している。これに対し、相関がマイナスであることは、物価が上昇しているときに消費を少なくしなければいけないことを意味している。したがって、名目金利は高くなければいけない。

相関係数の符号を実際のデータによって確認してみよう。生鮮食料品を除く物価の月次変化率と消費水準の月次指数変化率との間の相関は、

(1) 1980年1月から2015年4月では、 -0.2149

(2) 2010年1月から2015年4月では、 -0.4868 である。いずれであったても相関係数はマイナスの符号をとるので、リスクプレミアムは、リスク回避的な投資家にとっては、プラスの値をとるものと考えられる。

6.3 額面保証のある割引物価連動債

額面保証のある割引物価連動債の時点0における均衡価格決定は、式(31)の期待現在価値として次のようになる(導出に関しては**数学付録 A-3**)。

$$\begin{aligned} Z_0^C(T) &= e^{-i_T T} 1 + \left(\frac{1}{I_0}\right) E_0^P \left[\left(\beta^T \left(\frac{\tilde{C}_T}{C_0} \right)^{-\lambda} \text{Max} [\tilde{I}_T - I_0, 0] \right) \right] \\ &= Z_0^N(T) + \left(\frac{1}{I_0}\right) \left[e^{-\eta T} N(d_1) - e^{-i_T T} N(d_2) \right] \\ &= Z_0^N(T) + \left(\frac{1}{I_0}\right) \left[Z_0^R(T) N(d_1) - Z_0^N(T) N(d_2) \right] \\ &= Z_0^R(T) \left(\frac{1}{I_0}\right) N(d_1) + Z_0^N(T) \left(1 - \left(\frac{1}{I_0}\right) N(d_2) \right) \end{aligned} \quad (45)$$

$t=0$ における物価水準を $I_0=1$ と基準化すると、標準正規分布は平均ゼロに関して対照であることから、

結果は次のようにより簡単になる。

$$Z_0^C(T) = Z_0^R(T) N(d_1) + Z_0^N(T) N(-d_2) \quad (46)$$

ここで、

$$\begin{aligned} d_1 &\equiv \frac{1}{\sigma_I \sqrt{T}} \left(\left((i_T - r_T) + \frac{\sigma_I^2}{2} \right) T \right) \\ &= \frac{1}{\sigma_I \sqrt{T}} \left(\ln \left(\frac{Z_0^R(T)}{X_0^N(T)} \right) + \frac{\sigma_I^2 T}{2} \right) \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} d_2 &\equiv \frac{1}{\sigma_I \sqrt{T}} \left(\left((i_T - r_T) - \frac{\sigma_I^2}{2} \right) T \right) \\ &= \frac{1}{\sigma_I \sqrt{T}} \left(\ln \left(\frac{Z_0^R(T)}{X_0^N(T)} \right) - \frac{\sigma_I^2 T}{2} \right) \end{aligned} \quad (48)$$

であり、 $Z_0^R(T)$ は式(42)で示された額面保証のない

割引物価連動債の価値であり、 $Z_0^N(T)$ は式(37)で示

された名目割引債の価値である。また $N(\bullet)$ は標準正規分布の分布関数である。これらの結果から得られる興味深い性質として次のような点があげられる

6.3.1 額面保証のある割引物価連動債は名目割引債と割引物価連動債によって「合成」可能

式(45)の最後の結果からわかるように、額面保証のある割引物価連動債は、(1)右辺の第1項で示される $Z_0^R(T)$ 円している保証のない割引物価連動債を

$1/I_0 N(d_1)$ 単位購入し同時に、(2)第2項で示され

る $Z_0^N(T)$ 円している名目割引債を

$(1 - (1/I_0) N(d_2))$ 単位購入することにより合成で

きる。言い換えるならば、額面保証債を新たに発行する必要はない。投資家は、名目割引債と保証のない割引物価連動債を国債市場で購入することによって、額面保証付きの物価連動債をつくりだすことができる¹¹。

¹¹ この点はブラック・ショールズモデルが示す帰結と同じことである。ブラック・ショールズモデルは、ヨーロピアンコール(あるいはプット)オプションが、原資産と安全資産で合成できることを示しているからである。言い換え

るならば、オプションは「無駄な資産(Redundant Asset)」である。しかしながら、日経225オプション市場のように実際のオプション市場ではオプションが活発に取引されている。こうしたパラドックスについての議論は、例えば

6.3.2 リスク中立評価(RNVR)と均衡モデル

式(45)の3行目の $e^{-rT}N(d_1) - e^{-rT}N(d_2)$ は

Bodie(1990)の示した「インフレ保険」価値と同様であるが、その経済的含意に関しては顕著な違いがある。このモデルにおいては、名目割引債と保証のない割引物価連動債、言い換えるならば、実質金利と名目金利は、Bodie(1990)とは異なり、式(43)と式(38)を通じて内生的に決定される。それらは、実質金利と名目金利は消費に関する予想(μ_c)やそのボラティリティ(σ_c)、リスク回避度(λ)、消費と物価の共分散(σ_{cl})、期待インフレ率(μ_l)やそのボラティリティ(σ_l)などの関数である。したがって、これらの値が変化した時の割引債や割引物価連動債の価値評価、インフレヘッジ戦略などを考えることができる。

6.3.3 デフレ確率とインフレ確率の推定

式(46)の右辺の $N(-d_2)$ は、 d_2 を期待 μ_l やリスク

回避度 λ 、システマティックリスク σ_{cl} の関数として表現した場合、将来 T 年後にデフレになる「実」確率を表している。(導出については数学付録 A-4 を参照)。

$$d_2 \equiv \frac{1}{\sigma_l \sqrt{T}} \left(\left(\mu_l - \left(\lambda \rho_{cl} \sigma_c \sigma_l + \frac{\sigma_l^2}{2} \right) \right) T \right) \quad (49)$$

この結果はまた、式(48)の最後の式で示されているように、市場で取引されている割引債と割引物価連動債の価格で表現できる。この場合のデフレ確率は、期待やリスク回避度を含まないことから、リスク中立的なデフレ確率を意味している。

6.4 実証研究の可能性

日本の物価連動債は名目国債と異なり元本およびクーポン部分の分離(Strip)が行われていない。そのため、これまでに述べた方法で、割引物価連動債としてのクーポンと元本の市場価格から期待やリスク回避度などの推定を行うことができない。しかし、クーポン債は割引債のポートフォリオであることから、

クーポン支払いのある物価連動債の価格モデルを用いてパラメータの推定を行うことが可能になる。残存年数が T_j 、クーポンレートが c_j の i 番目の物価連動債の市場価格は、2つの割引債価格を毎期のクーポン支払額 $c_j F$ と満期の額面とで加重平均した

$$B_j(0, T_j) = c_j F \sum_{n=1}^{T_j} Z_0^R(n) + F Z_0^C(T_j) \quad (50)$$

として表される。ここで、 $Z_0^R(n)$ は式(42)で示された残存期間が n 期間の割引物価連動債価格であり、 $Z_0^C(T_j)$ は式(45)で示された元本保証のある割引物価連動債の価格である。

この結果から、元本保証のある物価連動債価格をきめるパラメータの推定は次のような方法に基づいて可能である。

方法1：物価連動債の市場価格のみを用いる方法

(1) 現在市場で取引されている $j=1, 2, \dots, N$ 銘柄の

残存期間 T_j 、クーポンレート c_j を確認し、現在時点における物価連動債の市場価格 $B_j(0, T_j)$ を得る。ただし、元本は $F=100$ 円とする。

(2) 市場価格が意味する割引係数 β 、期待消費変化

率 μ_c とそのボラティリティ σ_c 、期待インフレ

率 μ_l とそのボラティリティ σ_l 、リスク回避度 λ 、

相関係数 ρ_{cl} の7つのパラメータ推定値を非線形の最小二乗法を用いて得る。

さらに式(46)の右辺の $N(-d_2)$ で示される T 年後

のデフレ確率もこれらの推定パラメータから計算できる。しかし、現在、日本の国債市場で取引されている物価連動債の銘柄は第10回から第21回のわずかに11銘柄にすぎないため実際には安定的したパラメータの推定は困難である。

方法2：物価連動債と名目割引債の市場価格を用い

Livnat and Zhang(2012)を参照のこと。

る方法

名目国債は元本とクーポンの分離が行われておりその取引がおこなわれている。そのため、残存期間 n が異なる多数の名目割引債の市場価格 $Z_0^N(n)$ を得ることができる。物価連動債 11 銘柄の市場価格に加え、これらの名目割引債の市場価格からなる標本と、式 (37) に示された名目割引債の価格式と式 (45) の物価連動債価格式を用いて、より安定的なパラメータ推定値を得ることができよう。

7. 要約と結論

クーポン支払いが物価に連動し、かつ元本に関してデフレ保証があるような物価連動債について、(1) その内外における制度的な枠組みについて展望を行うとともに、(2) 物価連動債価格から導かれる均衡 Fisher 方程式をもとにしてその経済的な含意を議論した。物価が資本市場で取引されていないこと、また物価連動債の取引が市場で活発でないことから、元本保証のある物価連動債の価格を、リスク中立的評価でなく、投資家のベキ型効用関数を最大にすることから導かれる均衡価格として求めた。また均衡価格に内容されている将来のデフレとインフレ確率をどのように計算できるか、実際の名目割引債と物価連動債の市場価格から投資家の抱く将来の期待インフレ率やそのボラティリティ、消費と物価の間の相関、リスク回避度などの推定できることを、現在の国債市場の現状を踏まえた上で、議論した。

今後は、ここで示したような方法に基づく実証研究を行うとともに、実証結果に基づき日本銀行のインフレ目標率、マイナス金利政策などについての議論を深めることが必要となろう。

数学付録

数学付録 A-1: 名目割引債価格

$\tilde{Y} \equiv \beta^t (C_t / C_0)^{-\lambda}$ であるときに $\tilde{Y} = e^{\tilde{y}}$ であり、

かつ $\tilde{y} \equiv t \ln \beta - \lambda \left(\mu_c - \frac{1}{2} \sigma_c^2 \right) t + \lambda \sigma_c \tilde{W}_t^C$ であるので
正規分布の積率母関数を用いると、

$$\begin{aligned} Z_0^N &= E_0^P \left[\beta^t \left(\frac{\tilde{C}_t}{C_0} \right)^{-\lambda} 1 \right] = E_0^P [\tilde{Y}] = E_0^P [e^{\tilde{y}}] \\ &= \exp \left\{ E_0^P [\tilde{y}] + \frac{1}{2} \text{Var}(\tilde{y}) \right\} \\ &= \exp \left\{ t \ln \beta - \lambda \left(\mu_c - \frac{1}{2} \sigma_c^2 \right) t + \frac{1}{2} \lambda^2 \sigma_c^2 t \right\} \end{aligned}$$

名目金利は割引国債の利回り i_t であり、割引国債と

その利回りとの間の関係は、 $Z_0^N(T) = \exp(-i_t T)$ と

定義されるので、これら 2 つの結果を比較することにより、名目金利は

$$i_t = -\ln \beta + \lambda \left(\mu_c - \frac{1}{2} \sigma_c^2 \right) - \frac{1}{2} \lambda^2 \sigma_c^2$$

とあらわすことができる。

数学付録 A-2: 割引物価連動債価格

$X \equiv I_T / I_0$ かつ $X = e^{\tilde{x}}$ であり、更に、

$$\tilde{x} \equiv \left(\mu_I - \frac{1}{2} \sigma_I^2 \right) T + \sigma_I \tilde{W}_T^I, \quad \tilde{W}_T^I = \tilde{\varepsilon}_T^I \sqrt{T}$$

であるので、2 変量正規分布の積率母関数を用いると、

$$\begin{aligned} Z_0^R &= E_0^P \left[\beta^t \left(\frac{\tilde{C}_t}{C_0} \right)^{-\lambda} \frac{\tilde{I}_t}{I_0} \right] \equiv E_0^P [\tilde{Y} \tilde{X}] = E_0^P [e^{\tilde{y}} e^{\tilde{x}}] \\ &= E_0^P [e^{\tilde{y} + \tilde{x}}] = \exp \left(E(x + y) + \frac{1}{2} \text{Var}(x + y) \right) \\ &= \exp \left\{ \mu_y + \mu_x + \frac{1}{2} (\sigma_y^2 + 2\sigma_{yx} + \sigma_x^2) \right\} \\ &= \exp \left\{ \left(\mu_y + \frac{1}{2} \sigma_y^2 \right) + \mu_x + \frac{1}{2} \sigma_x^2 + \sigma_{yx} \right\} \\ &= \exp \left\{ -i_t t + \left(\mu_I - \frac{1}{2} \sigma_I^2 \right) t + \frac{1}{2} \sigma_I^2 t - \lambda \sigma_c \sigma_I \rho_{CI} t \right\} \\ &= \exp \left\{ (\mu_I - i_t - \lambda \sigma_{CI}) t \right\} \end{aligned}$$

他方、実質金利は $Z_0^R(T) = \exp(-r_t T)$ と定義される

ので、 $r_t = i_t - \mu_I + \lambda \rho_{CI} \sigma_c \sigma_I$ と表現できる。

数学付録 A-3: 額面保証のある割引物価連動債価格

式(45)の 1 行目右辺第 2 項の物価に関するコール

$$\text{オプション価値、} E_0^P \left[\beta^T \left(\frac{\tilde{C}_T}{C_0} \right)^{-\lambda} \text{Max} [\tilde{I}_T - I_0, 0] \right]$$

は、すでに定義した2つの確率変数 X と Y を用いると次のように表現できる。

$$\begin{aligned} P_0^G &= E_0^P \left[\beta^T \left(\frac{\tilde{C}_T}{C_0} \right)^{-\lambda} \text{Max} [\tilde{I}_T - I_0, 0] \right] \\ &= I_0 E_0^P \left[\beta^T \left(\frac{\tilde{C}_T}{C_0} \right)^{-\lambda} \text{Max} \left[\frac{\tilde{I}_T}{I_0} - 1, 0 \right] \right] \\ &= I_0 E_0^P [\tilde{Y} \text{Max} [\tilde{X} - 1, 0]] \\ &= I_0 \left(E_0^P [\tilde{Y} \tilde{X} | \tilde{X} > 1] - E_0^P [\tilde{Y} | \tilde{X} > 1] \right) \\ &= I_0 \left(E_0^P [e^{\tilde{y}} e^{\tilde{x}} | e^{\tilde{x}} > 1] - E_0^P [e^{\tilde{y}} | e^{\tilde{x}} > 1] \right) \\ &= I_0 \left(E_0^P [e^{\tilde{y} + \tilde{x}} | \tilde{x} > 0] - E_0^P [e^{\tilde{y}} | \tilde{x} > 0] \right) \\ &= I_0 \left(E_0^P [e^{\tilde{y} + \tilde{x}}] \Pr(\tilde{x}''' > 0) - E_0^P [e^{\tilde{y}}] \Pr^P(\tilde{x}'' > 0) \right) \\ &= I_0 \left(\exp\{(\mu_I - i_t - \sigma_{CI})T\} N(d_1) - \exp\{-i_t T\} N(d_2) \right) \\ &= I_0 (Z_0^R N(d_1) - Z_0^N N(d_2)) \end{aligned}$$

この結果を式(45)の1行目右辺第2項に代入すれば、式(45)の最後の行、すなわち元本保証の価値を得ることができる。ただし、6行目から7行目への導出に当たっては確率変数 x と y が2変量正規分布に従うときの部分積率母関数の公式を用いた。

補題 Rubinstein(1976)、Winkler, Roodman, and Britney.(1972)

$$\begin{aligned} &E_0^P [e^{\tilde{y}} | \tilde{x} > a] \\ &= E_0^P [e^{\tilde{y}}] \Pr^P(\tilde{x}'' > a) \\ &= \exp\left\{ \mu_y + \frac{\sigma_y^2}{2} \right\} N\left(\frac{-a + (\mu_x + \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y)}{\sigma_x} \right) \end{aligned}$$

ここで、 $\tilde{x}'' \sim N(\mu_x + \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y, \sigma_x^2)$ であり、かつ

$$\begin{aligned} &E_0^P [e^{\tilde{x} + \tilde{y}} | \tilde{x} > a] \\ &= E_0^P [e^{\tilde{x} + \tilde{y}}] \Pr^P(\tilde{x}''' > a) \\ &= \exp\left\{ \mu_y + \frac{\sigma_y^2}{2} \right\} \exp\left(\mu_x + \frac{1}{2} (\sigma_x^2 + 2\rho_{xy} \sigma_x \sigma_y) \right) \end{aligned}$$

ここで $\tilde{x}''' \sim N(\mu_x + (\sigma_x^2 + \rho_{xy} \sigma_y \sigma_x), \sigma_x^2)$ 。

これから、

$$\begin{aligned} \Pr(\tilde{x}''' > 0) &= N\left(\frac{-0 + (\mu_x + \sigma_x^2 + \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y)}{\sigma_x} \right) \\ &= N\left(\frac{(\mu_I - \frac{1}{2} \sigma_I^2)T + \sigma_I^2 T - \lambda \sigma_c \sigma_I \rho_{CI} T}{\sigma_I \sqrt{T}} \right) \\ &\equiv N(d_1) \end{aligned}$$

を導くことができる。

また A-2 の実質金利の定義より、上の d_1 に関し、次の結果を導くことができる。

$$\begin{aligned} d_1 &\equiv \frac{1}{\sigma_I \sqrt{T}} \left((i_t - r_t) + \frac{\sigma_I^2}{2} \right) T \\ &= \frac{1}{\sigma_I \sqrt{T}} \left(\ln \left(\frac{Z_0^R(T)}{Z_0^N(T)} \right) + \frac{\sigma_I^2 T}{2} \right) \end{aligned}$$

この d_1 は投資家の期待やリスク回避度に依存していないが、それらは名目割引国債や実質割引国債の中に隠れている。 d_2 に関しても同様にして求めることができる。

数学付録 A-4: デフレ確率は $N(-d_2)$ で示される。

$$\begin{aligned} &\Pr(\tilde{I}_T \leq I_0) \\ &= \Pr(\tilde{I}_T''' \leq I_0) = \Pr(\ln \tilde{I}_T''' \leq \ln I_0) \\ &= \Pr\left(\ln I_0 + \left(\mu_I - \lambda \sigma_{CI} - \frac{\sigma_I^2}{2} \right) T + \sigma_I \tilde{\varepsilon}_T^I \sqrt{T} \leq \ln I_0 \right) \\ &= \Pr\left(\tilde{\varepsilon}_T^I \leq -\frac{1}{\sigma_I \sqrt{T}} \left(\left(\mu_I - \lambda \sigma_{CI} - \frac{\sigma_I^2}{2} \right) T \right) \right) = N(-d_2) \end{aligned}$$

ここで

$$d_2 \equiv \frac{1}{\sigma_I \sqrt{T}} \left(\left(\mu_I - \lambda \sigma_{CI} - \frac{\sigma_I^2}{2} \right) T \right)$$

であるが、 d_1 と同様、実質と名目の割引国債とを用いて、投資家のリスク回避度や期待などに依存しない

い形で表現することができる。

参考文献

1. Brynjolfsson, John, and Frank J. Fabozzi, eds (1999). *Handbook of inflation indexed bonds*. Vol. 44. John Wiley & Sons.(米澤康博監訳、三井アセット信託銀行公的年金運用研究会訳(2003)『インフレ連動債ハンドブック』東洋経済新報社)
2. Black, Fischer (1976). “The Pricing of Commodity Contracts.” *Journal of Financial Economics* 3.1: 167-179.
3. Black, Fischer, and Myron Scholes (1973). “The Pricing of Options and Corporate Liabilities.” *The Journal of Political Economy* 81.3: 637-654.
4. Bodie, Zvi (1990). “Inflation Insurance.” *Journal of Risk and Insurance* 57.4: 634-645.
5. Campbell, John Y., Robert J. Shiller, and Luis M. Viceira (2009). “Understanding Inflation-Indexed Bond Markets.” *Brookings Papers on Economic Activity* 79.1: 79-120.
6. Christensen, Jens HE, Jose A. Lopez, and Glenn D. Rudebusch (2014). “Pricing Deflation Risk with US Treasury Yields.” Working Paper. Federal Reserve Bank of San Francisco.
7. D'Amico, Stefania, Don H. Kim, and Min Wei (2014). “Tips from TIPS: the Informational Content of Treasury Inflation-Protected Security prices.” FEDS Working Paper No. 2014-24.
8. Dudley, William, Jennifer E. Roush, and Michelle Steinberg (2009). “The Case for TIPS: an Examination of the Costs and Benefits.” *Economic Policy Review* 15.1. Federal Reserve Bank of New York.
9. Evans, Martin D. D(1998). “Real Rates, Expected Inflation, and Inflation Risk Premia.” *The Journal of Finance* 53.1: 187-218.
10. Falbo, Paolo, Francesco M. Paris, and Cristian Pelizzari (2010). “Pricing Inflation-Linked Bonds.” *Quantitative Finance* 10.3: 279-93.
11. Foresi, Silverio, Alessandro Penati, and George Pennacchi (1997). “Estimating the Cost of U.S. Indexed Bonds.” FRB of Cleveland Working Paper No. 9701.
12. Formica, Andrew, and Geoffrey Kingston (1991). “Inflation Insurance for Australian Annuitants.” *Australian Journal of Management* 16.2: 145-63.
13. Grishchenko, Olesya V., Joel M. Vanden, and Jianing Zhang (2012). “The Information Content of the Embedded Deflation Option in TIPS.” *FEDS Working Paper* No. 2013-24.
14. Haubrich, Joseph, George Pennacchi, and Peter Ritchken (2012). “Inflation Expectations, Real Rates, and Risk Premia: Evidence from Inflation Swaps.” *Review of Financial Studies* 25.5: 1588-1629.
15. IMF (1997). “The Rationale and Design of Inflation-indexed Bonds” (prepared by Robert Price). *IMF Working Paper* No. 97/12.
16. Jin, Wen, Joshua Livnat, and Yuan Zhang (2012). “Option Prices Leading Equity Prices: Do Option Traders Have an Information Advantage?” *Journal of Accounting Research* 50.2: 401-432
17. Kitsul, Yuriy, and Jonathan H. Wright (2013). “The Economics of Options-implied Inflation Probability Density Functions.” *Journal of Financial Economics* 110.3: 696-711.
18. Lioui, Abraham, and Patrice Poncet (2005). “General Equilibrium Pricing of CPI Derivatives” *Journal of Banking and Finance* 29.5: 1265-94.
19. Mercurio, Fabio (2005). “Pricing Inflation-indexed Derivatives.” *Quantitative Finance* 5.3: 289-302
20. Pennacchi, George G. (1991). “Identifying the Dynamics of Real Interest Rates and Inflation: Evidence Using Survey Data.” *Review of Financial Studies* 4.1: 53-86.
21. Rubinstein, Mark. (1976). “The valuation of uncertain income streams and the pricing of options.” *The Bell Journal of Economics* 7.2: 407-425.
22. Smith, Tom (2012). “Option-implied Probability Distributions for Future Inflation.” *Bank of England Quarterly Bulletin*. Q3.
23. Winkler, Robert L., Gary M. Roodman, and Robert R. Britney (1972). “The Determination of Partial Moments.” *Management Science* 19 (3): 290-96.
24. Wright, Jonathan H. (2009). “Comment on Understanding Inflation-Indexed Bond Markets.” *Brookings Papers on Economic Activity*. Spring. 126-138.
25. Wu, Lixin (2012). “A New Paradigm for Inflation Derivatives Modeling.” *Derivative Securities Pricing and Modelling* 94:305.
26. 北村行伸 (2010)「国債の経済学再考—物価連動債に関する市場の動向と政策対応を中心に—

- 」『証券アナリストジャーナル』第48巻第3号、28-37、日本証券アナリスト協会
27. 黒田東彦（2013）「日本の非伝統的金融政策と国際金融システム安定に向けた取り組み」カンザスシティ連邦準備銀行主催シンポジウム（米国ワイオミング州ジャクソンホール）講演、日本銀行
28. 財務省（2013）「特集 脱デフレ期待で順調にスタート 物価連動国債が5年ぶりに発行再開」『ファイナンス』平成25年11月号、3-10、財務省
29. 財務省（2015）「債務管理レポート2015－国の債務管理と公的債務の現状－」
30. 森平爽一郎・湯山智教（2015）「物価連動債の元本保証：そのオプション価値」日本リアルオプション学会2015年研究発表大会報告
31. 湯山智教・森平爽一郎（2017）「リスクプレミアムを勘案した市場における期待インフレ率の抽出について」『現代ファイナンス』（掲載予定）MPTフォーラム・日本ファイナンス学会