変分原理によるコンポスト化プロセスの最適制御問題の解析

関 平 和

金沢大学工学部

Analysis of Optimum Control Problem for Composting Process Based on the Variational Principle

Hirakazu SEKI

Faculty of Engineering, Kanazawa University, Kanazawa 920-8667, Japan

An optimum control problem for the first stage of the composting process was formulated based on the variational principle. The whole period for the composting process can be divided into three sub-periods, i.e., temperature increasing period, stable temperature period, and temperature decreasing period. The optimum control problems for the first two sub-periods were numerically solved individually. It was found that 1) the aeration rate in the 1st sub-period should be low in order to raise the temperature of the compost mass as fast as possible to the value at which the composting reaction rate reaches the maximum, and 2) a much higher aeration rate is necessary in the 2nd sub-period than in the 1st sub-period so as not to accumulate excess heat generated in composting. Although the theory described in this paper was obtained for the batch-type composting process, this theory can be extended to a continuous system by replacing the sum of the 1st and 2nd sub-periods of composting process to the retention time in the vessel for compost mass.

(Received June 13, 1997)

1997年6月13日受付

緒 言

コンポスト化システムは、廃棄物の処理と再資源化という二面性をもつ特有のシステムであり、資源有効利用の観点から注目されている。このシステムは、前処理（原料の破碎、選別、混合、水分調整）、1次発酵（分解可能な有機物のガス化、病原菌の死滅、悪臭物質の除去を目的とした処理）、2次発酵（腐植物質すなわち堆肥の生成を目的とした処理）という三つのプロセスを経て製品コンポストを作り出す（たとえば、Fujita, 1993; Haug, 1993）。このうち、前処理プロセスは原料の種類、特性により作業工程が異なるので処理速度の定式化が困難であり、また、腐熟化過程である2次発酵プロセスは反応速度が非常に遅く、それを著しく促進するような画期的な方法が見いだされていない。したがって現状では、これらの二つのプロセスは工学的

制御の対象となりにくい。これに対し、1次発酵プロセスは2次発酵プロセスに比べて反応速度が大きく、かつそれに影響を及ぼす因子についての知見が比較的整備されており、処理速度の工学的制御が可能な部分といえる。本論文では1次発酵プロセスに着目し、その最適制御問題を取り上げた。これ以降、1次発酵プロセスのことをコンポスト化プロセスとよぶことにする。

わが国でコンポスト化プロセスに関する工学的研究が本格的に始まったのは1970年代末（Fujita, 1979）で、その最適制御に関する理論的研究はこれまでほとんど報告されていない。しかし近年の有機農業見直しによるコンポスト需要の増大や、今後予想される廃棄物量の増大に対処するためには、処理速度を高めるための合理的な制御システムの開発が急務と考えられる。

そこでここでは、コンポスト化の反応速度式があらかじめ知られていることを前提に、化学プラントの最

適化手法としてよく知られている変分原理 (Yagi and Nishimura, 1969) を用いてコンポスト化プロセスの最短時間制御問題を解析した。ここで用いた手法は、主として実験段階のシミュレーションや数値実験に役立つものと思われる。

コンポスト化プロセスの概要

プロセス制御工学の分野では温度、濃度などのプロセスの状態変数の時間的変化を与える式を状態方程式という (Kunugida and Nakanishi, 1987)。本章では最適制御に必要な状態方程式である熱収支式と物質収支式を導く。コンポスト化プロセスは原料投入と製品搬出を連続的に行う、いわゆる連続式を採用することが多いが、実際には連続式と称しても投入と搬出を昼間のみ行う、なかば回分的な操作をしているものが大多数である。また、実験段階では回分式の発酵槽を用いることが多い (Fujita, 1980)。したがってここでは、Fig. 1 のように、槽内に原料を投入したまま反応を進行させる操作方式である回分式のコンポスト化プロセスを考える。

発酵槽単位質量あたりの菌体質量 X の時間的変化は、時間を t 、菌体の比増殖、比死滅速度をそれぞれ μ 、 λ とすれば (Stombaugh and Nokes, 1996)。

$$\frac{dX}{dt} = (\mu - \lambda)X \quad (1)$$

コンポスト化で分解可能な易分解性基質の質量 S の時間的変化は、菌体収率を Y とすると

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{1}{Y}\mu X \quad (2)$$

発酵槽内の酸素収支式は

$$\theta_g V \frac{dO}{dt} = -v(O - O_0) + Y_0 \frac{d(S+X)}{dt} V \quad (3)$$

ただし、 O は気相中酸素濃度、 θ_g は気相率、 V は発

Fig. 1 Illustration of a batch-type composting process.

酵槽容積、 v は通気量、 Y_0 は基質消費質量あたりの消費酸素質量を表す。

水分収支式は

$$V \frac{dW}{dt} = -\rho_a v(H - H_0) - Y_w \frac{d(S+X)}{dt} V \quad (4)$$

ただし、 W は槽内水分量、 ρ_a は乾燥空気密度、 H は槽内空気の混合比、 H_0 は入口空気の混合比、 Y_w は基質消費質量あたりの水分生成量を表す。

熱収支式は

$$C_p M \frac{dT}{dt} = -UA_r(T - T_0) - \rho_a v(i - i_0) - \Delta h_c \frac{d(S+X)}{dt} V \quad (5)$$

ただし、 C_p はコンポスト原料の比熱、 U は発酵槽壁からの放熱の程度を表す総括伝熱係数、 A_r は放熱面積、 i は槽内空気のエンタルピー、 i_0 は外気のエンタルピー、 Δh_c は有機物(基質または菌体)消費質量あたりの発熱量を表す。

また、 M は発酵槽内の全質量を表し次式で与えられる。

$$M = (S + X + F + W)V \quad (6)$$

ただし、 F は分解不能な物質の総質量を表す。

ここで、式(1)中の比増殖速度 μ は Stombaugh and Nokes (1996) によれば、温度 T 、基質濃度 S 、酸素濃度 O 、水分 W の関数として次のように与えられる。

$$\mu = \mu_{\max}(T) \frac{S}{K_s + S} \frac{O}{K_0 + O} g(W) \quad (7)$$

また、比死滅速度 λ は温度のみの関数で与えられる (Haug, 1993)。

$$\lambda = \lambda(T) \quad (8)$$

これらを式(1)、(2)に代入すると、

$$\frac{dX}{dt} = \left\{ \mu_{\max}(T) \frac{S}{K_s + S} \frac{O}{K_0 + O} g(W) - \lambda(T) \right\} X \quad (9)$$

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{1}{Y} \left\{ \mu_{\max}(T) \frac{S}{K_s + S} \frac{O}{K_0 + O} g(W) \right\} X \quad (10)$$

また、酸素濃度 O は、式(3)において槽内での蓄積量 $\theta_g V (dO/dt)$ が流入量 vO_0 、流出量 vO に比べて小さく擬定常状態が仮定できるとすると

$$v(O - O_0) = Y_0 \frac{d(S+X)}{dt} V \quad (11)$$

H, i は飽和状態における値に近似できると考えられるので、温度のみの関数とみなせる。さらに簡単のため次のように温度の 1 次関数で近似すると、

$$H(T) = H(T_0) + \frac{dH}{dT} \Big|_{T_0} (T - T_0) \quad (12)$$

$$i(T) = i(T_0) + \frac{di}{dT} \Big|_{T_0} (T - T_0) \quad (13)$$

式 (4), (5) は次のように書き換えられる。

$$V \frac{dW}{dt} = -\rho_a v \frac{dH}{dT} \Big|_{T_0} (T - T_0) - Y_w \frac{d(S+X)}{dt} V \quad (14)$$

$$C_p M \frac{dT}{dt} = - \left(UA_r + \rho_a v \frac{di}{dT} \Big|_{T_0} \right) (T - T_0) - \Delta h_s \frac{d(S+X)}{dt} V \quad (15)$$

以上に示した菌体濃度 X , 基質濃度 S , 酸素濃度 O , 水分 W , 温度 T の五つの変数のうち、操作中に特に変化が顕著なのは S, T, O である。そこでここでは、 X, W を操作中一定、すなわち dX/dt および dW/dt 項をゼロとみなすことにする。また、 μ に及ぼす S, O の影響はともに Michaelis-Menten 型の式 (Stombaugh and Nokes, 1996) で表されることが多いが、双曲型のこの関係は数学的に微分演算が煩雑となるのでここではこれらを以下の式で近似する。

$$\frac{S}{K_s + S} \approx 1 - \exp(-\delta S) \quad (16)$$

$$\frac{O}{K_0 + O} \approx 1 - \exp(-\beta O) \quad (17)$$

また、 $\mu_{\max}$ については Andrews and Kambhu (1973) の近似式に従い、333 K (=60°C) で最高値をとるように d_1 と d_2 の値を定め、次式で表した。

$$\mu_{\max}(T) = \mu_0 [\exp\{d_1(T-293)\} - \exp\{d_2(T-323)\}] \quad (18)$$

式 (16)~(18) を S, T の時間的変化式 (10), (15) に代入し、 dX/dt の項をゼロとみなして整理すると、それらは次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} = & -D[\exp\{d_1(T-293)\} - \exp\{d_2(T-323)\}] \\ & \times \{1 - \exp(-\beta O)\} \{1 - \exp(-\delta S)\} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} = & AD \left(1 - B \frac{T - T_0}{O_0 - O} \right) [\exp\{d_1(T-293)\} \\ & - \exp\{d_2(T-323)\}] \\ & \times \{1 - \exp(-\beta O)\} \{1 - \exp(-\delta S)\} \\ & - C(T - T_0) \end{aligned} \quad (20)$$

同様に、 O についての収支式 (11) は次のように O と通気量 v との関係を与える式に変換される。

$$\begin{aligned} v = & -\frac{DY_0 V}{O - O_0} [\exp\{d_1(T-293)\} - \exp\{d_2(T-323)\}] \\ & \times \{1 - \exp(-\beta O)\} \{1 - \exp(-\delta S)\} \end{aligned} \quad (21)$$

ただし、式中の A, B, C, D は以下に示す定数である。

$$A = \frac{\Delta h_s V}{C_p M} \quad (22)$$

$$B = \frac{\rho_a Y_0}{\Delta h_s} \frac{di}{dT} \Big|_{T_0} \quad (23)$$

$$C = \frac{UA_r}{C_p M} \quad (24)$$

$$D = \frac{1}{Y} g(W) X \mu_0 \quad (25)$$

コンポスト化プロセスへの最適制御理論の適用

1. 変分原理による最短時間制御問題

一般に、状態変数 $x(t)$ および操作変数 $u(t)$ からなる制御対象が状態方程式 $dx/dt = f(x(t), u(t))$ に従って変化するとき、ある評価関数 J を最小ないし最大にするような制御を見いだす問題を最適制御問題という (Kato, 1988)。特にこの場合のように、操作完了時間 (コンポスト化完了時間) t_f を最小にすることが制御の目的である場合、評価関数 J は t_f となる。そして、 t_f を最小にする最適軌道 $x^*(t)$, 最適操作 $u^*(t)$ を求める問題を最短時間制御問題という。この問題は、変分原理により、ハミルトニアンとよばれる関数 $H = 1 + \lambda_1 f$ を用いると次のように定式化できる (Kato, 1988)。ただし、 λ_1 は随伴変数とよばれる新しい変数である。

随伴変数の微分方程式は

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (26)$$

制御入力 u の最適性の条件は

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (27)$$

状態方程式は

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t)) \quad (28)$$

状態量の初期条件は

$$x = x_i \quad (t=0) \quad (29)$$

状態量の終端条件は

$$x = x_f \quad (t=t_f) \quad (30)$$

随伴変数の終端条件は終端における未定定数を ν とおけば、

$$\lambda_1 = \nu \quad (t=t_f) \quad (31)$$

未知量 t_f に対する条件は

$$H=0 \quad (t=t_f) \quad (32)$$

以上の条件式において、式 (27) の制御を行うことにより、式 (32) を満たす t_f について、式 (26), (28) が式 (29) ~ (31) を満たすように x, u を決めると、それが最適軌道 $x^*(t)$, 最適操作 $u^*(t)$ を与える。

2. コンポスト化プロセスの最短時間制御問題

反応速度の温度、濃度依存性が線形でないコンポスト化プロセスでは全期間にわたって統一的に最短時間

制御問題を解くのはきわめて困難である。そこでここでは、回分式コンポストプロセスが、Fig. 2 に例示するように、おおむね三つの期間（第1, 第2, 第3期間）を経ながら進行することに着目し、この問題を期間ごとの最短時間制御問題に変換し、1の手法に従って解くことにする。

第1期間は好気性発酵に伴う発熱により温度が徐々に上昇しコンポスト化速度が最高となるまでの期間である。この期間は微生物による基質量 S の消費が少ないため、 S を近似的に一定とみなせるものと考えられる。第2期間は堆肥化が安定している期間で、この期間中に易分解基質がほぼ消費されつくす。第3期間は反応終了後、温度が低下し製品コンポストができるまでの期間である。

この期間分けによれば、コンポスト化の反応速度が問題となるのは第2期間までで、第3期間は通気量を一気に最大値に上げて冷却すれば最小になることが明らかである。したがってここでは第1, 第2期間のみを対象に最短時間制御問題を解くことにする。

1) 第1期間

S を一定と仮定すれば、この問題は O を操作することによって第1期間の長さを最小にするための制御政策を見いだす2点境界値問題に帰着でき、式(26)~(32)に準じて Table 1 の式(33)~(39)のように定式化される。

計算にあたっては時間変数を t から $\theta = t_f - t$ に置き換えたのち、 $\theta=0$ （終端状態）を計算の出発点とし、式 (34) を満たす O の値を求め、式(37)~(39)から $T]_{\theta=0}, \lambda_1]_{\theta=0}$ を求める。次に、微小時間 $\Delta\theta$ 後の O の値を式 (34) から求め、さらに T, λ_1 の値を求める。この手順を $T = T_1$ になるまで計算を繰り返す。そのと

Fig. 2 An example of temperature history in the composting process in the case of $\nu=100 \text{ m}^3/\text{h}$.

Table 1 A set of equations for solving the optimum control problem of the composting process.

(a) 1st period		(b) 2nd period	
$\frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial T}$	(33)	$\frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial S}$	(40)
$\frac{\partial H}{\partial O} = 0$	(34)	$\frac{\partial H}{\partial T} = 0$	(41)
$\frac{dT}{dt} = f = AD \left(1 + B \frac{T - T_0}{O - O_0} \right) [\exp\{d_1(T - 293)\} - \exp\{d_2(T - 323)\}] \{1 - \exp(-\delta S)\} \times \{1 - \exp(-\beta O)\} - C(T - T_0)$	(35)	$\frac{dS}{dt} = f = -D[\exp\{d_1(T - 293)\} - \exp\{d_2(T - 323)\}] \{1 - \exp(-\delta S)\} \times \{1 - \exp(-\beta O)\}$	(42)
$T = T_i \quad (t=0)$	(36)	$S = S_i \quad (t=0)$	(43)
$T = T_f \quad (t=t_f)$	(37)	$S = S_f \quad (t=t_f)$	(44)
$\lambda_1 = \nu \quad (t=t_f)$	(38)	$\lambda_1 = \nu \quad (t=t_f)$	(45)
$H = 0 \quad (t=t_f)$	(39)	$H = 0 \quad (t=t_f)$	(46)

きの時間が t_f となる。なお、実際の計算にあたっては数値解の安定性を考慮して $\Delta\theta$ の値を0.1 hとした。

2) 第2期間

第2期間では O が反応速度に影響を及ぼさない程度に大きいものと仮定すると、この問題は T を操作することによって第2期間の長さを最小にするための制御政策を見いだす2点境界値問題に帰着でき、Table 1の式(40)～(46)のように定式化される。

式(41)より、最適化はコンポスト化反応を最大にする温度[333 K (=60°C)]に保つことによって達成できることが明らかである。また基質量 S 、および随伴変数 λ_1 は前項と同様時間変数を $\theta=t_f-t$ に置き換えたのち、 $\theta=0$ (終端状態)を計算の出発点とし、式(44)～(46)から $S|_{\theta=0}$ 、 $\lambda_1|_{\theta=0}$ を求め、微小時間刻み $\Delta\theta$ ごとに初期状態に向かって S 、 λ_1 の値を求めつつ $S=S_f$ になるまで計算を繰り返す。そのときの時間が t_f となる。なお、 $\Delta\theta$ の値は解の安定性を考慮して1 hとした。

結果と考察

想定した回分式発酵槽は底面積4.35 m²、高さ2.3 m、容積10 m³の円筒型容器とした。計算に使用した諸係数、諸数値をTable 2に示す。

本計算例では、 T 、 S の最終値を $T_f=333$ K (=60

°C)、 $S_f=5$ kg/m³とし、これを実現する最適通気量 v^* 、随伴変数 λ 、最適軌道 T^* 、 S^* 、 O^* を前章の最適制御理論に従って求めた。その結果をFig. 3に示す。

操作開始から約14 hで T^* が反応速度を最大にする値333 K (=60°C)に達し、第1期間が終了する。 O^* は初期に0.24 kg/m³であるが時間とともにほぼ直線的に低下し、第1期間終了時には0.18 kg/m³となる。しかしこの値は、反応阻害の影響を無視しうるのに必要な最小値0.143 kg/m³ (=10%; Fujita, 1993) 以上である。 v^* は初期の4 hまでは約25 m³/hでその後指数関数的に上昇し、第1期間終了時には約54 m³/hで初期の約2倍の値となった。第1期間における λ_1 の値は負で初期の-0.76 h/Kからほぼ直線的に上昇し、第1期間終了時には約-0.2 h/Kとなった。

第2期間では T^* が333 K (=60°C)に保たれ、 S^* は徐々に消失する。 S^* が S_f に達するまでの所要時間、すなわち第2期間の長さは150 hであった。 v^* は、初期には260 m³/hで第1期間の最終値の約5倍の値に一気に引き上げる操作を必要とする。その後 v^* は徐々に減少する。 O^* は初期から100 hまでは約0.27 kg/m³に保たれるが、その後第2期間終了時までには少しずつ減少していく傾向がみられる。 λ_1 の値は第2期間においては常に正で、初期に約1.9 m³·h/kgでその後徐々に上昇し第2期間終了時には約9.5 m³·h/kgとなった

Table 2 Values of parameters for numerical calculation.

A : constant	14.29 m ³ ·K/kg
A_r : surface area of compost container	25 m ²
B : constant	0.000754 kg/(m ³ ·K)
C : constant	0.0179 h ⁻¹
C_p : heat capacity of compost material	0.7 kcal/(kg·K)
D : constant	0.082 kg/(m ³ ·h)
d_1 : parameter in Eq. (18)	0.0638 K ⁻¹
d_2 : parameter in Eq. (18)	0.1622 K ⁻¹
F : mass of non-degradable materials per unit volume of compost container	100 kg/m ³
$g(W)$: function expressing moisture dependence of specific growth rate	1[-]
M : total mass in compost container	4 000 kg
S_i : initial substrate mass per unit volume of compost container	54 kg/m ³
U : overall heat transfer coefficient	2 kcal/(m ² ·h·K)
V : volume of compost container	10 m ³
X : initial microbial mass per unit volume of compost container	6 kg/m ³
Y : yield coefficient	0.35 kg-cells produced/kg-substrate consumed
Y_o : yield coefficient	1.37 kg-O ₂ produced/kg-substrate consumed
Y_w : yield coefficient	0.631 kg-water produced/kg-substrate consumed
ρ_a : density of air	1.1 kg/m ³
Δh_s : heat production per unit mass of substrate consumed	4 000 kcal/kg-substrate consumed
β : parameter in Eq. (17)	12.16 m ³ /kg
δ : parameter in Eq. (16)	0.035 m ³ /kg
μ_0 : coefficient in Eq. (18)	0.0048 h ⁻¹

Fig. 3 Calculated results of the numerical solution for the optimum control problem of the composting process.
 (a) v^* vs. t , (b) λ_1 vs. t , (c) T^* vs. t , (d) S^* vs. t , (e) O^* vs. t .

Fig. 4 Calculated results of T , S , and O under the condition of $v = 20, 100, \text{ and } 150 \text{ m}^3/\text{h}$.

た。

次に、ここで得られた結果が最適操作を与えているか否かを確かめるために、通気量 v を一定値に保ったまま制御しない場合を想定した T , S , O の計算結果の例を Fig. 4 に示した。ただし計算にあたっては、式 (19), (20) を時間に関して離散化して差分方程式に変換し、微小時間刻み Δt ごとに S , T の値を逐次算出した。また、 O は各時間において式 (21) を満たす根として求めた。なお、 Δt は解の安定性を考慮して 0.1 h とした。いずれも第 1 期間の長さは最適制御理論で得られた値 (14 h) よりも長くなる。第 2 期間では S が指定された最終値 S_f に達する前に温度が急速に低下するためいずれの場合も 150 h (第 1 期間をも含めた合計時間は 164 h) 経過後においても S は S_f にはならない。すなわち、通気量無制御の場合には第 1, 第 2 期間の合計所用時間は上述の最適制御理論による結果よりも長くなることがわかる。

さて、本計算結果によれば、最適制御においては第 1 期間と第 2 期間では v の値が大きく異なる。このことは、大小二つのプロワーを使い分ける方法が有効となることを示唆する。すなわち、第 1 期間では小型のプロワーで T を最適値 (この場合は 333 K) まで上昇させ、第 2 期間では T が最適値以上にならないように大きなプロワーで除熱すればよい。こうした操作は Hansen *et al.* (1989) が行った実験でも取り入れられており経験的にその有効性が知られているが、ここではこのような操作を行う理由を最適制御理論により裏付けることができた。

結 論

回分式コンポスト化プロセスを三つの期間に分け、最適制御の適用対象である第 1, 第 2 期間に着目し、変

分原理による最短時間制御問題を数値解析した。その結果、第 1 期間では通気量を小さくしてできるだけ速く温度を上げ反応速度を最大にする温度に到達させ、第 2 期間ではその温度を維持するために通気量を大きくして除熱するのがよいという結果が得られた。

ここでは回分式を対象としたが、本理論を用いて得られる「コンポスト化完了時間」を「装置容積/処理量」、すなわち、「滞留時間」に置き換えることにより本理論を連続式に拡張して考えることができるので、ここで述べた方法は実験的段階の検討のみならず、実システムの検討にも役立つものと思われる。

文 献

- Andrews, J. F., Kambhu, K. 1973. Thermophilic Aerobic Digestion of Organic Solid Wastes. Office of Research and Development, U. S. EPA. NTIS, p 222-396.
- Fujita, K. 1979. Analysis of aerobic continuous composting reactor in perfectly mixed condition. (in Japanese) J. Solid Liquid Wastes 9(9): 23-36.
- Fujita, K. 1980. Analysis of aerobic batch composting reactor. In "Waste Management Technology" (ed. by Kankyo Sangyo Shinbunsha). (in Japanese) Kankyo Sangyo Shinbunsha, Tokyo, p 462-475.
- Fujita, K. 1993. Composting Technology. (in Japanese) Gi-hodo, Tokyo, pp 196.
- Hansen, R. C., Keener, H. M., Hoitink, H. A. J. 1989. Poultry manure composting: an exploratory study. Trans. ASAE 32: 2151-2157.
- Haug, R. T. 1993. The Practical Handbook of Compost Engineering. Lewis Publishers, Boca Raton, pp 717.
- Kato, K. 1988. Optimum Control for Engineering. (in Japanese) University of Tokyo Press, Tokyo, pp 241.
- Kunugida, E., Nakanishi, E. 1987. Chemical Process Control. (in Japanese) Asakura Shoten, Tokyo, pp 194.
- Stombaugh, D. P., Nokes, S. E. 1996. Development of a biologically based aerobic composting simulation model. Trans. ASAE 39: 239-250.
- Yagi, S., Nishimura, H. 1969. Chemical Process Engineering. (in Japanese) Maruzen, Tokyo, pp 362.