ハイブリッドシステムの非線形現象

Nonlinear Phenomena in Hybrid Systems

潮 俊光 Toshimitsu USHIO

金澤尚史 Takafumi KANAZAWA

1. まえがき

連続変数(実数値変数)と離散変数(シンボル変数, 整数値変数)の両方が共存するシステムを一般にハイブリッドダイナミカルシステムまたは, 単にハイブリッドシステムという⁽¹⁾. ハイブリッドシステムの典型的な例としてスイッチング回路がある^{(2), (3)}. スwitchング素子はオンとオフの2値を取る離散変数で記述されるので, スwitchング素子を含む回路ではその2値に依存して回路を記述する微分方程式が異なり, その次元も変化する. ハイブリッドシステムでは, 離散変数の振舞いは区分的定数で, 離散変数に変化するとき連続変数が滑らかではなくなったりジャンプすることもある. そのため, ハイブリッドシステムの解析はかなり難しく, 現在でも多くの未解決問題がある.

「ハイブリッドシステム」という言葉が学術論文で用いられたのは1960年代までさかのぼることができる⁽⁴⁾. また, 1950年代から研究されている切換制御やリレー回路などもハイブリッドシステムであり, その意味では, ハイブリッドシステムは古くて新しい研究テーマと言うべきかもしれない. しかし, 現在の研究が1950~60年代の研究と大きく異なる点は, 離散変数のダイナミクスを陽に取り込んだモデルの出現と計算機科学と非線形システム理論・非線形科学の交流が挙げられる. 最近では, ハイブリッドシステムの応用が工学にとどまらず, 様々な分野に広がりつつある. 例えば, ゲノムの機能発現モデル^{(6), (7)}, 生命現象のモデル^{(8), (9)}, 経済学⁽¹⁰⁾などがある.

ハイブリッドシステムを対象にしたワークショップが1990年代に計算機科学のグループを中心に, 非線形力学系, 非線形システム理論などの研究者も参加して, 毎年開催されるようになり, その論文集がLecture Notes in Computer Scienceから出版されている. 今でも, 「Hybrid Systems: Computation and Control (HSCC)」が毎年3月下旬か4月上旬に開催されてい

る. また, IFAC (International Federation on Automatic Control) が主催で「Analysis and Design of Hybrid Systems (ADHS)」が3年ごとに開催されている. また, 多くの学術雑誌においてもハイブリッドシステムの特集号が企画されている. 詳細は文献(11)を参照されたい.

本稿では, ハイブリッドシステムの非線形現象に関する幾つかの話題を紹介する. まず**2.**では, ハイブリッドシステムのモデルとして最もよく使われるハイブリッドオートマトンを紹介する. **3.**では, 区分的に滑らかなシステムにおけるFilippov解を定義し, スライディングモードについて説明する. **4.**では, 微分不可能性に起因する分岐現象について説明する. **5.**では, カオスの存在するハイブリッドシステムとして有名なスイッチトアライバルシステムに対するカオス制御について述べる. **6.**はハイブリッドレプリケータダイナミクスについて紹介する.

2. ハイブリッドオートマトンモデル

従来から連続変数のダイナミクスは微分方程式で, 離散変数のダイナミクスはオートマトンやペトリネットなどで記述される. これらのモデルを組み合わせることでハイブリッドシステムをモデル化する. 本章では, ハイブリッドシステムのモデル表現として最も標準的で一般性のあるハイブリッドオートマトンモデルを紹介する.

従来のオートマトンは離散状態と事象の生起による状態遷移の関係を表し, 図的表現として, グラフが用いられる. 一般に離散状態を節点に, 遷移を事象でラベル付けされた枝で表す. 各節点に連続変数の時間発展の記述を加えたものをハイブリッドオートマトンという. ハイブリッドオートマトンは離散状態の遷移が図的に理解しやすいという利点がある. ハイブリッドオートマトンは次の要素からなる^{(12), (13)}.

• 変数

実数値を取る状態(連続状態)を表すための変数の集合, x : $= [x_1, x_2, \dots, x_n]$, 連続状態の微分値を表す変数の集合 $\dot{x}$: $= [\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n]$, 並びに離散状態の変化による連続状態の変化を表す変数の集合 x' : $= [x'_1, x'_2, \dots, x'_n]$ を用いる. ただし, n は連続状態の次元である.

潮 俊光 正員 大阪大学大学院基礎工学研究科システム創成専攻
E-mail ushio@sys.es.osaka-u.ac.jp
金澤尚史 正員 大阪大学大学院基礎工学研究科システム創成専攻
E-mail kanazawa@sys.es.osaka-u.ac.jp
Toshimitsu USHIO, Member (Graduate School of engineering Science, Osaka University, Toyonaka-shi, 560-8531 Japan), Takafumi KANAZAWA, Member (Graduate School of engineering Science, Osaka University, Toyonaka-shi, 560-8531 Japan).
Fundamentals Review Vol.1 No.1 pp.41-50 2007年7月

● 制御グラフ

離散変数間の遷移を表すために、有向多重グラフ (V, E) を用いる。ただし、集合 V は節点集合で、各節点が離散状態を表す。 E は枝集合で、各枝は離散状態間の遷移関係を表す。

● ラベリング関数

各離散状態 $v \in V$ に対して集合 **init**, **inv**, **flow** がある。 **init** $(v) \subseteq \mathbb{R}^n$ は v から始まる軌道の取り得る初期条件の集合を、 **inv** $(v) \subseteq \mathbb{R}^n$ は離散状態 v で x が取り得る値の集合を、 **flow** $(v) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ は v での連続変数の (連続的) 変化を表す $(x, \dot{x})$ の取り得る値の集合を、それぞれ表している。

● ジャンプ条件

各枝 $e \in E$ に対して、離散状態の遷移前後での連続状態の変化を表すために、 $x \cup x'$ が取り得る値の集合 **jump** $(e) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ を用いる。

● 事象

事象の集合を Σ とおく。一般に Σ は有限集合である。各枝と事象の関係を表す関数を **event** : $E \rightarrow \Sigma$ とおく。すなわち、各枝 $e \in E$ に対して、 **event** $(e) \in \Sigma$ はその遷移のときに生起する事象を表す。

ハイブリッドオートマトンによるモデル化の例は **5.** と **6.** で述べる。

3. 区分的に滑らかな微分方程式モデル

連続変数のダイナミックスに注目したモデルとして、次式で書ける区分的に滑らかな常微分方程式モデルがある。

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \mu) = \begin{cases} f_-(x(t), \mu) & \text{if } H(x(t)) \leq 0 \\ f_+(x(t), \mu) & \text{if } H(x(t)) > 0 \end{cases} \quad (1)$$

ただし、 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ は状態、 $\mu \in \mathbb{R}$ はパラメータ、 $f_-: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ と $f_+: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 、 $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は十分に滑らかな関数である。 $H(x) = 0$ によって定義される $(n-1)$ 次元の滑らかな多様体 S によって $\mathbb{R}^n$ は領域 $S_- = \{x \in \mathbb{R}^n : H(x) < 0\}$ と $S_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : H(x) > 0\}$ に分割される。多様体 S はジャンプ条件に相当し、軌道が S を通過するときに離散状態が S_- から S_+ または S_+ から S_- に遷移することになる。

境界 S 上で f が不連続である場合には、式 (1) の解の概念を拡張する必要がある。その中で有名な拡張に Filippov の意味での解という概念がある⁽¹⁴⁾。解がジャンプする場合にはこの概念が適用できないが、連続となる場合には有効な概念である。式 (1) に対して次の微分包含を考える。

$$\dot{x}(t) \in F(x(t), \mu) =$$

$$\begin{cases} f_-(x(t), \mu) & \text{if } H(x(t)) < 0 \\ \overline{\text{co}}\{f_-(x(t), \mu), f_+(x(t), \mu)\} & \text{if } H(x(t)) = 0 \\ f_+(x(t), \mu) & \text{if } H(x(t)) > 0 \end{cases} \quad (2)$$

ここで、 $\overline{\text{co}}$ は閉凸包を表す。すなわち、

$$\overline{\text{co}}\{f_-, f_+\} = \{(1-q)f_- + qf_+ : q \in [0, 1]\}$$

である。式 (1) から式 (2) に拡張することは Filippov の凸手法と言われる。

絶対連続な関数 $x: [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$ が、ほとんどすべての $t \in [0, \tau]$ で式 (2) を満たすとき、 $x(t)$ を Filippov の意味での式 (1) の解という。各 x で集合 $F(x, \mu)$ が閉、凸、及び有界であり、更に $F(\cdot, \mu)$ が上半連続ならば、絶対連続な関数 $x: [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$ が式 (2) の解となるような $\tau > 0$ が存在する⁽¹⁵⁾。ここで、次式を満たすとき、 $F(\cdot, \mu)$ は点 $x \in \mathbb{R}^n$ で上半連続であるという。

$$\lim_{y \rightarrow x} \left(\sup_{a \in F(y, \mu)} \inf_{b \in F(x, \mu)} \|a - b\| \right) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

このように、式 (2) に拡張した後で境界 S を横切る解を定義できるようになる。

ここで、境界上の点 $x \in S$ での境界の法線ベクトルは $\nabla H(x)$ である。また二つのベクトル a と b の内積を $\langle a, b \rangle$ と書くことにする。図1に示すように、Filippov 解は境界付近で以下の三つに分類することができる。

- $\langle \nabla H(x), f_-(x, \mu) \rangle \langle \nabla H(x), f_+(x, \mu) \rangle > 0$ のときは図1 (a) に示すように解は境界を横断的に横切って通過する。

- $\langle \nabla H(x), f_-(x, \mu) \rangle > 0, \langle \nabla H(x), f_+(x, \mu) \rangle < 0$ のときは図1 (b) に示すように、 S_- 及び S_+ から出発する解は境界 S に向かって進み、境界と衝突すると、境界上を動く解となる。この境界上を動く軌道のことをスライディングモードと呼ぶ。この場合には安定なスライディングモードが存在する。制御工学では、制御入力を切り換えることにより切換面に沿って軌道を平衡点に収束させるスライディングモード制御と呼ばれる方法が古くから知られている⁽¹⁷⁾。スライディングモードは境界上を動くので、対応するベクトル f は $\langle \nabla H(x), f(x, \mu) \rangle = 0$ を満たす。このことから

$$f(x, \mu) = (1-q)f_-(x, \mu) + qf_+(x, \mu)$$

となる、ただし、

図1 区分的に滑らかなシステムの Filippov の意味での解の例

$$q = \frac{\langle \nabla H(x), f_-(x, \mu) \rangle}{\langle \nabla H(x), f_-(x, \mu) - f_+(x, \mu) \rangle}$$

である。

- $\langle \nabla H(x), f_-(x, \mu) \rangle < 0, \langle \nabla H(x), f_+(x, \mu) \rangle > 0$ のときは図1 (c) に示すように、スライディングモードが存在するが、境界上の解は不安定であり、実システムでは対応する解は観測されない。

式 (1) の平衡点を $\bar{x}_\mu$ とおく。 $\bar{x}_\mu$ がジャンプ条件 S 上になればヤコビ行列 $J(\bar{x}_\mu, \mu)$ は定義できる。

$$J(x, \mu) = \begin{cases} J_-(x, \mu) = D_x f_-(x, \mu) & \text{if } x \in S_- \\ J_+(x, \mu) = D_x f_+(x, \mu) & \text{if } x \in S_+ \end{cases} \quad (3)$$

$\bar{x}_\mu \in S$ のときの (集合値) 一般化ヤコビ行列を以下のように定義する。

$$J(x, \mu) = \{J_q(x, \mu) : q \in [0, 1]\} \quad (4)$$

ただし、

$$J_q(x, \mu) = (1-q) J_-(x, \mu) + q J_+(x, \mu)$$

である。すなわち、 S 上での一般化ヤコビ行列 $J(x, \mu)$ とは $J_-(x, \mu)$ と $J_+(x, \mu)$ の閉凸包である。 $J(x, \mu)$ の固有値は集合 $\{(\lambda_{q,1}, \dots, \lambda_{q,n}) : \det(\lambda_{q,i} I - J_q) = 0, i \in \{1, 2, \dots, n\}, q \in [0, 1]\}$ となる。

4. ハイブリッドシステムの分岐現象

滑らかな微分方程式での分岐現象の研究に比べると、ハイブリッドシステムの分岐現象は十分に解明されていない。ハイブリッドシステム特有の分岐現象は、ベクトル場が滑らかでないことに起因する。

4.1 平衡点の分岐

平衡点が境界 S を横切るときに局所分岐が発生することがある。このとき、平衡点周りの線形化システムのヤコビ行列が境界上では存在せず、その前後で固有値が不連続となるので、このような分岐は不連続分岐と呼ばれることがある⁽¹⁵⁾。不連続分岐は一般化ヤコビ行列を用いて解析することができる。滑らかなシステムの場合と同様にサドル・ノード分岐、トランスクリティカル分岐、ピッチフォーク分岐が発生し得る。滑らかなシステムの場合にはこれらの分岐は平衡点でのヤコビ行列の固有値に0が存在したときに発生する。区分的に滑らかなシステムの場合には式 (1) の平衡点 $\bar{x}_\mu \in S$ で上記のいずれかの分岐が発生するならば

$$\exists q \in [0, 1] : \det J_q(\bar{x}_\mu, \mu) = 0 \quad (5)$$

が成り立つ。つまり、式 (5) は上記の分岐が発生するための必要条件となる。例えば、次のシステムを考える。

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu - |x| \quad (6)$$

$\mu = 0$ のとき、平衡点は $x = 0$ となり、その点での一般化ヤコビ行列は

$$J(0, 0) = \{J_q = -2q + 1 : q \in [0, 1]\} = [-1, 1]$$

となるので、 $q = 1/2$ とおけば、固有値0を持つことになる。このシステムでは図2 (a) のようにサドル・ノード分岐が発生する。これは滑らかなシステム

$$\dot{x} = \mu - x^2$$

とよく似た分岐である。同様にトランスクリティカル分岐とピッチフォーク分岐の例を図2 (b), (c) に示す。

次に以下の二次元システムを考える．

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - 2|x_2 - \mu| - x_1\end{aligned}\quad (7)$$

式(7)の平衡点は

$$x_1 = -2|\mu|, \quad x_2 = 0$$

であり， $\mu = 0$ のとき平衡点でシステムは微分不可能となり，Hopf分岐が発生する．このときの一般化ヤコビ行列は $J(0, 0) = \{J_q : q \in [0, 1]\}$ である．ただし，

$$\begin{aligned}J_q &= q \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + (1-q) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3+q \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$q = 3/4$ のとき， $J_{3/4}$ の固有値は $\pm j$ となる．

このように， $\mu = \mu_b$ で平衡点 $\bar{x}$ がHopf分岐するとき， q を0から1まで動かしたときの $J_q(\bar{x}, \mu_b)$ の固有値の軌跡を複素平面上に描くと，純虚数で虚軸を横切る．しかし，一般にその逆は言えない．また，固有値が虚軸と複数回交差する場合には複雑な分岐が発生し得る．例えば，サドル点，不安定フォーカス，及び安定周期軌道が同時に消滅(または発生)するようなこともある．詳細は文献(15)，(16)を参照されたい．

4.2 周期軌道の分岐

図3に示すようにパラメータ μ が変化し， $\mu = \mu_b$ で周期軌道が境界 S と接したとき，その前後で分岐が観測される．文献(19)によれば，分岐が発生して，軌道が境界 S を滑らかではないが連続的に変化する場合に C -分岐またはborder-collision分岐と呼び，軌道が不連続に変化するときgrazing分岐と分類されている． C -分岐は1970年代にロシアのFeiginによって研究されており^{(20)~(22)}，border-collision分岐は離散時間システムにおいて周期点が境界と衝突することで発生する分岐としてNusseらによって研究された^{(23)，(24)}．ちなみに， C はロシア語の $shivanije$ (「縫う」という意味)に由来している．grazing分岐は主に衝突のある機械システムにおいて研究されており，パラメータの変動によって衝突が発生することが報告されている^{(25)，(26)}．これらの分岐は，当初は全く独立に研究されてきた．しかし，その発生メカニズムはよく似ている⁽²⁷⁾．本稿では，周期軌道が境界と接することで発生する分岐を総称してgrazing分岐と呼ぶことにする．

領域 S_i ($i = -, +$)でのベクトル場が境界 S と接する x の集合を G_i とおく．つまり，

$$G_i = \{s \in S : \langle \nabla H(x), f_i(x) \rangle = 0\} \quad i = -, + \quad (8)$$

(a) サドル・ノード分岐の例 ($\dot{x} = \mu - |x|$ の分岐図)

(b) トランスクリティカル分岐の例

($\dot{x} = |\frac{1}{2}\mu| - |x - \frac{1}{2}\mu|$ の分岐図)

(c) ピッチフォーク分岐の例

($\dot{x} = -x + |x + \frac{1}{2}\mu| - |x - \frac{1}{2}\mu|$ の分岐図)

図2 区分的に滑らかなシステムの平衡点の分岐図 実線は安定な平衡点，点線は不安定な平衡点を表し，線上的数字もしくは区間はその(一般化)固有値である．いずれの分岐においても分岐点での一般化固有値に0が含まれている．

図3 grazing分岐の概念図 パラメータが変化することで、周期軌道が境界 S と衝突することで解が急激に変化する。

もし $G_1 \neq G_2$ ならば、図1に示すようにスライディングモードと呼ばれる境界 S 上を動く解が存在する。ここでは、スライディングモードが発生しないシステムを対象に説明する。以下、 $G_1 = G_2$ とおく。スライディングモードが発生する分岐はsliding分岐とも呼ばれ、詳細は文献(18)を参照されたい。

周期 T の周期軌道 $\Phi(t)$ が点 $\bar{x}$ において境界 S と接したとする。一般性を失うことなく $\Phi(0) = \bar{x}$ においてよい。このとき以下の式が成り立つならばgrazing分岐が発生する⁽²⁷⁾。

$$\Phi(0) = \Phi(T) = \bar{x} \in G_i \quad (9)$$

$$\dot{\Phi}(t) = f(\Phi(t), \mu) \quad (10)$$

$$\nabla H(\bar{x}) \neq 0 \quad (11)$$

$$\langle \nabla H(\bar{x}), f_i(\bar{x}, \mu) \rangle = 0 \quad (12)$$

$$\left. \frac{d^2 H(\Phi(\bar{x}, t))}{dt^2} \right|_{t=0} = \left\langle \nabla H(\bar{x}), \frac{\partial f_i(\bar{x})}{\partial x} f_i(\bar{x}) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 H(\bar{x})}{\partial x^2} f_i(\bar{x}), f_i(\bar{x}) \right\rangle > 0 \quad (13)$$

ここで、式(9)と式(10)は周期軌道 Φ が境界 S 上の点 $\bar{x}$ を通る式(1)の解であること、式(11)は点 $\bar{x}$ で境界 S は特異になっていないこと、式(12)は周期軌道が境界と接していること、そして式(13)は S_- と S_+ での軌道の曲率の符号が同じであることを表しており、ここでは、それが正であると仮定している。

DondeとHskenはシューティング法を用いてgrazing分岐集合を求める方法を提案し、2足歩行ロボットに適用している^{(28), (29)}。Maらは非自律システムの場合も含めた計算方法を提案している⁽³⁰⁾。しかし、多くの研究では、ポアンカレ写像を用いて離散時間システムを求め、離散時間システムのborder-collision分岐として扱うことが多い^{(31), (3)}。また、二次元離散時間システムでは、border-collision分岐に関するノーマルフォームが求められている⁽²³⁾。最近では、分岐の前後では漸近安定であるが境界上にあるときのみ不安定となるdangerous border-collision分岐という現象が報告されている^{(32), (33)}。多くの研究は余次元1の分岐を対象にしていたが、余次元2の分岐の研究も始まっている⁽³⁴⁾。

(a) スイッチトアライバルシステム

(b) スイッチトサーバシステム

図4 スイッチトフローシステム

5. スイッチトフローシステムのカオス制御

5.1 スイッチトフローシステム

スイッチトフローシステムはバッファとサーバからなるシステムで、図4に示すようにスイッチトアライバルシステム(SAS)とスイッチトサーバシステム(SSS)に分類することができる。SASは N 個のバッファが一定の速度でパーツを処理し、1台のサーバが N 個のバッファの中の一つにパーツを供給するシステムである。ここで、供給されるパーツの量とバッファで処理されるパーツの総計は等しいと仮定しておく。サーバのスケジューリングとして、空になったバッファにサーバを切り換えるという単純な規則を用いると、システムの振舞いはカオス的となり、 $N=3$ のときにはその不変測度が求められている⁽³⁵⁾。一方、SSSでは、 N 個のバッファには常に一定の割合でパーツが供給され、サーバが接続されたバッファのみがサーバによって処理される。バッファに供給されるパーツの総量とサーバの処理量が等しいとおく。サーバのスケジューリングとして、接続したバッファが空になったとき最も多くパーツがたまっているバッファに切り換えるという規則を用いる。 $N=3$ のとき、SSSのスケジューリング則は有限オートマトンで記述でき、システムの振舞いは周期的になることが示されている^{(35), (36)}。

このように、バッファとサーバの接続の仕方によってシステムの振舞いが対照的となる。また、SASにおけるカオス的な振舞いを周期軌道に安定化するための規則が提案されている^{(37)~(39)}。

5.2 内部コネクションを持つSAS

N バッファからなるSASをまず考える. $x_i(t)$ を時刻 $t \geq 0$ におけるバッファ i 内のパーツの量とおく. 各バッファ i では単位時間当り $\lambda_i > 0$ のパーツが取り除かれる. サーバは単位時間当り 1 のパーツを供給する. 以下, $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$, $\sum_{i=1}^N x_i(0) = 1$ と仮定する. したがって, 各時刻 $t \geq 0$ で, $\sum_{i=1}^N x_i(t) = 1$ となる. T_n を n 番目の切換が発生したときの時刻とおき, そのとき, サーバが移動するバッファの番号を $l(T_n)$ とおく. ここで,

$$\tau_n = \min_{i \neq l(T_n)} \left\{ \frac{x_i(T_n)}{\lambda_i} \right\} \quad (14)$$

とおくと, $T_{n+1} = T_n + \tau_n$ となる. 時刻 t での状態は次式で与えられる.

$$x_i(t) = \begin{cases} x_i(T_n) - \lambda_i(t - T_n) & \text{if } i \neq l(T_n) \\ x_i(T_n) + (1 - \lambda_i)(t - T_n) & \text{if } i = l(T_n) \end{cases} \quad (15)$$

更に, 状態 $x(t)$ は常に次式の N 次元シンプレックス X の中にある.

$$X = \{x = (x_1, \dots, x_N) : \sum_{k=1}^N x_k = 1, x_k \geq 0\} \quad (16)$$

バッファ切換が, $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow N \rightarrow 1$ となる N 周期軌道がSASには存在する. このとき, バッファ i にサーバが移動したときの状態 $x^{(i)}$ は

$$x^{(i)} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} (1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_{i-1})\lambda_1 \\ \vdots \\ (1 - \lambda_{i-1})\lambda_{i-1} \\ 0 \\ \lambda_i\lambda_{i+1} \\ \vdots \\ (\lambda_i + \dots + \lambda_{N-1})\lambda_N \end{pmatrix} \quad (17)$$

となる.

次に, 図5に示すような $N-1$ 個の内部コネクションのあるSASを考える⁽⁴⁰⁾. ただし, コネクション i はバッファ i と $i+1$ を結合するコネクションで, パーツの流れる方向は i から $i+1$ 方向とする. ここで, μ_i はコネクション i の流速で, 外部から制御できるものとする. このSASのハイブリッドオートマトンによる表現を図6に示す. ここで, 各節点は離散状態を表し, それぞれはどのバッファにサーバが供給しているかを表しており, その離散状態での連続変数に関する微分方程式を節点の中に記述している. 枝上の数式はその離散遷移が生起する条件を表し, その条件を満たしたときには必ずその遷移が生起する. この遷移は「空になったバッファにサーバは切り換える.」という制御則によるものである.

図5 内部コネクションのあるSAS

図6 内部コネクションのあるSASのハイブリッドオートマトンモデル

5.3 カオス制御

制御法の基本的な考え方を述べるために, $N=3$ の場合を考える. このとき, 軌道が図7のようになる. 軌道 abc を安定化したい3周期軌道とする. 軌道が辺 $BC = \{(x_1, x_2, 0) : \sum_{k=1}^3 x_k = 1, x_k > 0\}$ 上の点 $x(x_1, x_2, 0)$ にあるとする. 辺 $AC = \{(0, x_2, x_3) : \sum_{k=2}^3 x_k = 1, x_k > 0\}$ 上の周期点 a に到着するように内部コネクションの速度 μ_1 と μ_2 を指定することができれば, 3周期軌道は安定化される. 周期点 a は

$$a = (0, \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3}, \frac{\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3}).$$

なので, 今, 点 x から出発した軌道が a に到着したとすると,

$$\begin{cases} 0 & = x_1 - (\lambda_1 + \mu_1)t \\ \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3} & = x_2 - (\lambda_2 - \mu_1 + \mu_2)t \\ \frac{\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3} & = 0 + (1 - \lambda_3 + \mu_2)t. \end{cases}$$

が成り立つ. この式から時刻 t を消去すると

$$\frac{\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3} = \frac{1 - \lambda_3 + \mu_2}{\lambda_1 + \mu_1}.$$

となるので、この式を満たすように μ_1 と μ_2 を定めればよい。ここで $\mu_2 = 0$ と選べば、次式が得られる。

$$\mu_1 = -\lambda_1 + \frac{\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3}{\lambda_3} x_1,$$

このように内部コネクションは一つでカオス制御できることが分かる。

同様に、 N バッファの場合に、点 $x(0, x_2, \dots, x_N)$ から出発した軌道が次の切替のときに周期軌道上にあるように制御するためには、次のように μ_i を設定すればよい。

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 1 - \lambda_1 + \frac{(1 - \lambda_1) \lambda_4 \lambda_N}{(\lambda_2 + \dots + \lambda_{N-1}) \lambda_N - \Delta x_N} \\ \mu_2 &= \mu_1 - \lambda_2 + \frac{-\Delta x_2 \lambda_N}{(\lambda_2 + \dots + \lambda_{N-1}) \lambda_N - \Delta x_N} \\ \mu_3 &= \mu_2 - \lambda_3 + \frac{(\lambda_2 \lambda_3 - \Delta x_3) (\lambda_N - \mu_{N-1})}{(\lambda_2 + \dots + \lambda_{N-1}) \lambda_N - \Delta x_N} \\ &\dots \dots \dots \\ \mu_k &= \mu_{k-1} - \lambda_k + \frac{((\lambda_2 + \dots + \lambda_{k-1}) \lambda_k - \Delta x_k) \lambda_N}{(\lambda_2 + \dots + \lambda_{N-1}) \lambda_N - \Delta x_N} \\ &\dots \dots \dots \\ \mu_{N-2} &= \mu_{N-3} - \lambda_{N-2} + \frac{((\lambda_2 + \dots + \lambda_{N-3}) \lambda_{N-2} - \Delta x_{N-2}) \lambda_N}{(\lambda_2 + \dots + \lambda_{N-1}) \lambda_N - \Delta x_N} \\ \mu_{N-1} &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

図7 内部コネクションのある3バッファのSASの位相平面

ただし、 Δx_i は点 x と目標とする周期点との誤差の i 番目の要素である。以上より、 $N-2$ 個の内部コネクションを用いて安定化できることが分かる。

6. ハイブリッドレプリケータダイナミクス

6.1 進化ハイパーゲーム

レプリケータダイナミクスは、複数の集団がゲームを繰り返す行うときの各集団でのプレーヤがとる戦略分布の時間的変化を表すモデルである。レプリケータダイナミクスは生態系の進化のモデルとして提案されたが、今では、経済学、人間行動モデル、創発システムなど様々な分野で使われている。

る。従来のレプリケータダイナミクスでは、他集団の戦略を直接認識できると仮定しているが、ハイパーゲームでは、この仮定を外し、他集団の戦略を何らかの方針に従って解釈し、分類するというのがしばしば行われる。このような状況は、各集団の他集団の戦略に対する解釈を表す解釈関数を導入したモデルで表現できる⁽⁴¹⁾。

多数の主体からなる n 個の集団 $P_1, \dots, P_n$ を考える。集団 P_i の純粋戦略集合を $\Phi_i = \{1, \dots, m_i\}$ とし、各主体は純粋戦略をとると仮定する。集団 P_i ($i \in N = \{1, \dots, n\}$) における戦略分布を P_i の集団状態といい、その集合を S_i とする。 P_i において純粋戦略 $k \in \Phi_i$ をとる主体の割合を s_i^k とおき、 P_i の集団状態を $s_i = (s_i^1, \dots, s_i^{m_i}) \in S_i$ で表す。更に、 Φ_{ij} と S_{ij} をそれぞれ、 P_j の主体の認識する P_i の純粋戦略、集団状態の集合とする。集団状態の組の集合 S を、直積 $S = \times_{i \in N} S_i$ で定義する。 $s \in S$ から s_i を除いたものを $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$ で表す。 $S_{ii} = S_i$ として、 $R_i: \times_{j \in N} S_{ji} \rightarrow \mathbb{R}$ を集団 P_i の利得関数とする。関数 $f_{ij}: S_i \rightarrow S_{ij}$ を P_j の P_i の集団状態に対する解釈関数と呼ぶ。ここで、 f_{ii} は恒等写像 $f_{ii}(s_i) = s_i$ である。 f_{ij} を用いて、集団状態の組 $s \in S$ に対する P_j の解釈を $f_j(s) = (f_{j1}(s_1), \dots, f_{jn}(s_n))$ で表す。以上により、ハイパーゲームにおけるレプリケータダイナミクスは、すべての $i \in N$ と $k \in \Phi_i$ に対して以下のように得られる⁽⁴¹⁾。

$$\dot{s}_i^k = s_i^k [R_i(f_i(e_{m_i}^k, s_{-i})) - R_i(f_i(s))] = \xi_{f_i}^k(s). \quad (19)$$

ここで $e_{m_i}^k$ は、第 k 成分が1の m_i 次元単位列ベクトルである。

6.2 解釈関数の切替を考慮したモデル

一般に、採用する解釈関数が異なれば、得られる利得も変わってくる。そこで、利得が最も高く得られる解釈関数に切り換えるという行為が考えられる。このように集団の状態に応じて解釈関数を切り換えるとき、そのダイナミクスはハイブリッドシステムでモデル化できる^{(43), (44)}。集団 P_i の解釈関数の集合を $\mathcal{F}_i = \{f_i^1, \dots, f_i^{m_{f_i}}\}$ とし、その要素を $f_i \in \mathcal{F}_i$ で表す。また、解釈関数の組の集合を $\mathcal{F} = \times_{i \in N} \mathcal{F}_i$ とし、 $f(s) = (f_1(s), \dots, f_n(s)) \in \mathcal{F}$ とする。 P_i が解釈関数を $f_i^k(s)$ から $f_i^{k'}(s)$ に切り換えることを表す事象を $\sigma_i^{kk'}$ で定義し、そのような事象の集合を Σ とする。 P_i が解釈関数 $f_i^k(s)$ を使い、かつ $f_i^{k'}(s)$ を用いた場合の P_i の主体の平均利得と現在の平均利得との差が $\lambda_i^{kk'} > 0$ 以上であるとき、事象 $\sigma_i^{kk'} \in \Sigma$ が生起すると定める。各集団の解釈関数がこの条件によって離散的に、各集団の集団状態が式 (19) によって連続的に変化するため、このモデルはハイブリッドシステムとなる。したがって、このモデルをハイブリッドオートマトン

$$RD = (\mathcal{F}, S, \mathcal{F}_{init}, S_{init}, \Xi, \Sigma, G) \quad (20)$$

で表すことができる。ここで、 $\mathcal{F}_{init} \times S_{init} \subseteq \mathcal{F} \times S$ は初期状態の集合で、 $\Xi = \{\xi_f: S \rightarrow \times_{i \in N} \mathbb{R}^{m_i}\}_{f \in \mathcal{F}}$ は連続状態の

図8 境界上のヘテロクリニック軌道

図9 f_2 の変化を伴った解軌道の例

フローの集合, $G: \Sigma \rightarrow 2^S$ は各事象に対するジャンプ条件を表す. 各 $f \in \mathcal{F}$ に対してフロー $\xi_f \in \Xi$ は, $\xi_f = (\xi_f^1, \dots, \xi_f^{m_f})$ で, $\xi_f = (\xi_{f1}, \dots, \xi_{fn})$ とし, 式 (19) によって定める. また事象 σ_i^{kk} $\in \Sigma$ に対して,

$$G(\sigma_i^{kk}) = \{s \in S : R_i(f_i^{k'}(s)) - R_i(f_i^k(s)) \geq \lambda_i^{kk}\} \quad (21)$$

と定め, $s \in G(\sigma_i^{kk})$ が成立するとすぐに事象 σ_i^{kk} が生じるとする.

6.3 例題：サッカーのフリーガニズム

例として, 認識される利得が表1であるサッカーのフリーガニズムを考える. 各結果に対して, 一つめの数字がファン

表1 サッカーのフリーガニズムにおける利得

Fans' Game			Authorities' Game		
Beh.	Tou.	Tol.		Int.	Non-Int.
Beh.	3, 5	4, 6	Acc.	1, 2	3, 4
P.H.	2, 3	5, 4	Unacc.	2, 3	4, 1
R.H.	1, 2	6, 1			

の, 二つめの数字が当局の認識する利得をそれぞれ表している. ファン (P_1) の戦略は上から, 当局 (P_2) の戦略は左から順に番号をつけ, ファンのゲームの集団状態を s_1 と s_{21} , 当局のゲームの集団状態を s_{12} と s_2 でそれぞれ表す. 解釈関数の組として $f^1 = (f_1, f_2)$ と $f^2 = (f_1, f_2)$ を考える. ただし $f_1(s) = (s_1, s_2)$ とし, $f_1^1(s) = (s_1^1 + s_2^1, s_2^1)$, $f_1^2(s) = (s_1^1 + s_2^1, s_2^1)$ とする. $\sum s_i^1 = \sum s_i^2 = 1$ に注意すると, 式 (19) より連続時間ダイナミクスは以下のように定式化される.

$$\dot{s}_1^1 = s_1^1 (1 - 2s_2^1) (2s_1^1 + s_2^1 - 2) \quad (22)$$

$$\dot{s}_2^1 = s_2^1 (1 - 2s_2^1) (2s_1^1 + s_2^1 - 1) \quad (23)$$

$$\dot{s}_2^1 = \begin{cases} 2s_2^1 (1 - s_2^1) (1 - 2s_1^1 - 2s_2^1) & \text{for } f_2^1 \\ 2s_2^1 (1 - s_2^1) (1 - 2s_1^1) & \text{for } f_2^2 \end{cases} \quad (24)$$

このダイナミクスは, 集団 P_2 の解釈関数 f_2 が f_2^1 または f_2^2 に固定されている場合, 漸近安定な平衡点は存在せず, S の内部のすべての解軌道が非孤立な周期軌道となっている.

本稿では, 集団 P_2 が解釈関数を f_2 から f_2^2 に, 逆に, f_2^2 から f_2 に相互に変更できるとする. すなわち $\Sigma = \{\sigma_2^{12}, \sigma_2^{21}\}$ とする. 式 (21) から, ジャンプ条件は以下の式より得られる.

$$R_2(f_2^2(s)) - R_2(f_2^1(s)) = -s_1^2 (3 - 4s_2^1) \quad (25)$$

$$R_2(f_2^1(s)) - R_2(f_2^2(s)) = s_1^1 (3 - 4s_2^1) \quad (26)$$

この場合, S 内部の多くの解軌道では f_2 の切替が起るため, 非孤立な周期軌道とはならない. 解軌道は, f_2 の変化に伴って, f^1 上の周期軌道と f^2 上の周期軌道を行き来し, S の境界上にあるヘテロクリニック軌道に収束する. このヘテロクリニック軌道の概略を図8に示し, 漸近する解軌道の例を図9に示す. 図9において, 解軌道がヘテロクリニック軌道に収束する過程で, 鞍点に繰り返し近づくたびに, その近くにとどまる時間が長くなるという現象が見られる. またそれと同時に, f_2 の切替の間隔も長くなっていることが分かる. このような現象は, 一般のレプリケータダイナミクスにおいて, 既に観測されている⁽⁴²⁾. ここで重要なことは, すべての解軌道が非孤立な周期軌道であるような, 非常にシンプルなダイナミクスを切り換えることによって, 図9のような現象が生じ得るということである.

7. おわりに

本稿では, ハイブリッドシステムの一つである区分的に滑らかなシステムにおける非線形現象を中心に紹介した. ハイブリッドシステムの研究は計算機科学の分野においても活発

に研究されており、そこで発達してきた形式的検証法はいわゆる可到達問題をアルゴリズム的に解くことに帰着されている。このことは平衡点の吸引領域を求める問題とみなすこともでき、非線形システム理論との新しい融合領域となるであろう⁽⁴⁵⁾。

また、本稿では触れなかったが、ハイブリッドシステムにおけるフラクタルはニューラルネットワークとも関係する現象であり、興味ある読者は文献⁽⁴⁶⁾、⁽⁴⁷⁾を参考にされたい。

最後に、本稿の執筆の機会を与えて頂いた非線形問題研究専門委員会に感謝する。

文 献

- (1) A. van der Schaft and H. Schumacher, An Introduction to Hybrid Dynamical Systems, Lect. Notes Control Info. Sci., no. 251, 2000.
- (2) 引原隆士, “スイッチング回路の非線形ダイナミクスとその解析,” 計測と制御, vol. 44, no. 7, pp. 440–445, 2005.
- (3) T. Saito, H. Torikai, and W. Schwarz, “Switched dynamical systems with double periodic inputs: an analysis tool and its application to the buck-boost converter,” IEEE Trans. Circuits Syst., I, Fundam. Theory Appl. vol. 47, no. 7, pp. 1038–1046, 2000.
- (4) H. S. Witsenhausen, “A class of hybrid-state continuous-time dynamical systems,” IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-11, no. 2, pp. 161–167, 1966.
- (5) Z. T. Zhusubaliyev and E. Mosekilde, Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems, World Scientific, 2003.
- (6) H. Matsuno, C. Li, and S. Miyano, “Petri net based descriptions for systematic understanding of biological pathways,” IEICE Trans. Fundamentals, vol. E89-A, no. 11, Nov. pp. 3166–3174, 2006.
- (7) H. Nakayama, H. Tanaka, and T. Ushio, “The formulation of the control of an expression pattern in a gene network by propositional calculus,” J. Theoretical Biology, vol. 240, no. 3, pp. 443–450, 2006.
- (8) N. Takahashi, S. Doi, and S. Kumagai, “Switching dynamics, chaos, and singular perturbation analysis of heart arrhythmia,” Proc. NOLTA2006, pp. 71–74, 2006.
- (9) Y. Kon’no, T. Saito, and H. Torikai, “Rich dynamic of pulse-coupled spiking neurons with a triangular base signal,” Neural Networks, vol. 18, pp. 523–531, 2005.
- (10) J. Laugesen and E. Mosekilde, “Border-collision bifurcation in a dynamic management game”, Comput. Oper. Res., vol. 33, no. 2, pp. 464–478, 2006.
- (11) 潮俊光, “ハイブリッドシステムへの誘い,” 計測と制御, vol. 44, no. 7, pp. 429–433, 2005.
- (12) T. A. Henzinger, “The theory of hybrid automata,” Proc. 11th Symp. Logic in Comp. Sci., pp. 278–292, 1996.
- (13) R. Alur, T. A. Henzinger, G. Lafferriere, and G. J. Pappas, “Discrete abstraction of hybrid systems,” Proc. IEEE, vol. 88, no. 7, pp. 971–984, 2000.
- (14) A. F. Filippov, Differential Equation with Discontinuous Right-Hand Side, Kluwer Academic, 1988.
- (15) R. I. Leine and H. Nijmeijer, Dynamics and Bifurcations of Non-Smooth Mechanical Systems, Springer, 2004.
- (16) R. I. Leine and D. H. van Campen, “Bifurcation phenomena in non-smooth dynamical systems,” Eur. J. Mech. A, Solids, vol. 25, no. 4, pp. 595–616, 2006.
- (17) 野波健蔵, 田宏奇, スライディングモード制御, コロナ社, 1994.
- (18) P. Kowalczyk and M. di Bernardo, “Two-parameter degenerate sliding bifurcation in Filippov systems,” Physica D, vol. 204, no. 1, pp. 204–229, 2005.
- (19) M. di Bernardo, N. I. Feigin, S. J. Hogan, and M. E. Homer, “Local analysis of C -bifurcation in n -dimensional piecewise-smooth dynamical systems,” Chaos Solitons Fractals, vol. 10, no. 11, pp. 1881–1908, 1999.
- (20) M. Feigin, “Doubling of the oscillation period with C -bifurcations in piecewise continuous systems,” J. Appl. Math. Mech., vol. 34, no. 5, pp. 822–830, 1970.
- (21) M. Feigin, “On the structure of C -bifurcation boundaries of piecewise continuous systems,” J. Appl. Math. Mech., vol. 42, no. 5, pp. 820–829, 1978.
- (22) M. Feigin, “The increasingly complex structure of the bifurcation tree of a piecewise-smooth system,” J. Appl. Math. Mech., vol. 59, no. 6, pp. 853–863, 1995.
- (23) H. E. Nusse and J. A. Yorke, “Border-collision bifurcation including ‘period two to period three’ for piecewise smooth systems,” Physica D, vol. 57, no. 1, pp. 39–57, 1992.
- (24) H. E. Nusse, E. Ott, and J. A. Yorke, “Border-collision bifurcation: an explanation for observed bifurcation phenomena,” Phys. Rev. E, vol. 49, no. 2, pp. 1073–1076, 1994.
- (25) A. B. Nordmark, “Non-periodic motion caused by grazing incidence in an impact oscillator,” J. Sound Vib., vol. 145, no. 2, pp. 279–297, 1991.
- (26) A. B. Nordmark, “Universal limit mapping in grazing bifurcations,” Phys. Rev. E, vol. 55, no. 1, pp. 266–270, 1997.
- (27) M. di Bernardo, C. J. Budd, and A. R. Champneys, “Grazing and border-collision in piecewise-smooth systems: a unified analytical framework,” Phys. Rev. Lett., vol. 86, no. 12, pp. 2553–2556, 2001.
- (28) V. Donde and I. Hisken, “Shooting for border collision bifurcations in hybrid systems,” Proc. 42nd IEEE CDC, pp. 5514–5519, 2003.
- (29) V. Donde and I. Hisken, “Grazing bifurcations in periodic hybrid systems,” Proc. ISCAS2004, pp. IV-697–IV-700, 2004.
- (30) Y. Ma, S. Banerjee, T. Kousaka, and T. Ueta, “Classification and analytical method of switched dynamical systems,” Proc. NOLTA2006, pp. 63–66, 2006.
- (31) G. Yuan, S. Banerjee, E. Ott, and J. A. Yorke, “Border-collision bifurcations in the Buck Converter,” IEEE Trans. Circuits Syst., I, Fundam. Theory Appl. vol. 45, no. 7, pp. 707–716, 1998.
- (32) M. A. Hassounieh, E. H. Abed, and H. Nusse, “Robust dangerous border-collision bifurcations in piecewise smooth systems,” Phys. Rev. Lett., vol. 92, no. 7, 070201, 2004.
- (33) A. Ganguli and S. Banerjee, “Dangerous bifurcation at border collision: when does it occur?,” Phys. Rev. E, vol. 71, no. 5, 057202, 2005.
- (34) A. B. Nordmark and P. Kowalczyk, “A codimension-two scenario of sliding solution in grazing-sliding bifurcations,” Nonlinearity, vol. 19, no. 1, pp. 1–26, 2006.
- (35) C. Chase, J. Serrano, and P. J. Ramadge, “Periodicity and chaos from switched flow systems: contrasting examples of discretely controlled continuous systems,” IEEE Trans. Autom. Control, vol. 38, no. 1, pp. 70–83, 1993.
- (36) A. S. Matveev and A. V. Savkin, Qualitative Theory of Hybrid Dynamical Systems, Birkhäuser, 2000.
- (37) T. Ushio, H. Ueda, and K. Hirai, “Controlling chaos in a switched arrival system,” Syst. Control Lett., vol. 26, no. 5, pp. 335–339, 1995.
- (38) 潮俊光, 上田秀樹, 平井一正, “ N バックスイッチトアライバルシステムにおけるカオス制御,” 信学論 (A), vol. J81-A, no. 12, pp. 1758–1763, Dec. 1998.
- (39) Y. P. Tian, X. H. Yu, and L. O. Chua, “Time-delayed impulsive control of chaotic hybrid systems,” Int. J. Bifurcation and Chaos, vol. 14, no. 3, pp. 1091–1104, 2004.
- (40) W. Li and T. Ushio, “Control of a chaotic switched arrival system with controlled internal connections,” Int. J. Bifurcation Chaos, vol. 16, no. 3, pp. 701–708, 2006.
- (41) T. Kanazawa, T. Ushio, and T. Yamasaki, “Replicator dynamics of evolutionary hypergames,” IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. A, Syst. Humans vol. 37, no. 1, pp. 132–138, 2007.
- (42) T. Chawanya, “A new type of irregular motion in a class of game dynamics systems,” Prog. of Theor. Phys., vol. 94, no. 2, pp. 163–179, 1995.
- (43) T. Kanazawa and T. Ushio, “Multi-population replicator dynamics with changes of interpretations of strategies,” IEICE Trans. Fundamentals, vol. E89-A, no. 10, pp. 2717–2723, Oct. 2006.
- (44) T. Kanazawa and T. Ushio, “Nonlinear phenomena in hybrid replicator dynamics with changes of interpretation functions,” Proc. NOLTA2006, pp. 167–170, 2006.
- (45) Y. Susuki, T. Hikiyama, and H. Ebina, “Predicting instability of power systems based on hybrid system reachability analysis,” Proc.

NOLTA2006, pp. 75–78, 2006.

- (46) 郷原一寿, “常微分方程式の確率的切り替えとフラクタル,” 計測と制御, vo. 44, no. 7, pp. 434–439, 2005.
- (47) K. Gohara, “Fractals in hybrid systems,” Proc. NOLTA2006, pp. 171–174, 2006.

潮 俊光 (正員)

昭55神戸大・工・システム卒, 昭60同大学院博士課程了, 同年カリフォルニア大研究員, 昭61神戸大助手, 平9阪大大学院基礎工学研究科教授となり, 現在に至る. 離散事象システムのスーパーバイザ制御, リアルタイムシステムの適応的資源配分制御, 非線形システムのカオス制御・カオス同期などの研究に従事, 学術博士, 平18年度論文賞受賞.

金澤 尚史 (正員)

平15阪大・基礎工・システム卒, 平19同大学院システム創成専攻博士課程了, 同年阪大大学院基礎工学研究科助教となり, 現在に至る. 進化ゲーム理論やハイパゲーム理論に関する研究に従事, 博士(工学).