変動環境下における植物生長のカオス性

平藤 雅之・窪田 哲夫

農林水産省農業研究センター

Chaos of Plant Growth under Changing Environment

Masayuki HIRAFUJI and Tetsuo KUBOTA

National Agriculture Research Center, Tsukuba 305, Japan

It has been said that response of plants to environment is irregular and complicated. We have intuitively attributed the reason to complexity of living systems. In nonlinear systems, however, complex phenomena can be generated by simple rules. They are called chaos. So we examined whether irregular response of photosynthetic rate and growth rate are chaos. To measure accurately as many data as possible, six environmental factors were controlled in a small growth chamber. Air temperature, humidity, CO₂ concentration and air pressure were changed by a computer while PAR (photosynthetically active radiation) and wind speed were kept constant. Photosynthetic rate and growth rate (measured by the diameter of the stem) were recorded as a function of time and chaotic nature of the time series data were analyzed. By calculating the correlation dimension, response of photosynthetic rate was identified as chaos. The correlation dimension of photosynthetic rate was 2.7 ± 0.4 and that of growth rate was larger than ~ 4.5 .

Moreover to examine the chaotic nature of photosynthetic rate, predictions by four different models were compared. Two of the models are nonlinear models developed with neural networks and two are linear regression models. The models predict photosynthetic rate using four different environmental factors. One linear model and one nonlinear model included a factor of delay, which is represented by a variable of actual photosynthetic rate in one past step. Only the nonlinear model which included the factor of delay could predict unknown test samples well. No other models generated irregular patterns of photosynthetic rate. Therefore we concluded that photosynthetic rate behaves chaotically. Although we cannot forecast plants' response far into the future because of the chaotic nature, we can expect to control the growth by very few energy based on orbital instability of chaos.

(Received August 12, 1993)

1993年8月12日受付

序 論

光合成速度や生長速度は、植物の生育を制御する際の評価関数として広く利用されている。光合成などの生体内代謝には非常に多くの要素が関係し、未知の要素も多く残されている。当然、そのモデルは非常に複雑なものになり、未知のパラメータが数多く含まれている^{1,2)}。そのため、光合成速度を直接計測して最適条件を探索する方法が試みられている³⁾。しかし探索空間が広く、探

索速度は植物の生理的応答時間に律速されているため、大域的最適状態を発見することは難しい。

さらに別の方法として、測定データを使ってモデルを同定しながら最適条件を探索する方法が考えられるが、環境条件と植物の光合成速度、生長速度（茎径の変化率で代表）の関係には複雑な非線形関係があるため、モデルを同定するためには短時間にできるだけ多くの情報を得ることが問題となる。

著者らは、このような観点から種々の環境条件下でできる限り多くのサンプルを得るための実験を試みた。と

ころが、得られたデータには種々の不規則な変化が多数観測された。非線形系では、構造が複雑でも全体としては単純な挙動を示す場合や、逆にカオスのように単純なシステムがランダムにみえるほど複雑な変化を生成する場合がある⁴⁾。そこで、観測された不規則な変化がカオスであるかどうかを解析した。さらに光合成速度については、非線形モデルによる予測結果と線形モデルの予測結果を比較し、カオス性の検証とモデルの予測可能性の検討を行った。

カオス性の判定手法

1. 測定値による判定

気象⁵⁾(Navier-Stoks 方程式)や生態系での個体数変化⁶⁾(Logistic 写像, Lotka-Volterra 方程式)のように支配方程式が既知の場合、カオス性の判定は容易であり、これらがカオスであることはかなり以前から知られている。最近では時系列データに対しても適用可能な方法がいくつか提案され、脳波⁷⁾、心臓の心拍数のゆらぎ⁸⁾、経済循環や株価変動⁹⁾などの現象もカオスであることが指摘されている。これらの時系列データに対する判定方法には、主として次のようなものが利用されている¹⁰⁾。

3次元以下のカオスでは、① 時系列データを適当な空間に埋め込んでストレンジアトラクタの存在を調べる方法、② ポアンカレリターンマップの自己相似性を調べる方法などがある。高次元のカオスの場合はこれらの方法は適用しがたいことが多いため、③ 相関次元や、④ 最大リアプノフ数を用いる方法がしばしば利用されている。また、⑤ カオスを生成するメカニズムのモデルを観測データから同定して決定論的生成過程の存在証明を行う、という方法がある。

観測によって得られた時系列データを使った判定では、つねに統計学的な不確実性が伴っている。そのため異なる判定法を併用して、判定の信頼性を高める必要がある。ここでは、手法的に大きく異なる ①、③、⑤ をカオス性の判定に用いることにした。

2. 相関次元の計算法

Takens¹¹⁾によると、高次元力学系の軌道は任意に選んだ一つの次元の情報だけから再構成できる。たとえば光合成系が多数の独立な変数から構成されていても、測定が容易な一つのパラメータ(たとえば光合成速度)に関するデータだけから光合成系全体の特性を知ることができる。

もとの高次元系の特性を1次元の時系列データから解析するために、まず時刻 t における観測値 $x(t)$ 、および観測時刻が $\tau, 2\tau, \dots, (d-1)\tau$ だけずれた d 個のサ

ンプルを用いて d 次元ベクトル、

$$\phi_d(t) = (x(t), x(t+\tau), \dots, x(t+(d-1)\tau)) \quad (1)$$

を作成する (d は埋め込み次元とよばれる)。このとき系の相関次元 D は $\{\phi_d(t) | t=1, 2, \dots, n\}$ を使って、以下の方法で求めることができる¹²⁾。

まず d 次元データの D_d を次式によって計算する。

$$D_d = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log C(r)}{\log r} \quad (2)$$

ここで $C(r)$ は、

$$C(r) = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j} H(r - |\phi_d(i) - \phi_d(j)|) \quad (3)$$

で定義され、相関積分とよばれている。 H は Heviside の階段関数で、

$$H(\eta) = \begin{cases} 1 & (\eta \geq 0) \\ 0 & (\eta < 0) \end{cases} \quad (4)$$

である。

異なる d について D_d が一定値 D になったとき、 D が相関次元である。ただし、常に $D_d \leq d$ になるため、 D よりも十分大きな d で D_d が一定になる必要がある。具体的には、 r と $C(r)$ を座標軸とした両対数グラフ上で十分大きな d について $C(r)$ をプロットしたとき、グラフが直線領域を有し、異なる d のグラフが平行であれば相関次元が存在する。そして、相関次元 D は傾きから求められる。

$C(r)$ は $\{\phi_d(t)\}$ が分布する d 次元空間において2点間の距離が r 以内にある点の個数の累積分布関数であり、 D_d はその分布の特徴を表すパラメータである。 d と r の変化に対して D_d が一定であれば、もとの高次元系にはスケール変換に対する自己相似性が存在する。したがって相関次元が存在すれば、その現象はランダムではなくカオスであると判定される。

τ の選び方は任意であるが、 τ があまりに小さいと $\{\phi_d(t)\}$ の要素間の相関が大きくなってしまふ。逆に大きすぎるとノイズの影響がでてくる。ここでは自己相関関数の絶対値を極小にする値のうち、最小の値を τ として用いることにする。

実 験

1. 実験方法

温度、相対湿度、気圧、光、 CO_2 濃度を制御することができるグロースチャンバーを用いて植物を長期間栽培し、環境変化に対する応答を連続計測した。供試植物はメロン (*Cucumis melo* var. *reticulatus*, 品種: アールセイヌ夏Ⅱ) である。

まずグロースチャンバー外で小型水耕ポットに種子を

Table 1 Ranges of different environmental factors.

Environmental factor	Range
Air temperature	13-40 [°C]
Relative humidity	35-90 [%]
CO ₂ concentration	30-1000 [ppm]
Air pressure	0.1-0.13 [MPa]

Each environmental factor was changed according to patterns shown in Fig. 1.

播種し、人工光下で育成した。レーザー外径測定器による茎径測定が可能になるサイズ（本葉が2枚程度になったとき）にまで生長したところで、水耕ポットごとグロースチャンパー内に設置し、以後、本実験を含む約3カ月の間、完全密閉状態で連続的に栽培した。その間、水耕液はチャンパー外から約3～7日間隔で密閉状態を維持したまま交換した。

測定項目は、CO₂の消費量から求めた見かけの光合成速度、レーザー外径測定器で計測した茎の根元直径、熱電対で計測した葉裏面の表面温度などである。

グロースチャンパー内に設置した日を基準日として、24日目から55日目までの31日間、温度、相対湿度、CO₂濃度、気圧の順に変化させ、そのときの植物の生理的応答を測定した。これらのパラメータは、Table 1の範囲で変化させた。

環境条件を変化させると植物の状態が変化するため、その影響を受けてグロースチャンパー内のCO₂濃度、相対湿度、気温も多少変化する。カオス系の場合、この過渡応答にも重要な情報が含まれている可能性が高い

が、これには実験系の過渡特性も影響していると考えられるため、本研究では利用しない。このような過渡応答の影響を減らすのと同時に限られた期間にできるだけ多数のサンプルを得るため、次のように実験系を制御した。

① 環境条件を変える。

② CO₂濃度、相対湿度、気温が安定するのを待つ（CO₂濃度の変動幅が5.0 ppm以内、露点温度および気温の変動幅が0.5°C以内になったとき安定したとみなす）。

③ 10分間同じ環境条件を維持し、最後の5分間の計測値の平均を記録する。200分を経過しても安定しない場合は最後の5分間の平均値を記録する。

④ ①から繰り返す。

茎径の時系列データ $R(t)$ ($t=1, 2, \dots$) から生長率に相当する値 $\dot{R}(t)$ を計算するため、

$$\dot{R}(t) = \frac{R(t) - \bar{R}(t)}{\bar{R}(t)} \quad (5)$$

$$\bar{R}(t) = \frac{1}{10} \sum_{i=0}^9 R(t-i) \quad (6)$$

とした。さらに $\{\dot{R}(t)\}$ が0～1の範囲になるように正規化し、この値を生長速度 $R_g(t)$ として用いることにした。

2. 実験結果

各環境パラメータは、ほとんどの場合で20～120分以内に安定に達し、最頻値として約30分ごとに一つのサンプルが得られていた。水耕液の交換などのメンテナンス時には、その影響が完全になくなったとみなせるまで同一環境条件を長時間継続した。

Fig. 1に測定された各変数の変化の様子を示す。このグラフの横軸は時系列データのサンプル番号である。環

Fig. 1 Changing patterns of environmental factors and the response of photosynthetic rate and growth rate measured by the diameter of the stem. Vertical range of the graphs are normalized. The actual range of environmental factors are shown in Table 1.

Fig. 2 Measured data show complex trajectories.

The points of measured samples are connected by lines to show time dependency.
 (a) T/Normalized Photosynthetic Rate as a function of temperature. (b) T/Normalized Growth Rate as a function of temperature.

環境条件に対する光合成速度の応答は不規則的であり、なぜかグラフの前半部分が後半部分よりも複雑である。

Fig. 2 (a) は、測定で得られたデータ (Fig. 1 のデータ) を温度-相対光合成速度の平面でプロットした軌道図である。また、Fig. 2 (b) は温度-茎径の生長速度の平面でプロットした軌道図である。Fig. 2 (a), (b) をみる

と、環境変化に対する植物個体の応答はどれも複雑であり、グラフから明確な法則性を見いだすことは困難である。

Fig. 3 は観測された光合成速度の値を気圧ごとにプロットしたグラフである。ばらつきが非常に大きく、単純な傾向はまったく見いだせない。

Fig. 3 Distribution of normalized photosynthetic rate under different air pressure conditions.

The patterns of distribution are scattered irregularly because of differences in other environmental factors and time dependency of photosynthetic rate.

測定値の平均から大まかな傾向を見いだす方法がしばしば用いられるが、Fig. 2 (a) では一部に上に凸の放物線状のパターンがあり、この部分に着目して平均化すれば温度-光合成の特性に関する既往の知見¹³⁾と同様の規則が見いだされる。この方法では平均的傾向からはずれた変化（ゆらぎ）をノイズとして扱うことになり¹⁴⁾、また Fig. 3 のように単純な傾向が見いだせないデータでは、ほとんどすべてをノイズとして扱わざるをえない。

しかし、これらのゆらぎがすべてノイズに帰着できるほど実験条件や測定精度が不安定であったとは考えにくい。そこで以下では、このゆらぎの解析を行う。

カオス性の解析

1. ストレンジアトラクタの観察

光合成速度 $P(t)$ および生長速度 $R_g(t)$ の自己相関関数の絶対値が極小になる点はともに $\tau=3$ のときで、相関値はそれぞれ 0.028 および 0.105 であった（すなわち、3 ステップだけシフトした時系列データとの相関が最も小さい）。Fig. 4 (a) は相関が最も小さい $P(t)$, $P(t+3)$ をそれぞれ x 座標, y 座標としてプロットした 2 次元の相軌道図である。また、Fig. 4 (b) は、同様に $R_g(t)$, $R_g(t+3)$ を x 座標, y 座標としてプロットした相軌道図である。

Fig. 4 (a) にはストレンジアトラクタとよばれる空間的に偏った分布構造を持つパターンが現れている。このことから、光合成速度の変化は比較的低次元のカオスと

Fig. 4 Orbits of time series data shown in a two dimensional phase space.

Horizontal axis is the value of sample number (t) and the vertical axis is the value on a shifted sample number ($t+3$). Photosynthetic rate should be low dimensional chaos, because orbit of photosynthetic rate shows a simple strange attractor. Orbit of growth rate is very complex, so growth rate may be higher dimensional chaos. (a) Photosynthetic rate. (b) Growth rate.

推測される。一方、Fig. 4 (b) では、中央部が密集した対称的な分布構造になっている。この図から、生長速度のゆらぎがカオスであるのかランダムな変動であるのかの区別はできない。しかし光合成速度がカオスであるとすれば生長速度もカオスである可能性が高く、生長速度のゆらぎは高次元のカオスである可能性が高い。

2. 相関次元によるカオス性の判定

次に、 $P(t)$ および $R_g(t)$ を用いて相関次元によるカオス性の判定を行った。

サンプル数 N が多いほど相関次元の推定値 D の信頼性は高まる。しかし D が大きいと非常に多くのサンプルが必要とされ、その目安として、

$$D \leq 2 \log_{10} N \quad (7)$$

という条件がある¹⁵⁾。以下の解析に用いたサンプル数（光合成速度：498 個，生長速度：489 個）では、 $D < 6$ 程度までの D は計算できる（ただし D が大きいと計算結果の信頼性は低くなる）。

Fig. 5 (a) は、光合成速度の時系列データを用いて、 $\tau=3$, $d=2 \sim 20$ のときの相関積分のグラフである。 d が異なる曲線のすべてに直線領域が存在し、 d が大きくなるにつれて傾きが収束している。このことから相関次元が存在すると考えられ、直線部分の傾きから計算した相関次元 D は $2.7 (\pm 0.4)$ であった。したがって、光合成速度のゆらぎは $D=2.7$ 程度のストレンジアトラクタを持つカオスである可能性が高い。

Fig. 5 (b) は茎径の生長速度の時系列データから求めた、 $\tau=3$, $d=2 \sim 20$ のときの相関積分のグラフである。光合成速度の場合よりも傾きが大きく、直線領域は非常に狭くなっている。この部分から相関次元を計算すると $D > 4.5$ となるが、489 個のサンプルでは信頼性の高い判定は困難である。

これらの結果は、ストレンジアトラクタの観察に基づく判定と一致している。

3. 非線形モデルの同定による検証

上記の解析結果が示すとおり、光合成速度のゆらぎはカオスである可能性が非常に高い。もしカオスであるとすれば、そのカオスを生成するもとになる非線形モデルが存在する。相関次元の計算によって光合成速度が比較的低次元のカオスと推定されたため、短期予測であれば高い精度で予測できなければならない。そこで次に、このモデルの存在を示すことにより、カオス性を検証することにする。

光合成速度を予測する非線形モデルには、Fig. 6 (a) に示す 3 層のニューラルネットを用いた。入力層のユニットは温度、相対湿度、 CO_2 濃度、気圧の環境状態に關

Fig. 5 Correlation integral is calculated using time series data of photosynthetic rate and growth rate.

Where embedded dimension d is changed from 2 to 20. There are linear parts and the gradients are parallel for large d in (a). This means that the time series data of photosynthetic rate are chaos. On the other hand, the gradients in (b) are large. The time series data of growth rate may be higher dimensional chaos. (a) Correlation integral of photosynthetic rate. (b) Correlation integral of growth rate.

する4変数,そして1ステップ前の光合成速度 $P(t-1)$ からなる5個とし,出力層のユニットは現在の光合成速度 $P(t)$ とした. 中間層のユニットは5個である.

このモデルは, 出力層のユニットの出力値が入力層の

Fig. 6 Nonlinear models of photosynthetic rate based on neural network.

Model-(a) has five input nodes which are defined as four environmental factors and previous (one past step) photosynthetic rate. Model-(b) has four input nodes which are same as four environmental factors of model-(a). Output nodes of model-(a) and -(b) are photosynthetic rate. These models predict photosynthetic rate. All variables of input nodes and output nodes are normalized. (a) Input nodes: four environmental factors and one past step photosynthetic rate, $p(t-1)$. (b) Input nodes: four environmental factors.

一つのユニットに時間遅れを伴って入力するリカレントネットワーク (Jordanのシーケンシャルネットワーク¹⁶⁾) になっている. ある時点での光合成速度が得られていれば, 再帰的にこのモデルを n 回動作させることで n ステップ先の光合成速度を予測することができる. カオスには初期値の微小な差が指数関数的に増大するという特性があるが, Fig. 6 (a) のモデルはこの特性を満たしている.

Fig. 6 (b) は、このモデルと比較するために作成したモデルで、入力層に 1 ステップ前の光合成速度 $P(t-1)$ のユニットを持っていない。中間層のユニット数は 6 個にした (自由パラメータの数は Fig. 6 (a) のモデルとほぼ等しい)。

Fig. 1 で示したテスト用データ領域を除くサンプルを使って、Fig. 6 (a), (b) のモデルをバックプロパゲーション・アルゴリズム¹⁷⁾によって同定した。(a), (b) のモデルの比較のため、2 乗誤差が 0.0001 になったところで両者とも学習を打ち切った。

Fig. 7 Predicted photosynthetic rate by nonlinear models.

The nonlinear models are neural networks shown in Fig. 6. Prediction-a shows calculated values by the model of Fig. 6 (a), which used five variables of four environmental factors and one past step photosynthetic rate. Prediction-b shows calculated values by the model of Fig. 6 (b), which used four variables of four environmental factors.

Fig. 8 Predicted photosynthetic rate by linear regression models.

Prediction-a shows calculated values with current four environmental factors and previous photosynthetic rate. Prediction-b shows calculated values with current four environmental factors. Neither of the models can predict irregular changing patterns.

Fig. 7 は, Fig. 5 (a), (b) のモデルによる Fig. 1 のテスト用データに対する予測結果 (現時点の環境状態と1ステップ前の光合成速度の値を使った予測) である. Fig. 8 は重回帰モデルを用いて, Fig. 7 と同様に行った予測結果である. 説明変数は Fig. 6 (a), (b) のモデルと同じで, 四つの環境因子と1ステップ前の光合成速度を含むモデル (Prediction-a) と含まないモデル (Prediction-b) である.

Fig. 7 の (a) (b) を比較すると, (a) では小さな変化パターンのほとんどが正しく予測されているのに対し, (b) では予測できていない. 重回帰モデルではどちらのモデルも (Fig. 8 (a), (b)), 不規則パターンはまったく予測されていない.

これらの結果から, 光合成速度の複雑な変化は, 光合成系の履歴依存性と非線形性によって生み出されたカオスであると考えられる.

議 論

1. 光合成速度の相関次元

実験では, 環境条件を数十分間隔で変化させたときの光合成速度の後半10分間のほぼ安定した状態での平均値が観測されている (それより短い時間スケールでの応答成分はノイズとして扱われている). 数十分間隔を1ステップとした時間スケールでみたとき, 光合成速度には環境条件と過去の状態に依存した比較的低次元のカオスが観測された.

光合成に関与するメカニズムの実態は非常に複雑であることから, 物理的な自由度は非常に大きいはずである. ところが観測されたカオスは低次元であり, システムとしての自由度がきわめて小さくなっていることを示している. これは, 植物内部の機能全体が協調的に動作した結果, 自由度が小さくなっているためと考えられる.

一方, 生長速度の変動は低次元のカオスではなかった. これは, 生長が光合成とは独立した要因 (たとえば光合成産物の転流など) にも影響されているためと考えられる.

2. カオス性の応用

環境変動に対する光合成速度や生長速度の応答がカオスであるということは, いくら精度の高いモデルを用いても精度の高い長期予測が不可能であることを意味している. そのため正確な長期予測を前提とした制御や計画は原理的に困難である. しかしその反面, カオスには次のような利点もある.

カオス系では軌道が空間的に偏在し, 外乱によっても

との軌道をはずれてもストレンジアトラクタに急速に引き込まれるという特徴がある. このとき, 非常に小さな制御量を系に与えるだけで大きな変化を生み出すことができる (非カオス系では大きな変化を生成するために大きな制御量が必要である).

植物は環境変化に対する適応の手段として, この性質を利用しているとも考えられる. 工学的には, カオス性を次のように利用することができる.

2.1 生育動態のモニタリング

植物個体内部の制御系によってカオス性は維持されているため, もしその制御特性が変化すれば相関次元の値も変化することになる. そのため相関次元は, 生育ステージによる違い, 品種間差, 適応変化などによる制御特性の変化を定量的に測定する指標として利用できると考えられる.

2.2 少ない情報量による同定

カオス系ではカオスを生み出すモデルが比較的単純であるため, 同定に必要な情報はかなり少なくすむ. そして短期予測に限れば, 同定したモデルを使って精度の高い予測を行うことができる.

2.3 微小な制御量による生育環境制御

微小外力によるカオス系の制御は倒立振り子, 熱対流, 心臓組織の拍動などで実験的に検証されているが¹⁸⁾, 植物でも同様に, 環境条件の小さな変化によって生育状態を制御できると考えられる.

植物生長は長期間にわたる変化であるため, 極端に微小な刺激でも大きな影響がみられる場合もあると思われる. その下限としては, 熱ノイズレベル以下の微弱電場が細胞に影響を与えるという報告が参考になる¹⁹⁾. ただしカオスの性質上, 積極的な制御を行わずに電磁場を印加した場合には, 効果が大きくばらつくと予想される. 電磁場が植物生長に与える影響は古くから報告されているが, 実際, 各報告ごとにその効果がまちまちであることが指摘されている²⁰⁾.

3. 複雑さと曖昧性

植物の挙動は複雑でとらえにくい曖昧なものと同感的に考えられているが, この曖昧さはカオスとランダムネスに分けて考える必要がある (決定論的な系においては, ランダムネスは獲得情報の不足にほかならない).

カオス時系列データの分布は特異な構造を持っているが, 局所的に観察すると単純かつ稠密であるため, ランダムデータと区別しにくい. そのため, もしカオス現象をランダム現象と見誤ると, 十分な情報が獲得されているにもかかわらず情報が不足していると判断されるため, 曖昧さが過大評価されることになる.

たとえば, Fig. 3 では非常に大きなノイズが重畳しているように見える. この複雑さをノイズとみなせば, 観測された情報からは気圧と光合成速度の間に明確な関係が見いだせないと判断せざるをえない. ところが実際には, 気圧と光合成速度の間には Fig. 6 (b) のモデルで表現された関係が存在している.

結 言

環境条件が変化したときにみられる植物個体の光合成速度の複雑な変化がカオスであることを明らかにした. さらに光合成速度の複雑な変化が決定論的な非線形モデルによって再現および予測できることを示し, そのカオス性を検証した.

従来, 「植物の挙動には曖昧性がある」とか「栽培プロセスには曖昧性がある」といわれてきたが, 本研究では, この曖昧性の一部が植物の応答のカオス性に起因することを示し, その表現方法および応用方法を考察した.

本研究は科学技術庁振興調整費, 総合研究「ファジィシステムとその人間・自然系への適用に関する研究」における「植物生長のモデリングと改善」の研究プロジェクトの一環として行われたものである. 本研究プロジェクトの推進にあたって高倉 直教授 (東京大学) にご尽力いただきました. また実験では小野 誠氏 (熊本県農業研究センター) にご助力いただきました. 深く感謝いたします.

文 献

- 棟方 研. 1980. 「葉緑体」, 理工学社, 東京.
- 和田野晃. 1993. 生体内代謝経路のコンピュータシミュレーション. 生物物理, 33: 39-44.
- TAKAKURA, T., T. KOZAI, K. TACHIBANA, and K. A. JORDAN. 1974. Direct digital control of plant growth. I. Design and operation of the system. Trans. ASAE 17: 1150-1154.
- MAY, R. M. 1976. Simple mathematical models with very complicated dynamics. Nature 261: 459-467.
- LORENZ, E. N. 1963. Deterministic nonperiodic flow. J. Atmos. Sci. 20: 130-141.
- MAY, R. M. 1974. Biological populations with non-overlapping generation: Stable points, stable cycles and chaos. Science 186: 645-647.
- 品川嘉也・瀬野裕美. 1991. 脳波とフラクタル. 生物物理 31: 38-42.
- 長島知正・永井喜則・荻原利彦・土屋 尚. 1990. 時系列データ解析とカオス. 計測と制御 29: 53-60.
- GOODWIN, R. M. 1990. "Chaotic Economic Dynamics", Oxford University Press, London.
- 下條隆嗣. 1992. 「カオス力学入門」, 近代科学社, 東京.
- TAKENS, S. 1981. Detecting strange attractors in turbulence. Lect. Notes Math. 898: 366-381.
- GRASSBERGER, P. and I. PROCACCIA. 1983. Estimation of Kolmogorov entropy from chaotic signal. Phys. Rev. Lett. 50: 346-349.
- 日本農業気象学会. 1977. 「農業気象ハンドブック」 285-311, 養賢堂, 東京.
- 今井 勝. 1981. 個体, 群落の物質生産の測定と解析. 「光合成研究法」(加藤 栄・宮地重遠・村田吉男編) 59-73, 共立出版, 東京.
- RUELLE, R. 1990. Deterministic chaos: The science and fiction. Proc. R. Soc., London, A 427: 244-248.
- JORDAN, M. I. 1986. Attractor dynamics and parallelism in a connectionist sequential machine. Proc. of the Eighth Annual Meeting of the Cognitive Science Society, Hillsdale, Erlbaum, NJ.
- RUMELHART, D. E., G. E. HINTON, and R. J. WILLIAMS. 1986. Learning internal representations by error propagation. In "Parallel Distributed Processing" (Ed. by McClelland, J. L., D. E. Rumelhart, and the PDP Research Group) Vol. 1, 354-361, MIT Press, Cambridge.
- SHINBROT, T., C. GREBOGI, E. OTT, and J. A. YORKE. 1993. Using small perturbation to control chaos. Nature 363: 411-417.
- WEAVER, J. C. and R. D. ASTUMIAN. 1990. The response of living cells to very weak electric fields: The thermal noise limit. Science 247: 459-462.
- 河村広巳・重光 司・菅沼浩敏・遠藤織太郎. 1981. 電界の生物学的影響に関する文献調査—植物に対する影響—. 電力中央研究所報告, 調査報告: 480020.