局所特徴に基づく正則化を用いた画像処理と最適化の役割

Image Processing Using Local Regularization: The Role of Optimization

白井啓一郎 Keiichiro SHIRAI
小野峻佑 Shunsuke ONO

馬場達也 Tatsuya BABA
奥田正浩 Masahiro OKUDA

アブストラクト 本稿では、雑音除去や色補正などの様々な画像処理問題を画像の特徴を正則化として取り入れた一種の連続最適化問題として定式化することで見通し良く解決できること、及びそれらの最適化問題を実際に効率的に解く方法について解説する。具体的には、“Color-Lines 特徴”と呼ばれるカラー画像の色分布が色空間において線状に広がる特徴を利用した応用に焦点を絞り、画像処理に伴う最適化特有の定式化・解法テクニックについて筆者らのこれまでの取組みを交えて説明する。

キーワード カラー画像処理、画像復元、局所領域、色線形性、色むら、近接分離最適化

Abstract This tutorial paper explains two subjects: (i) various image processing tasks, such as denoising and color correction, can be resolved by formulating them as optimization problems that incorporate local image features such as regularization and (ii) how to efficiently solve these optimization problems. Specifically, focusing on applications exploiting the virtue of the *color-line feature*, we elaborate on specific techniques required in optimization for image processing from viewpoints of formulation and the solver.

Key words color image processing, image restoration, local image region, color line, color artifact, proximal splitting

1. はじめに

2000 年から 2010 年までの 10 年間で、画像処理とその関連分野も随分と様変わりし、多くの処理において数値最適化が用いられるようになった。例えば、雑音除去やぼけ除去を始めとし、グレースケール画像への着色法 (Colorization)、自然画像に対する被写体と背景の分離法 (Image Matting)、大気中や海中のかすみの低減法 (Dehazing) などの手法が数値最適化を活用することで生み出されてきた。特に 2010 年前後に画像復元の文脈を中心として、微分できない目的関数を扱う比較的大規模な凸最適化問題に対する汎用的な解法が相次いで提案され^{(1)~(5)}、注目を浴びた。今日では、所望の処理結果を最適化問題の解として特徴付けるため、様々な画像処理のための正則化^(注1)が考案されている。そのため、一昔前は“数値最適化”というとおべ

レーションズリサーチの話と感じられていたが、現在では高度な画像処理において必要不可欠な技術であり、その定式化や解法は筆者らを含む画像処理研究者にとっても非常に重要なトピックであると言えるだろう。

画像処理で用いられる最適化手法の傾向としては、雑音除去やぼけ除去など処理結果として直接画素値を求める問題の場合は連続最適化が用いられ^(注2)、領域分割など処理結果のラベルを求める問題の場合は離散最適化が用いられる。求解アルゴリズムについては、連続最適化であれば近接勾配法^{(6)~(9)}や交互方向乗数法 (ADMM)^{(3), (10)~(12)}や主双対近接分離法^{(5), (13), (14)}、離散最適化であれば確率伝搬法^{(15)~(17)}や Graph-Cut^{(18), (19)}が用いられる⁽²⁰⁾。また、画素数や領域数といった変数の個数が通常膨大であるのと、厳密解ではなくもっともらしい解で十分な場合も多いため、離散問題を連続問題に緩和して扱い、十分な精度と速度で求解することも多く試みられている (例えば文献⁽²¹⁾)。

冒頭で述べたように、最適化技術の発展とあいまって画像処理のための正則化が数多く研究され、得られる画像の品質は飛躍的に向上した。その主たるものとして全変動正則化 (TV 正則化: Total Variation regularization)⁽²²⁾が挙げられる。鮮明な画像の色や輝度値は被写体ごとにおおむね一定で平たんであ

白井啓一郎 正員 信州大学工学部

E-mail keiichi@shinshu-u.ac.jp

馬場達也 学生員 北九州市立大学国際環境工学部

E-mail okuda-m@kitakyu-u.ac.jp

小野峻佑 正員 東京工業大学科学技術創成研究院未来産業技術研究所

E-mail ono@isl.titech.ac.jp

奥田正浩 正員 北九州市立大学国際環境工学部

E-mail okuda-m@kitakyu-u.ac.jp

Keiichiro SHIRAI, Member (Faculty of Engineering, Shinshu University, Nagano-shi, 380-8553 Japan), Tatsuya BABA, Student Member, Masahiro OKUDA, Member (Faculty of Environmental Engineering, The University of Kitakyushu, Kitakyushu-shi, 808-0135 Japan), and Shunsuke ONO, Member (Institute of Innovative Research (IIR), Tokyo Institute of Technology, Yokohama-shi, 226-8503 Japan).

電子情報通信学会 基礎・境界サイエンス

Fundamentals Review Vol.11 No.1 pp.40-53 2017 年 7 月

©電子情報通信学会 2017

(注1): 数値最適化の文脈における厳密な意味での正則化 (不良設定の逆問題において解を一意に定める) よりも広義の意味 (自然画像に関する先験情報を処理結果に反映させる) で正則化という言葉を用いる。

(注2): これは、整数値である画素値 (8bit 画像の場合、0 から 255 の整数をとる) を連続値として扱い最適化を行った上で最後に値を丸めても処理結果にほとんど影響を与えないからである。

図 1 全画素の Color-Lines (a) と局所領域の Color-Line (b) と (c). それぞれについて鮮明な画像のもの（上段）と雑音で劣化した画像のもの（下段）を示した．鮮明な画像は鮮鋭な Color-Line をもつ傾向がある

り，被写体間の境界で急しゅんに変化する特徴を持つため，近傍画素との輝度差の絶対値を合計すると，その合計値が小さくなる．これを混合 $\ell_{2,1}$ ノルム（3.2.2 で後述）を用いてモデル化したものが全変動である．提案された当時は全変動正則化が課された最適化問題を解くことは容易ではない（当該ノルムの微分不可能性に起因）と考えられていたが，前述したアルゴリズムの発展により効率的に解けることが分かってきたため，現在では様々な画像処理において全変動正則化が利用されている．このほかにも，ウェーブレット変換などの線形変換を介した画像のスパース性を評価する場合^{(23),(24)}や，画像中のテクスチャパターンを低ランク行列として特徴付ける場合^{(25),(26)}にも微分不可能関数（ ℓ_1 ノルムや核型ノルム）を用いて定式化される正則化が現れる．

このように，多種多様な画像の性質・特徴を正則化として数理的に表現することで様々な画像処理手法の開発・性能向上が実現されてきたが，その際には，当然であるが，後の求解が可能となるように定式化せねばならない．このため，数理最適化の専門家にとって見慣れない（または考慮する必要のない）“画像処理における最適化”の知見が重要となることも多い．以上を踏まえ，本稿では，筆者らが携わってきた「カラー画像の局所領域を持つ特徴」に基づく正則化の研究に焦点を絞り，定式化の指針，及び，最適化におけるポイントについて画像処理の立場から解説を試みる．

1.1 Color-Lines 画像特徴と局所領域の持つ色線形性

本稿で扱う画像特徴は“Color-Lines”と呼ばれるカラー画像の持つ特徴であり，カラー画像中の色の分布（例えば (r, g, b) 値）が色空間において線状に広がる特徴となる（図 1(a)）．また，この特徴は各色成分間の相関曲線に相当するため，色の相関を利用する方法はこの特徴と関連する．この特徴が意図的に利用され始めたのは，文献(27)にて Omer らが陰影と反射の除去や領域分割に利用できることを示した頃からとなる．同文献では全画素の色の分布を用いて，曲線状の分布をクラスタリングし，同一クラスに属する画素の画素値に対して変色などの処理を行う．同様の画像特徴としては，塗料で描かれた背景の見える半透明物体を抽出するための Spider-Model 特徴⁽²⁸⁾な

どがある．

上述の曲線形状で表される Color-Lines 特徴は，画像の小さなパッチ（局所領域）においても観測でき，直線若しくは平面として現れる（図 1(b), (c)）．このような場合，線形代数を用いて表現しやすく，連続最適化を適用しやすくなる．例えば，色の広がり方の特徴（主軸や軸方向への分散）は，その分布の共分散行列の固有ベクトルや固有値として表わせ，色の変色や着色などの処理は，それらの主軸に対する回転やスケールングとして表せる．すなわち，線形作用素とベクトルや行列ノルムの組合せで表せる．以降ではこの“局所的な Color-Line”特徴のことを“色線形性”と略して呼ぶ^(注3)．

色線形性のほかに局所領域の特徴として用いられるものには，エッジ位置のスパース性に関連した全変動量の最小化や，模様を表す周波数大域のスパース性に関連したウェーブレット変換で得られる変換値の最小化などがある．これらと色線形性の違いであるが，これらは画像空間に対して作用し，エッジや模様の見た目に直接的に作用する．ただし，過度に作用させると画像中のエッジや模様が平坦化される問題を招く．一方，色線形性は色空間に対して作用し，エッジや模様に直接作用せず，色の相関に対して作用する．RGB カラー画像では，R, G, B のそれぞれの色には相関があり，多くの場合，各画素の輝度値は連動して変化する．この相関が崩れると色むらや偽色として観察画像に影響が現れる．色線形性を考慮することで，処理画像の各色は連動して変化するようになる．このことは前述のエッジや模様に対しても間接的に作用し，いずれかの色のエッジ情報が不十分な場合でも，他の色の持つエッジ情報から不足した情報を補うことができる．ただし，過度に作用させると，局所領域の色を単一同系色の色へと変化させるため，色数が減少し，鮮やかさが損なわれる問題を招く．

色線形性に関連する最適化問題が扱われ始めたのは，Levin らの自然画像に対する被写体と背景の分離法（Image Matting）⁽²⁹⁾からとなり，同文献中で提案された定式化は現在では他の応用に対しても広く利用されている．その一例としては，色と陰影の分離（Intrinsic Images）⁽³⁰⁾や，高い輝度階調を持つ画像の

（注3）：本稿では，画像全体の持つ複数の色の曲線的な分布を Color-Lines と複数形で呼び，局所領域の持つ色の単一の直線的な分布を Color-Line と区別して呼ぶ．

処理 (High Dynamic Range (HDR) Imaging) ⁽³¹⁾, 色の補正処理 ⁽³²⁾, 補助画像を用いたフィルタリング法 (Cross Filtering / Guided Image Filtering) ⁽³³⁾ などがある。また, 効率的な計算方法についても検討されている。一般的に, 上述の手法の目的関数についての部分問題を解く際には疎な対称行列を扱い, また, 疎とはいえ, 行列として表すには膨大なメモリが必要となる場合が多い。そのため, 共役勾配法を用い, その反復内の行列演算をフィルタリングの組合せに置き換えて計算する ⁽³⁴⁾。そのフィルタリングについても定数時間フィルタ (フィルタサイズに不変な $O(1)$ の計算量のフィルタ) が用いられる ^{(35), (36)}。

筆者らがこれまでに取り組んできた色線形性の応用例としては, 補助画像を用いた色変換の方法 ^{(37), (38)}, 色むらの低減方法 ^{(39), (40)}, 及び, それを発展させて画像のエッジ方向まで考慮した正則化 ⁽⁴¹⁾ がある。その定式化はそれぞれ異なり, 前者は上述の従来法で用いられる Levin らの定式化 ⁽²⁹⁾ に基づき, 後者は局所領域の色データを並べた行列に対する行列ノルムの最小化に基づく。以降の章では, それぞれの定式化の幾何学的な意図や, どのような効果を結果画像に与えるかについて述べる。

以降の章では, **2.** にて Levin らの定式化に基づく正則化について述べ, **3.** にてデータ行列のノルム最小化に基づく正則化について述べる。**4.** にて課題や今後の展望についてまとめる。

2. Levin らの定式化に基づく正則化

多くの従来法で用いられる Levin らの定式化 ⁽²⁹⁾ は, 前章でも述べたように, 局所領域の持つ色の分布形状の回転やスケールリングを扱う問題に帰着し, 色変換やコントラスト補正に関連する。この正則化の意図は, 観測画像 Y と求めたい推定画像 X が局所領域ごとに形状の似た Color-Line を持つのであれば, 画像 X の Color-Line を傾けて移動すれば画像 Y の Color-Line に近づくであろう, また, その逆もしかりとなる。推定画像に対しては平滑化項として機能し, 画像 Y の持つ大まかな色やコントラストを変えつつ, 細かな模様やエッジなどの特徴を引き継いだ画像 X が生成される。以下にその一般形を示す。

2.1 導出方法

ある画素 $i \in \{1, \dots, N\}$ で観測された色 (ここでは RGB 値である) を $[0, 1]$ の範囲に正規化したものを $\mathbf{y}_i \in [0, 1]^3$ と表す。値が 0 であれば暗色, 1 であれば明色となる。以降は簡単のため $\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^3$ と記す。次に, その画素を中心とした局所的な正方領域 (画素集合) $\mathcal{N}_i$ とそこに含まれる画素 j を $j \in \mathcal{N}_i$ と表し, 画素数を M とする (図 2(a))。線形の色変換やコントラスト補正は, 色空間上の点集合 $\mathbf{y}_j$ に対するアフィン変換として表わせ, 線形変換と平行移動を表す行列 $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ と列ベクトル $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ を用いて次のように表せる ^(注4)。

$$\forall j \in \mathcal{N}_i \quad \mathbf{x}_j := \mathbf{A}_i \mathbf{y}_j + \mathbf{b}_i \quad (1)$$

(注4) : 本稿では, 多くの論文で等号「 $=$ 」としてまとめて扱う関係子を, 等号「 $=$ 」, 定義「 $:=$ 」, 代入「 $\leftarrow$ 」として区別して用いる。

図 2 注目画素を中心とする領域と近傍画素の関係。(a) 画素 i を中心とした近傍画素 j , (b) 画素 j を近傍に持つ画素 i_1 と i_2

ここで $\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^3$ は推定したい画素値を表す。この線形変換を全ての画素 i を中心とする領域に対して考え, 各画素ごとに線形作用素 $\mathbf{A}_i$ と $\mathbf{b}_i$ を定義する。なお上式は, ある画素 i を基準として複数の近傍画素 $j \in \mathcal{N}_i$ に対する変換を考えているが, 近傍画素 j を基準とすると, その画素を近傍に持つ画素 i は複数存在し $\{i : j \in \mathcal{N}_i\}$ ^(注5) (図 2(b)), 関与する作用素も複数存在する。よって, 求める画素値 $\mathbf{x}_j$ も唯一ではない。そのため, 唯一の値を与える制約が必要となる。

$$\text{s.t.} \quad \{\mathbf{A}_i, \mathbf{b}_i : \forall i : j \in \mathcal{N}_i \quad \mathbf{x}_j = \mathbf{A}_i \mathbf{y}_j + \mathbf{b}_i\} \quad (2)$$

ただし, このような理想的な線形作用素は, 全画素に対して同じ線形変換を施す場合以外には得られないため ($\forall i \quad \mathbf{x}_i := \mathbf{A}_i \mathbf{y}_i + \mathbf{b}_i$), 二乗誤差を最小とする作用素を求めるような正則化項として表す。なお, 近傍領域は互いに重なり合うため, 式は少し複雑となる ^(注6)。

$$\min_{\{\mathbf{A}_i, \mathbf{b}_i\}} \sum_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_j - \mathbf{A}_i \mathbf{y}_j - \mathbf{b}_i\|^2 \quad (3)$$

ここで $\|\mathbf{x}\|_p := (\sum_i |x_i|^p)^{1/p}$ はベクトルに対する ℓ_p ノルムを表す。また, 通常は過度な色や輝度の変更を抑えるために $\mathbf{A}_i$ に対する正則化が加わる。これより正則化項 $R_{\text{CL}}(\cdot)$ を以下のよう定める。

$$R_{\text{CL}}(\{\mathbf{x}_i\}) := \sum_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_j - \mathbf{A}_i \mathbf{y}_j - \mathbf{b}_i\|^2 + \varepsilon \sum_i \frac{1}{2} \|\mathbf{A}_i\|_F^2 \quad (4)$$

ここで関数の引数 $\{\mathbf{x}_i\}$ に集合記号 $\{\cdot\}$ を用いているのは, 全画素における $\{\mathbf{A}_i, \mathbf{b}_i\}$ の組を求めるのに, 全画素の $\mathbf{x}_i$ を用いることを表す。 $\|\mathbf{A}_i\|_F^2 := \text{tr}(\mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i) = \sum_k \sigma_k(\mathbf{A}_i)^2$ は行列のフロベニウスノルムの二乗を表し, トレース $\text{tr}(\cdot)$ は対角要素の総和を表す。また, 行列 $\mathbf{A}_i$ の特異値 $\{\sigma_k(\mathbf{A}_i)\}_{k=1}^3$ の二乗和でもある。行列の特異値の大きさは, 行列を作用させた後の輝度の値域がどの程度変わるかを表す。その調整パラメータ ε が大きいと, 値域が狭まり, 出力されるパッチ画像のコントラストが低下する。更に, それらが重なり合って推定画像がぼける。そのため, ε は復元される推定画像の状態に合わせて設定する。

2.2 正則化に関する部分問題の解法

上述の正則化を用いた場合, 部分問題として式 (4) を解く必

(注5) : 書式「 $\{\cdot\}$ 変数 : 条件」はある条件を満たす変数の集合を表す。

(注6) : 本稿で用いている $\min$ は全て $\arg \min$ であるが, 簡略して $\min$ と表記する。 $\arg \min$ は最小値を与える最適変数を戻す。戻り値が変数であることを強調する場合に $\arg$ を付加する。

要性が生じる。線形作用素と ℓ_2 ノルムで表された場合は、同式は $R_{\text{CL}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{L} \mathbf{x}$ の二次形式で書き表せ⁽²⁹⁾、その導関数 $\nabla R_{\text{CL}}(\mathbf{x}) = \mathbf{L} \mathbf{x}$ を解を求める際に扱うが、疎行列 $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ の非ゼロの要素数は少なくとも $4MN$ 以上となるため、行列を陽に保持することは困難である。そのため、各行 $(\mathbf{L} \mathbf{x})_i$ ごとに計算を行い、勾配法を用いて解を求める。勾配法ではそれぞれの未知数についての導関数すなわち勾配が必要となるため、それらの導出方法を示す。

まず、 $\mathbf{b}_i$ について偏微分し、導関数の値が 0 となる際の $\mathbf{b}_i^*$ を求めると、次式が得られる。

$$\mathbf{b}_i^* = \bar{\mathbf{x}}_i - \mathbf{A}_i \bar{\mathbf{y}}_i \quad (5)$$

ここで $\bar{\mathbf{x}}_i := \frac{1}{M} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} x_j$ は領域内の画素値の平均値を表す。導出過程はここでは省くが、付録 1. に示す計算を行っていけば得られる。得られた $\mathbf{b}_i^*$ を再び式 (4) に代入すると、 ℓ_2 ノルムの内部は $(\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}_i) - \mathbf{A}_i(\mathbf{y}_j - \bar{\mathbf{y}}_i)$ となり、 $\mathbf{y}_j$ と $\mathbf{x}_j$ から領域の平均値が差し引かれ、色の分布の中心座標を原点へと移す中心化が行われる。

次に、 $\mathbf{A}_i$ について偏微分し、導関数の値が 0 となる際の $\mathbf{A}_i^*$ を求めると、次式が得られる。

$$\mathbf{A}_i^* = \left(\sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}_i)(\mathbf{y}_j - \bar{\mathbf{y}}_i)^\top \right) \left(\sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{y}_j - \bar{\mathbf{y}}_i)(\mathbf{y}_j - \bar{\mathbf{y}}_i)^\top + \varepsilon \mathbf{I} \right)^{-1} \quad (6)$$

一つ目の大括弧内の計算は二つの色の分布 $\{\mathbf{x}_i\}$ と $\{\mathbf{y}_i\}$ の相互共分散行列を表し、二つ目の大括弧内は $\{\mathbf{y}_i\}$ の共分散行列を表す。すなわち、二つの分布の分散のスケール調整が行われる。また、式 (4) で加えた正則化は、単位行列 $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{M \times M}$ となって現れ、色が平たんで $\forall_j \mathbf{y}_j = \bar{\mathbf{y}}_i$ となる領域において、逆行列内部がゼロ行列となるのを防ぐ役目をする。

最後に、 $\mathbf{A}_i^*$ と $\mathbf{b}_i^*$ を式 (4) に代入した後、 $\mathbf{x}_i$ について偏微分すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \nabla R_{\text{CL}}(\mathbf{x}_i) &= \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\mathbf{x}_i - \mathbf{A}_j^* \mathbf{y}_i - \mathbf{b}_j^*) \\ &= M \mathbf{x}_i - \left(\sum_{j \in \mathcal{N}_i} \mathbf{A}_j^* \right) \mathbf{y}_i - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \mathbf{b}_j^* \end{aligned} \quad (7)$$

ここで $\mathbf{A}_i^*$ と $\mathbf{b}_i^*$ は $\mathbf{x}_j$ や $\bar{\mathbf{x}}_i$ を含む関数であるので $\mathbf{x}_i$ での偏微分の対象となるが、平均からの差 $\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}_i$ を扱う特殊な関数であるので、微分結果を整理していくと値が打ち消し合い、置換微分を行わない場合と式の形が等しくなる。詳細については文献 (34) を参照されたい。

勾配降下法を用いる場合は、目的関数の勾配 $\nabla F(\cdot)$ と組み合わせ、以下のように反復計算を行う。

$$\mathbf{x}^{(t+1)} \leftarrow \mathbf{x}^{(t)} - \gamma (\nabla F(\mathbf{x}_i^{(t)}) + \lambda \nabla R_{\text{CL}}(\mathbf{x}_i^{(t)})) \quad (8)$$

ここで t は反復回数、 γ は収束を制御するステップ幅、 λ は正則化用の調整パラメータを表す。従来法では収束の速さを考慮して共役勾配法⁽⁴²⁾を用いることが多い。

2.3 応用例

上述の正則化の応用例として、基となった Levin らの前景と背景の分離法 (Matting)、汎用性の高い補助画像を用いたフィルタリング法 (Cross Filtering)、筆者らの最近の手法での用い方を紹介する。

2.3.1 前景と背景の分離法 (Image Matting)⁽²⁹⁾

観測画像の色 $\mathbf{y}_i$ を基に、背景領域の画素に対して $x_i = 0$ のラベルを、前景領域には $x_i = 1$ を、どちらとも言えない境界領域には $x_i \in [0, 1]$ の実数値 (ソフトなラベル) を割り振ることを目的とする。また、データ項として、ある程度の画素については前景 $\mathcal{F}$ と背景 $\mathcal{B}$ のどちらの画素集合に属するかラベル l (3 値マップ) を与えておく。

$$\begin{aligned} \min_{\{x_i, \mathbf{a}_i, b_i\}} \sum_i \left(\sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{1}{2} (x_j - \mathbf{a}_i^\top \mathbf{y}_j - b_i)^2 + \varepsilon \frac{1}{2} \|\mathbf{a}_i\|_2^2 \right) \\ + \lambda \sum_i \delta_i \frac{1}{2} (x_i - l_i)^2 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\delta_i := \begin{cases} 1 & i \in \{\mathcal{F}, \mathcal{B}\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad l_i := \begin{cases} 1 & i \in \mathcal{F} \\ 0 & i \in \mathcal{B} \\ 0.5 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ここで λ は調整パラメータである。なお、線形作用素の次元は $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^3$ と $b_i \in \mathbb{R}^1$ となり、カラー画像から (輝度値が飽和状態に近い) グレースケール画像への変換とみなせる。また、 $x_i \in [0, 1]$ の範囲制約用の正則化はなく、範囲を超える場合もあるが、最終的に得られた解を $[0, 1]$ へと丸め込む。上式 (9) の勾配は以下のように求まる。

$$\begin{aligned} \nabla R_{\text{CL}}(x_i) + \lambda \nabla F(x_i) = \\ M x_i - \left(\sum_{j \in \mathcal{N}_i} \mathbf{a}_j^* \right)^\top \mathbf{y}_i - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} b_j^* + \lambda \delta_i (x_i - l_i) \end{aligned} \quad (10)$$

なお、 $\mathbf{a}_j^*$ と b_j^* が x_i を含むことに注意されたい。

図 3 に原著論文と同様に共役勾配法を用いて解を収束させた結果を示す。画像サイズは約 750×450 、局所領域サイズは 41×41 (画素)、パラメータは $\lambda = 2 \times 10^3$ 、 $\varepsilon = 5 \times 10^{-4}$ とした。同図は左から原画像、3 値のラベル画像 $\{l_i\}$ 、反復回

図 3 前景と背景分離 (Image Matting) への応用例⁽²⁹⁾。画像の下に数字は共役勾配法の反復回数を表す

数を重ねた画像となる．図の下部に反復回数を記した．64 回の反復時にはほぼ前景と背景に分かれているといえる．なお，本稿には記載していないが，ヤコビ法などの前処理を施すと，より早く収束する．処理時間については，範囲総和の計算に範囲総和テーブル⁽³⁵⁾を用いた場合，MATLAB での実装では反復 1 回当たり 0.1 秒ほどであった（OS: 64bit Win10, CPU: Core i7 2.7GHz, RAM: 24GByte）．

2.3.2 補助画像を用いたフィルタリング法

(Guided Image Filtering)⁽³³⁾

雑音やばけで劣化した画像の修復は，単一画像だけでは難しく，ある程度までの画質には復元できるが，良好な撮影環境で撮られた画質に復元することはほぼ不可能である．しかし，フラッシュ光を用いたりシャッタ速度を変えて撮影した補助的な画像があれば，各々の画像の長所を合わせて良好な画像を作り出せる．入力画像をフィルタ処理する際に，補助画像でフィルタを学習し，そのフィルタを入力画像に対して適用することをクロスフィルタリング，若しくは，ジョイントフィルタリングと呼び^{(43), (44)}，本章で述べた正則化を用いる場合は Guided Image Filtering と呼ばれる⁽³³⁾．

原著論文では各色を独立して処理し，入力画像の画素値を y_i ，補助画像を $\mathbf{g}_i$ とした場合，処理画像 x_i を求めるフィルタリングの式は以下のように与えられる．ただし，入力画像と補助画像は位置ずれを起こしておらず，画素座標が完全に一致することが前提となる．

$$\min_{\{x_i\}} \sum_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{1}{2} (x_i - (\mathbf{a}_j^*)^\top \mathbf{g}_i - b_j^*)^2$$

$$\text{where } \left\{ \mathbf{a}_i^*, b_i^* : \min_{\mathbf{a}_i, b_i} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{1}{2} (y_j - \mathbf{a}_i^\top \mathbf{g}_j - b_i)^2 + \varepsilon \frac{1}{2} \|\mathbf{a}_i\|_2^2 \right\}$$

(11)

入力画像と補助画像の対応する局所領域ごとに独立して線形作用素 $(\mathbf{a}_i^*, b_i^*)$ ，すなわち，フィルタパラメータを求めた後，目的関数を最小化する各画素値 x_i を求める． $\mathbf{a}_i^*$ と b_i^* はそれぞれ式 (5) と (6) において $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) \Rightarrow (y_i, \mathbf{g}_i)$ と書き換えれば値として得られる． x_i については，上式の目的関数の導関数の値を 0 とするように定める．

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \sum_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{1}{2} (x_i - (\mathbf{a}_j^*)^\top \mathbf{g}_i - b_j^*)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \forall_i x_i = \overline{\mathbf{a}_i^*}^\top \mathbf{g}_i + \overline{b_i^*}$$

(12)

反復して解を収束させる必要はなく，高速な処理となる．

図 4 にフラッシュ画像とノーフラッシュ画像の組を用いた処理例を示す．目的は，入力画像 Y となるノーフラッシュ画像 (a) の色味と，ガイド画像 G となるフラッシュ画像 (b) の鮮明さを併せ持つ画像を作り出すこととなる．(c) はエッジ保存平滑化として知られるバイラテラルフィルタリング⁽⁴⁵⁾を用いたクロスフィルタリングの結果であり，ノーフラッシュ画像の雑音除去のために，フラッシュ画像で学習した平滑化フィルタを適用している．(d) は GIF 法⁽³³⁾の結果であり，雑音のないフラッシュ画像の色をノーフラッシュ画像の色へと似せて，ノーフラッ

図 4 補助画像を用いたフィルタリング法 (Guided Image Filtering) への応用例⁽³³⁾．(c) は Bilateral Filter を用いたクロスフィルタリングの結果，(d) は Guided Image Filtering の結果

シュ画像に見える鮮明な画像を作り出している．GIF 法を用いた方が模様が綺麗に残る傾向がある．また，GIF 法では範囲総和の計算において領域サイズに対して定数時間で計算可能な範囲総和テーブル⁽³⁵⁾を使用でき，処理速度が速い．バイラテラルフィルタの定数時間での計算方法も開発されているが^{(46), (47)}，カラー画像を扱う場合に計算量が増える問題がある．

2.3.3 筆者らの取組み^{(37), (38)}

筆者らは Levin らの定式化が色変換に帰着するのではないかと考え，上述のフラッシュ画像とノーフラッシュ画像を用いた色変換を主として開発を進めてきた⁽³⁷⁾．一般形として示した式 (4) を用い， ℓ_2 のベクトルノルムよりも外れ値に対してより頑健な関数 (Estimating Functions)⁽⁴⁸⁾ を用いた場合にどのように求解するかを検討した．ノルムを変更することで，陰影の境界をより鮮明に結果画像に反映できる．また，この定式化が暗に要求している「観測画像 Y と補助画像 G の画素には一切の位置ずれがない」という条件は，実際に撮影するとすると，三脚でカメラの動きを固定して手ぶれを抑え，被写体の動きが止まるのを待つ必要があり，手軽ではない．そのため，領域内の画素対応の代わりに色の広がり方 (統計量) 対応を用いる方法⁽⁴⁹⁾や，画像間の画素の自動対応付けを行ってから処理を行う方法⁽³⁸⁾を提案した．また，これまでに紹介した定式化において現れた入などのパラメータをより扱いやすくするため，データ項を制約条件として扱うなどを試みている．このような場合， ℓ_2 ノルムやフロベニウスノルムを扱うことに特化した最小二乗法や勾配法を使用できず，より汎用的な解法が必要となる．

図 5 手ぶれと色の違いに対応した、補助画像を用いた色補正法⁽³⁸⁾

文献(38)では、三脚なしで撮影を行い、フラッシュ画像 Y と手ぶれしたノーフラッシュ画像 G (SIFT flow 法⁽⁵⁰⁾)を用いて自動位置合わせ済み。図 5(d) 参照。各画像の説明については後述)を用いて処理を行い、手ぶれを吸収してパラメータを調整しやすくするため、次式のように定式化している。また、前項で述べた GIF 法とは観測画像と補助画像が入れ替わる。この理由は、位置合わせ時に補助画像を変形させるため、手ぶれの生じたノーフラッシュ画像であれば、変形による更なる劣化を無視できるためである。

$$\begin{aligned} \min_{\{x_i, a_i, b_i\}} \sum_i \left(\sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{1}{2} (x_j - a_i y_j - b_i)^2 + \varepsilon \frac{1}{2} a_i^2 \right) \\ \text{s.t. } \sqrt{\sum_{i \in \mathcal{M}} (\bar{x}_i - g_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i \in \mathcal{M}} \eta^2} \end{aligned} \quad (13)$$

簡単のために各色独立に処理していたため、ベクトルを含まない式となる。制約条件 (ℓ_2 ノルム球) として表されたデータ項では、自動位置合わせにより対応のとれた画素 $i \in \mathcal{M}$ について、手ぶれの生じた補助画像 g_i と手ぶれに見立てた領域平均色 $\bar{x}_i$ の二乗誤差を考慮している。この制約条件は Matting の式 (9) で用いた正則化に一对一に対応することが知られているが⁽⁵¹⁾、 λ を用いるよりも、このように許容誤差 η を設定して表す方が直感的に画質を調整しやすくなる。当該制約条件は ℓ_2 ノルム球であり、距離射影^(注7)の計算が容易であるため、適切に変数分離を行うことで ADMM や主双対近接分離法によって効率的に解ける。(詳しくは 3.3.2 で説明する式変形や拙著論文⁽³⁸⁾を参照されたい。)

図 5 に上述の手法の処理結果を示す。(a) から (f) の順に、(a) 入力画像 (フラッシュ画像)、(b) 補助画像 (手ぶれしたノーフラッシュ画像)、(c) 入力画像と補助画像の画素位置が一致するように、SIFT flow 法⁽⁵⁰⁾を用いて補助画像を変形させたもの、

(d) 変形時のひずみが少なく、画素対応が信頼できる画素、(e) 参考用の前項で述べた GIF 法⁽³³⁾の結果 (入力画像は (b)、補助画像は (a) となる)、(f) が式 (13) を用いた結果となる。GIF 法では画素の対応に位置ずれが生じると処理結果がぼける傾向がある。一方、式 (13) を用いた場合は、一部に陰影が不自然な箇所はあるが、概ねノーフラッシュ画像 (補助画像) の色味に近い画像をフラッシュ画像 (入力画像) から生成できているといえる。

前項や本項では、主にフラッシュ画像を色変換して新たな画像を生成する方法を紹介したが、この反対のアプローチとして、手ぶれしてはげたノーフラッシュ画像をばけ除去する際に、フラッシュ画像を補助画像として、補助画像のエッジや模様近づけるようにばけ除去を行う方法も提案されている^{(52), (53)}。なお、ばけ除去においても Color-Line が用いられるため^{(54), (55)} (定式化は本稿で述べたものとは異なる)、これらを組み合わせるなどすると、より自然な画像を生成できるかもしれない。

3. データ行列のノルム最小化に基づく正則化

本章で述べる正則化の意図は、色の分布軸に沿った分散の制御となり、図 1 の下段に示したような雑音による劣化で分布が拡散し、形の崩れた Color-Line の形状を、軸周りの分散を狭めることで整え、鮮明な画像の持つ Color-Line の形状に近づけることとなる。この正則化は、データの分布に関する分布軸や分散を解析する主成分分析 (PCA) や、その基幹計算となる固有分解 (EVD) 及び特異値分解 (SVD) と関連する。すなわち、分散はデータの共分散行列の固有値となるため、軸周りの分散を狭めることは、固有値を小さくすることに相当する。また、行列の持つ固有値や特異値の大きさを測るには、それらの総和を表す行列ノルムが利用できる。これより、データ行列の行列ノルムを小さくすれば、分布軸に沿う分散を狭められる。なお、任意の分布軸に沿った分散を制御するには、対応する固有値や特

(注7) : 空でない閉凸集合 C に対する距離射影 P_C は次のように定義される $P_C(\mathbf{x}) := \arg \min_{\mathbf{y} \in C} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ 。

異値に重み付けを施しつつ、行列ノルムの最小化を行う必要があるため、以降にてその方法を述べる。

3.1 導出方法

画素値を一列に並べた列ベクトルを用意する^(注8)。RGB カラー画像として、赤色を $\mathbf{r} := [r_1, \dots, r_N]^\top \in \mathbb{R}^N$ 、ここで N は画素数、緑と青色についても同様に $\mathbf{g}$ と $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$ と表す。なお、 $\mathbf{g}$ と $\mathbf{b}$ は前章で用いた記号とは異なる。これらを列方向、若しくは、行方向に連結させ、全ての色の画素値を並べた行列若しくは列ベクトルとして画像を扱う。

$$\mathbf{X} := [\mathbf{r}, \mathbf{g}, \mathbf{b}] \in \mathbb{R}^{N \times 3}, \quad \mathbf{x} := [\mathbf{r}^\top, \mathbf{g}^\top, \mathbf{b}^\top]^\top \in \mathbb{R}^{3N} \quad (14)$$

なお、ここで述べる正則化単体では前者を用いた方が表しやすいが、後者では色ごとに異なる線形作用素を使用でき、処理の幅が広がるため、以降では全画素値を表す場合には $\mathbf{x}$ を用いる。次に、前章 2. と同様に、画素 i を中心とした局所的な正方領域（画素集合）とそこに含まれる画素を $j \in \mathcal{N}_i$ と表し、これらの画素値 $\mathbf{c}_j := [r_j, g_j, b_j]^\top$ を行方向に並べたデータ行列を定義する（図 6）。

$$\mathbf{X}_i := [\mathbf{c}_{j_1}, \dots, \mathbf{c}_{j_M}]^\top \in \mathbb{R}^{M \times 3} \quad (15)$$

この局所的なデータ行列を用いて、所望の正則化（Local Color Frobenius/Nuclear Norm）は以下に示す行列ノルムの総和として表される。下段の LCN 文を文献(39)で実際に用いた。上段の LCFN は主成分分析との関連を示すために参考用として示す。

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + \begin{cases} \|\mathbf{x}\|_{\text{LCFN}}^{\mathbf{w},2} := \sum_i \frac{1}{2} \|\mathbf{X}_i\|_{F,\mathbf{w}}^2 \\ \|\mathbf{x}\|_{\text{LCN}}^{\mathbf{w}} := \sum_i \|\mathbf{X}_i\|_{*,\mathbf{w}} \end{cases} \quad (16)$$

ここで $f(\cdot)$ はデータ項を表す。行列に対するノルム $\|\mathbf{X}\|_{F,\mathbf{w}}$ と $\|\mathbf{X}\|_{*,\mathbf{w}}$ は、それぞれ重み付きのフロベニウスノルム、及び、核型ノルム^{(39), (57)}を表し、行列 $\mathbf{X}$ の持つ特異値の重み付き和として定義する。

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}_i\|_{F,\mathbf{w}} &:= \left(\sum_{k=1}^3 w_k (\sigma_k(\mathbf{X}))^2 \right)^{1/2} \\ \|\mathbf{X}_i\|_{*,\mathbf{w}} &:= \sum_{k=1}^3 w_k \sigma_k(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (17)$$

ここで $\sigma_k(\cdot)$ は行列の k 番目に大きい特異値を得る関数を表し、正の重み $\mathbf{w} := [w_1, w_2, w_3]^\top \in \mathbb{R}_+^3$ を用いてそれぞれの特異値を制御する。重みの値が大きい特異値ほど、最小化の影響を受けて低減される。次項 3.1.1 で述べるが、主に小さくしたい特異値は 2 番目以降の $k = 2$ と 3 の特異値となる^(注9)。

(注8)：画素の並べ方は、実装に用いるプログラミング言語によるが、行列演算用のライブラリ、主には LAPACK⁽⁵⁶⁾ の仕様に合わせて行優先順（上から下へ、左から右へ）とすると扱いやすい。

(注9)：特異値に施す重みは、 $w_1 \geq w_2 \geq w_3 \geq 0$ の場合は凸関数となるが、ここでは $0 \leq w_1 \ll w_2 \leq w_3$ と設定するため非凸となる。詳細については文献(39)を参照されたい。

図 6 局所領域の次元とデータ行列の次元。領域内の画素値 (a) を行方向に並べてデータ行列を作成する (b)

上式 (17) の行列ノルムの最小化であるが、求まる行列 $\mathbf{X}_i$ のランクを低める意味合いを持つ。行列がランク落ちすることは、すなわち、ある行要素 $\mathbf{c}_j^\top = [r_j, g_j, b_j]$ が他の行要素 $\mathbf{c}_k^\top = [r_k, g_k, b_k]$ の定数倍に近づくことを意味し： $\mathbf{c}_j \approx s \mathbf{c}_k$ 、行要素つまり色の分布が原点を通る直線に近づくことを意味する。色の分布は影の影響を受けると、黒色つまり原点の方向に向かって伸びる傾向があり、この正則化との相性が良い。以降では、この行列ノルムの最小化がどのように色の分布軸と分散に関わるかについて説明する。

3.1.1 主成分分析との関係

画素色を並べたデータ行列から色の分布軸や分散を解析する主成分分析（PCA）について考える。一般的な PCA では、データ行列の共分散の計算とその固有分解を行い、共分散行列の固有値と固有ベクトルを得る。まず、色の分布の中心座標を原点へと移す中心化を行い、データ行列の各列ごとにその平均値を差し引く。行列演算としても書き表せ、以下の中心化行列 $(\mathbf{I} - \mathbf{M})$ との乗算として表せる。

$$\bar{\mathbf{X}}_i := (\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{X}_i, \quad \text{where } \mathbf{M} := \frac{1}{M} \mathbf{1} \mathbf{1}^\top \quad (18)$$

ここで $\bar{\mathbf{X}}_i \in \mathbb{R}^{M \times 3}$ は中心化された行列、 $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{M \times M}$ は単位行列、 $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^M$ は全ての要素が 1 の列ベクトルである。得られた行列 $\bar{\mathbf{X}}_i$ に対して、その転置行列を左から乗算し、領域画素数で除算すると、データの共分散行列 $\mathbf{C}_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ が得られる。加えて、共分散行列を固有分解する。

$$\mathbf{C}_i := \frac{1}{M} \bar{\mathbf{X}}_i^\top \bar{\mathbf{X}}_i = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}^\top, \quad \mathbf{P}^\top = \mathbf{P}^{-1} \quad (19)$$

ここで行列 $\mathbf{\Lambda} := \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ は、対角に固有値 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0$ が並ぶ対角行列となり、行列 $\mathbf{P} := [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ただし $\|\mathbf{p}_i\|_2 = 1$ （単位ベクトル）は固有値に対応する固有ベクトルが列方向に並ぶ行列とする。以降、固有値の大きいものから順に、第一、第二、第三固有値と呼び、対応する固有ベクトルも同様に呼ぶ。この共分散行列の三つの固有ベクトル $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ が色の主たる分布軸を表し（主成分軸と呼ばれる）、固有値 $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ が主成分軸に沿った色の分散を表す。なお、第一主成分軸 $\mathbf{p}_1$ が Color-Line を表し、その軸周りの分散（第一主成分軸に直交する第二、第三主成分軸方向への分散）を狭めたいのであれば、第二固有値 λ_2 と第三固有値 λ_3 を小さくすることが目的となる。

共分散行列の固有値と行列ノルムの関係であるが、中心化された行列を領域画素数を用いて正規化した行列 $\hat{\mathbf{X}} := \frac{1}{\sqrt{M}} \bar{\mathbf{X}}_i$ に対するフロベニウスノルムが固有値の総和の平方根に相当し、以

下の関係を持つ．核型ノルムについても示す．

$$\begin{aligned}\|\hat{\mathbf{X}}\|_F &:= \sqrt{\text{tr}(\hat{\mathbf{X}}^\top \hat{\mathbf{X}})} = \sqrt{\sum_{k=1}^3 \lambda_k} \\ \|\hat{\mathbf{X}}\|_* &:= \sum_{k=1}^3 \sqrt{\lambda_k}\end{aligned}\quad (20)$$

ここで $\text{tr}(\cdot)$ は対角要素の総和を表す^(注10)．なお，式 (17) で用いた特異値とは $\lambda_k = (\sigma_k(\hat{\mathbf{X}}))^2$ の関係がある．また，同式 (17) で用いた $\mathbf{X}_i$ と上式で用いる $\hat{\mathbf{X}}_i$ では固有ベクトルと固有値が変わるが，色の分布は多くの場合，黒色の原点方向に向かって伸びるため，固有ベクトルの向きにさほど変化は生じない．また，第一固有値は大きく変わるが，最小化の対象となる第二，第三固有値は似た値となる．

3.2 正則化に関する部分問題の解法

前章 2.2 と同様に，上述の正則化を用いる場合，部分問題として式 (16) を解く必要性が生じる．フロベニウスノルムの二乗は微分可能であり勾配が求まるが，核型ノルムが微分できない箇所を含むため，ここではそのような関数を扱う方法として近接勾配法について述べる．二つのノルムに関する勾配の計算では，共に行列の特異値分解が必要となるが，特異値に施す処理が異なる．

3.2.1 重み付きフロベニウスノルムの勾配

重み付きのフロベニウスノルムの偏微分は以下の手順で計算できる．まず，行列の特異値分解を $\mathbf{X}_i = \mathbf{U}_i \mathbf{\Sigma}_i \mathbf{V}_i^\top$ と定義する．式 (17) に示した重み付きのフロベニウスノルムは，行列形式では，特異値が対角に並んだ行列 $\mathbf{\Sigma}_i := \text{Diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ と，重みを対角に並べた重み行列 $\mathbf{W} := \text{Diag}(w_1, w_2, w_3)$ を用いて次のように書け，

$$\|\mathbf{X}_i\|_{F, \mathbf{W}}^2 = \text{tr}(\mathbf{\Sigma}_i^2 \mathbf{W}) \quad (21)$$

その勾配は次のように計算できる．

$$\begin{aligned}\nabla \|\mathbf{x}\|_{\text{LCFN}}^{\mathbf{W}, 2} &\Rightarrow \forall_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}_i} \frac{1}{2} \|\mathbf{X}_i\|_{F, \mathbf{W}}^2 = \frac{\text{tr}(\frac{1}{2} \partial \mathbf{\Sigma}_i^2 \mathbf{W})}{\partial \mathbf{X}_i} \\ &= \frac{\text{tr}(\mathbf{\Sigma}_i \partial \mathbf{\Sigma}_i \mathbf{W})}{\partial \mathbf{X}_i} = \dots = \mathbf{U}_i \mathbf{\Sigma}_i \mathbf{W} \mathbf{V}_i^\top\end{aligned}\quad (22)$$

省略部分については後述するが， $\mathbf{X}_i$ を特異値分解し，特異値に対して重み付けを行った後，行列を再構成すれば，勾配が得られる．

上式において最終項を導くには， $\partial \mathbf{\Sigma}_i$ を求める必要があり，特異値分解の両辺に偏微分を施した後 $\partial \mathbf{X}_i = \partial(\mathbf{U}_i \mathbf{\Sigma}_i \mathbf{V}_i^\top)$ ，左側から $\mathbf{U}_i^\top$ を右側から $\mathbf{V}$ を乗算し，式を整理していくと次のように求まる⁽⁵⁹⁾．

$$\begin{aligned}\partial \mathbf{X}_i &= \partial \mathbf{U}_i \mathbf{\Sigma}_i \mathbf{V}_i^\top + \mathbf{U}_i \partial \mathbf{\Sigma}_i \mathbf{V}_i^\top + \mathbf{U}_i \mathbf{\Sigma}_i \partial \mathbf{V}_i^\top \\ \Rightarrow \partial \mathbf{\Sigma}_i &= \mathbf{U}_i^\top \partial \mathbf{X}_i \mathbf{V}_i - \mathbf{U}_i^\top \partial \mathbf{U}_i \mathbf{\Sigma}_i - \mathbf{\Sigma}_i \partial \mathbf{V}_i^\top \mathbf{V}_i \\ &= \mathbf{U}_i^\top \partial \mathbf{X}_i \mathbf{V}_i, \quad (\mathbf{U}_i^\top \partial \mathbf{U}_i \mathbf{\Sigma}_i = \mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}_i \partial \mathbf{V}_i^\top \mathbf{V}_i = \mathbf{0})\end{aligned}$$

(注10)：フロベニウスノルム $\|\hat{\mathbf{X}}\|_F$ については，式 (19) の関係を代入すると，交換則 $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$ ⁽⁵⁸⁾ より $\sqrt{\text{tr}(\mathbf{PAP}^{-1})} = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{PA})} = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{A})}$ と求まる．

(23)

この値を上式 (22) に代入し， $\text{tr}(\cdot)$ の交換則⁽⁵⁸⁾を用いれば，省略箇所が以下のように求まる．

$$\begin{aligned}\frac{\text{tr}(\mathbf{\Sigma}_i \partial \mathbf{\Sigma}_i \mathbf{W})}{\partial \mathbf{X}_i} &= \frac{\text{tr}(\mathbf{\Sigma}_i (\mathbf{U}_i^\top \partial \mathbf{X}_i \mathbf{V}_i) \mathbf{W})}{\partial \mathbf{X}_i} \\ &= \frac{\text{tr}((\mathbf{V}_i \mathbf{W}) (\mathbf{\Sigma}_i \mathbf{U}_i^\top \partial \mathbf{X}_i))}{\partial \mathbf{X}_i} = (\mathbf{V}_i \mathbf{W} \mathbf{\Sigma}_i \mathbf{U}_i^\top)^\top\end{aligned}\quad (24)$$

3.2.2 核型ノルムに対する近接勾配法及び近接写像

核型ノルム $\|\mathbf{X}_i\|_* := \text{tr}(|\mathbf{\Sigma}_i|)$ は絶対値が関係し，微分できない点を持つ（関数の出力値は連続であるが，その値が急にゆんに変化する点を持つ）．そのような点では勾配が一意に定まらないため，代わりに近接勾配法⁽⁶⁾・⁽⁷⁾を用いて，他の微分可能な項の助けを借りて勾配を一意に定める．

正則化を加えた目的関数が，微分可能な項 $f(\mathbf{x})$ と核型ノルムを扱う正則化項 $g(\mathbf{x})$ で表されるとすると： $f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ ，近接勾配法の t 反復目の解の更新式は次のように与えられる．

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(t+1)} &\leftarrow \arg \min_{\mathbf{x}} \left\{ \nabla f(\mathbf{x}^{(t)})^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(t)}) \right. \\ &\quad \left. + g(\mathbf{x}) + \frac{1}{2\gamma} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(t)}\|_2^2 \right\}\end{aligned}\quad (25)$$

これは現在の解 $\mathbf{x}^{(t)}$ の付近で， $f(\cdot)$ を一次近似した関数と $g(\cdot)$ とを足し合わせた関数に接する二次形式の関数を考え，その最小値を与える点（勾配方向に下った点）を解として求めることに相当する．パラメータ γ は二次形式の関数の広がり幅を制御し，勾配法におけるステップサイズに相当する．最小化問題となるが， $g(\cdot)$ の構造が単純であれば解析的に解が求まる．また，次式で定義される近接写像（proximity operator）と呼ばれる写像を用いると，

$$\text{prox}_{\gamma g(\cdot)}(\mathbf{y}) := \arg \min_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}) + \frac{1}{2\gamma} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 \quad (26)$$

上式 (25) は，以下のような前述の勾配法での更新式 (8) に近接写像を施した形で表せる．

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{(t)} \leftarrow \mathbf{x}^{(t)} - \gamma \nabla f(\mathbf{x}^{(t)}) \\ \mathbf{x}^{(t+1)} \leftarrow \text{prox}_{\gamma g(\cdot)}(\mathbf{y}^{(t)}) \end{cases} \quad (27)$$

これより，核型ノルムの近接写像 $\text{prox}_{\gamma \|\cdot\|_*}(\mathbf{Y}_i)$ が帰着する計算が分かればよく，その計算が行列 $\mathbf{Y}_i$ の微小な特異値を除去するしきい値処理（縮退処理：shrinkage）となることが知られている⁽⁶⁰⁾．本章で扱う重み付きの場合は以下のように与えられる⁽³⁹⁾・⁽⁵⁷⁾．

$$\begin{aligned}\text{prox}_{\gamma \|\cdot\|_{\text{LCNN}}^{\mathbf{W}, 2}}(\mathbf{y}) &\Rightarrow \forall_i \mathbf{X}_i := \text{prox}_{\gamma \|\cdot\|_{*, \mathbf{W}}}(\mathbf{Y}_i) \\ &\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{U}_i \mathbf{\Sigma}_i \mathbf{V}_i^\top \leftarrow \mathbf{Y}_i \\ \mathbf{X}_i \leftarrow \mathbf{U}_i \mathbf{S}_\gamma^\mathbf{W}(\mathbf{\Sigma}_i) \mathbf{V}_i^\top \end{cases}\end{aligned}\quad (28)$$

ここで $\mathbf{S}_\gamma^\mathbf{W}(\cdot)$ は行列 $\mathbf{\Sigma}_i$ の対角に並ぶ特異値 $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ を次のように処理する縮退関数である^(注11)．

(注11)：式 (29) の書式は「関数名：入力変数の次元 $\mapsto$ 出力変数の次元：入力変数 $\mapsto$ 出力変数を兼ねる関数内で行われる計算」となる．

$$\mathcal{S}_\gamma^w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ : \sigma_i \mapsto \max(\sigma_i - \gamma w_i, 0) \quad (29)$$

3.3 応用例

上述の正則化の応用例として、筆者らの色むら兼雑音の除去法を二つ紹介する^{(39), (40)}。色むら、色のにじみ、偽色などは、雑音の混入や、被写体と背景の境界部分で色の混じり合いや、画像圧縮時に本来の色情報が欠落するなどして生じる。その際、色が拡散して Color-Line の形状が崩れる傾向があり、Color-Line から大きく外れた色（外れ値）が偽色として観察される。この色の分散を Color-Line に寄せ、色むらを除去しつつ、輝度雑音も除去することを目的とする。まず、主成分分析に基づく方法を述べ⁽⁴⁰⁾、次に、核型ノルムに基づく方法を述べる⁽³⁹⁾。

3.3.1 主成分分析に基づく色むら除去法⁽⁴⁰⁾

まず、観測された画像を初期値として、局所領域 $\mathbf{X}_i$ の持つ Color-Line を求めるため、式 (19) の主成分分析を行い、第一固有ベクトル $\mathbf{p}_1 : \|\mathbf{p}_1\|_2 = 1$ を Color-Line として得る。そして、領域の中心画素 $\mathbf{x}_i$ のみについて、Color-Line に沿った方向への領域中心色 $\boldsymbol{\mu}_i$ からの変化量 $d_i \in \mathbb{R}$ 、及び、Color-Line に直交する方向への残差ベクトル $\boldsymbol{\gamma}_i \in \mathbb{R}^3$ を得る。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_i^{(t)}, d_i^{(t)}, \boldsymbol{\gamma}_i^{(t)} &\leftarrow \text{decomp}(\mathbf{X}_i^{(t)}) \\ &:= \begin{cases} \mathbf{p}_{1,i}, \boldsymbol{\mu}_i^{(t)} \leftarrow \text{PCA}(\mathbf{X}_i^{(t)}) \\ d_i^{(t)} \leftarrow \mathbf{p}_{1,i}^\top (\mathbf{x}_i^{(t)} - \boldsymbol{\mu}_i^{(t)}) \\ \boldsymbol{\gamma}_i^{(t)} \leftarrow \mathbf{x}_i^{(t)} - (\mathbf{p}_{1,i} d_i^{(t)} + \boldsymbol{\mu}_i^{(t)}) \end{cases} \end{aligned} \quad (30)$$

図 7 にそれぞれ記号に対応する成分画像を示す。Color-Line に画素値を近づけるには、残差ベクトルの大きさ $\|\boldsymbol{\gamma}_i\|_2$ を小さくすればよいので、これに対して縮退処理を施す。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}_i^{(t+1)} &\leftarrow \frac{\boldsymbol{\gamma}_i^{(t)}}{\|\boldsymbol{\gamma}_i^{(t)}\|_2} \cdot \text{shrink}_\kappa(\|\boldsymbol{\gamma}_i^{(t)}\|_2), \\ \text{where } \text{shrink}_\kappa(x) &:= x \cdot \frac{x^2}{\kappa + x^2} \end{aligned} \quad (31)$$

実験では $\kappa = 2 \times 10^{-4}$ とした。これより、Color-Line の軸に近い値はより軸に近づき、一定距離離れた値はその距離を保つ。次に、Color-Line に沿った変化量 d_i は概ね輝度値を表し、Color-Line 方向にその値を変化させるのであれば色むらは生じないと仮定して、既存の平滑化を施す。

$$d_i^{(t+1)} \leftarrow \text{smooth}(d_i^{(t)}) \quad (32)$$

同文献では異方性拡散⁽⁶¹⁾及び BM3D⁽⁶²⁾と呼ばれる平滑化を用いている。この更新された二つのベクトルを用いて、画素値を再構成する。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i^{(t+1)} &\leftarrow \text{comp}(\boldsymbol{\mu}_i^{(t)}, d_i^{(t+1)}, \boldsymbol{\gamma}_i^{(t+1)}) \\ &:= \boldsymbol{\mu}_i^{(t)} + \mathbf{p}_{1,i} d_i^{(t+1)} + \boldsymbol{\gamma}_i^{(t+1)} \end{aligned} \quad (33)$$

以上の式 (30)~(33) の処理を 3 ~ 4 回繰り返すことで、色むらやカラー雑音が低減された画像が得られる。

図 8 は Tschumperlé らの異方性拡散での平滑化に⁽⁶¹⁾、上述のアルゴリズムを組み合わせた結果となる。左から順に、(a) 雑音を付加した画像、(b) RGB 色空間での異方性拡散の結果（各色を独立処理）、(c) YCbCr 色空間で処理した結果（色変換により相関を生み出した後、各色を独立処理）、(d) 提案アルゴリズムの式 (32) に組み合わせた結果、(e) 原画像となる。(b), (c), (d) の順に色成分の間の相関が強まり、図の結果においても色むらがこの順に低減されているのが分かる。

図 7 PCA に基づく色むら除去法での入力画像の色成分の分解結果。左から順に、(a) 入力画像、(b) Color-Line ベクトル成分、(c) 領域の平均色、(d) Color-Line に沿った変化量、(e) Color-Line に直交する変化量を表す

図 8 PCA に基づく色むら除去法のシミュレーション結果。3 回反復させた

3.3.2 核型ノルムに基づく色むら除去法⁽³⁹⁾

ここでは現在の多くの画像処理で用いられている全変動 (TV) 正則化と LCNN 正則化を組み合わせる用い、得られる画質を更に改善する方法を紹介する. TV 正則化は、微分フィルタ行列と混合 $\ell_{2,1}$ ノルムの組としてモデル化したものであり、カラー画像のような多値に適用したものは Vectorial TV (VTV) 正則化⁽⁶³⁾と呼ばれる.

まず、観測画像と推定したい画像を全色・全画素を行方向に並べたベクトル $\mathbf{y} := [\mathbf{r}^\top, \mathbf{g}^\top, \mathbf{b}^\top]^\top$ と $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3N}$ として表す (式 (14)). VTV 正則化では近傍画素との画素値の変動 (差分) を用い、全画素に対して一括して差分を求める計算を微分フィルタリングで行い、表記の際はフィルタ行列として表す.

$$\begin{aligned} \forall_i \Delta r_i &:= r_i - r_{i+1}, \quad \Delta g_i := g_i - g_{i+1}, \quad \Delta b_i := b_i - b_{i+1} \\ \Rightarrow \mathbf{D}\mathbf{x}, \quad \text{where } \mathbf{D} : \mathbb{R}^{3N} &\rightarrow \mathbb{R}^{6N} : \mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}_v^\top, \mathbf{x}_h^\top]^\top \end{aligned} \quad (34)$$

なお、画素が二次元に並ぶ画像では、垂直と水平方向の二つの方向への微分を考慮するため、それぞれの方向への微分フィルタリングの結果 (上式では $\mathbf{x}_v$ と $\mathbf{x}_h$) を行方向に並べて表す. この処理結果について、各画素ごとに二乗和とその平方根を計算し、全画素で総和を取りまとめたものが混合 $\ell_{2,1}$ ノルムとなる.

$$\begin{aligned} \sum_i \sqrt{((\Delta_h r_i)^2 + (\Delta_v r_i)^2) + ((\Delta_h g_i)^2 + (\Delta_v g_i)^2) + ((\Delta_h b_i)^2 + (\Delta_v b_i)^2)} \\ \Rightarrow \|\mathbf{D}\mathbf{x}\|_{2,1} \end{aligned}$$

$$\text{where } \|\cdot\|_{2,1} : \mathbb{R}^{6N} \rightarrow \mathbb{R}_+ : \sum_{i=1}^N \sqrt{\sum_{j=0}^5 x_{i+jN}^2} \quad (35)$$

この VTV 正則化と LCNN 正則化を用いて、色むら除去法を以下のように定式化する. ここでは観測値を $\mathbf{y}$ とする.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \|\mathbf{D}\mathbf{x}\|_{2,1} + \lambda \|\mathbf{x}\|_{\text{LCNN}}^{\mathbf{w}} \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \mathbf{x} \in \mathcal{B}_{\mathbf{y}, \varepsilon} := \{\mathbf{x}' : \|\mathbf{x}' - \mathbf{y}\|_2 \leq \varepsilon\} \\ \mathbf{x} \in [0, 1]^{3N} \end{cases} \end{aligned} \quad (36)$$

VTV 正則化が輝度の平滑化を担い、LCNN 正則化が Color-Line の形状を整える役割を担う. 制約条件の一つ目はデータ項を表し、原画像との誤差がしきい値以下となるように平滑化の影響をとどめ、しきい値パラメータ ε を直感的に操作できるように、意図的にノルム球の制約として表す. 二つ目は解に対する範囲制約となる.

上式 (36) の解くアルゴリズムとしては、例えば ADMM (Alternating Direction Method of Multipliers)^{(3), (10)~(12)} が使用できる. ADMM は凸関数を対象とした凸最適化アルゴリズムであるが、構造が単純な関数や制約集合であれば、非凸なものも扱え、汎用的な求解アルゴリズムとして重宝される. ここでは重み付きの LCNN 正則化が、内部で用いる重みの割当て方のために非凸な関数となる.

まず、全ての制約を指示関数 $\iota_{\mathcal{C}}(\cdot)$ で表して目的関数に加え、

$$\min_{\mathbf{x}} \quad \|\mathbf{D}\mathbf{x}\|_{2,1} + \lambda \|\mathbf{x}\|_{\text{LCNN}}^{\mathbf{w}} + \iota_{\mathcal{B}_{\mathbf{y}, \varepsilon}}(\mathbf{x}) + \iota_{[0,1]^{3N}}(\mathbf{x}),$$

$$\text{where } \iota_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}) := \begin{cases} 0 & \mathbf{x} \in \mathcal{C} \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases} \quad (37)$$

更に、全て微分不可能な点を持つ関数であるため、その内部変数を別の変数で置き換え、変数を分離する. なお、このとき LCNN については、局所領域ごとに独立して変数を用意する.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \|\mathbf{z}_1\|_{2,1} + \lambda \sum_i \|\mathbf{z}_{2,i}\|_{*,\mathbf{w}} + \iota_{\mathcal{B}_{\mathbf{y}, \varepsilon}}(\mathbf{z}_3) + \iota_{[0,1]^{3N}}(\mathbf{z}_4) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{z}_1 = \mathbf{D}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{6N}, \quad \mathbf{z}_{2,i} = \mathcal{P}_i \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{M \times 3}, \\ & \mathbf{z}_3 = \mathbf{x}, \quad \mathbf{z}_4 = \mathbf{x} \end{aligned} \quad (38)$$

ここで $\mathcal{P}_i$ は列ベクトルから i 番目の局所領域のデータ行列を取得する作用素 (permutation) である. 次に、問題 (38) の拡張ラグランジュ関数を次のように導入する.

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, \{\mathbf{z}_k\}_{k=1}^4, \{\mathbf{u}_k\}_{k=1}^4) := & \|\mathbf{z}_1\|_{2,1} + \frac{\rho_1}{2} \|\mathbf{z}_1 - (\mathbf{D}\mathbf{x} + \mathbf{u}_1)\|_2^2 \\ & + \lambda \sum_i \|\mathbf{z}_{2,i}\|_{*,\mathbf{w}} + \sum_i \frac{\rho_2}{2} \|\mathbf{z}_{2,i} - (\mathcal{P}_i \mathbf{x} + \mathbf{u}_{2,i})\|_F^2 \\ & + \iota_{\mathcal{B}_{\mathbf{y}, \varepsilon}}(\mathbf{z}_3) + \frac{\rho_3}{2} \|\mathbf{z}_3 - (\mathbf{x} + \mathbf{u}_3)\|_2^2 \\ & + \iota_{[0,1]^{3N}}(\mathbf{z}_4) + \frac{\rho_4}{2} \|\mathbf{z}_4 - (\mathbf{x} + \mathbf{u}_4)\|_2^2 \end{aligned} \quad (39)$$

ここで、各行が前述の式 (26) で定義した近接写像 $\text{prox}_{\gamma F}(\cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}) := \arg \min_{\mathbf{z}} \gamma F(\mathbf{z}) + \frac{1}{2} \|\mathbf{z} - (\cdot \mathbf{x} + \mathbf{u})\|_2^2$ の形で表されていることに留意されたい. 各二次形式に付加されたパラメータ ρ_k は収束を制御するステップ幅となる.

上式 (39) で表された拡張ラグランジュ関数を用いて、ADMM の求解アルゴリズムは次のように与えられる.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(t+1)} &\leftarrow \arg \min_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \{\mathbf{z}_k^{(t)}\}_{k=1}^4, \{\mathbf{u}_k^{(t)}\}_{k=1}^4) \\ \forall_k \quad \mathbf{z}_k^{(t+1)} &\leftarrow \arg \min_{\mathbf{z}_k} L(\mathbf{x}^{(t+1)}, \mathbf{z}_k, \mathbf{u}_k^{(t)}) \\ \forall_k \quad \mathbf{u}_k^{(t+1)} &\leftarrow \arg \min_{\mathbf{u}_k} L(\mathbf{x}^{(t+1)}, \mathbf{z}_k^{(t+1)}, \mathbf{u}_k) \end{aligned} \quad (40)$$

つまり、式 (39) を $\mathbf{x}$ について解いた後、それぞれの $\mathbf{z}_k$ について個別に解き (近接写像を求め)、最後に $\mathbf{u}_k$ について個別に解くこととなる. なお、一つの変数について求解している際には、他の変数を固定し、定数として用いる. 上の順序に従って部分問題を解いていくと、以下の計算に帰着する.

まず、 $\mathbf{x}$ については、関係するのは全て二次形式の関数であるので簡単に偏微分でき、次のようにまとめられ、共役勾配法を用いるなどすれば解ける.

$$\begin{aligned} (\rho_1 \mathbf{D}^\top \mathbf{D} + \rho_2 \sum_i \mathcal{P}_i^* \mathcal{P}_i + (\rho_3 + \rho_4) \mathbf{I}) \mathbf{x} = & (\rho_1 \mathbf{D}^\top (\mathbf{z}_1^{(t)} - \mathbf{u}_1^{(t)}) + \rho_2 \sum_i \mathcal{P}_i^* (\mathbf{z}_{2,i}^{(t)} - \mathbf{u}_{2,i}^{(t)}) \\ & + \rho_3 (\mathbf{z}_3^{(t)} - \mathbf{u}_3^{(t)}) + \rho_4 (\mathbf{z}_4^{(t)} - \mathbf{u}_4^{(t)})) \end{aligned} \quad (41)$$

ここで転置フィルタ行列 $\mathbf{D}^\top$ は $\mathbf{D}$ のフィルタリング方向を 180 度反転させたフィルタリングを表す. $\mathcal{P}_i^* : \mathbb{R}^{M \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{3N}$ は

図 9 核型ノルムに基づく色むら除去法での入力画像の色成分の分解結果

$\mathcal{P}_i$ で取得した要素位置に値を戻し、それ以外の要素値は全てゼロで埋めたベクトルを生成する作用素となる．全ての画素が局所領域として同じ回数取り出される場合（例えば均等間隔でオーバーラップした方形領域）、 $\sum_i \mathcal{P}_i^* \mathcal{P}_i$ は単位行列の整数倍となり、結果として (41) の線形方程式系は高速フーリエ変換を利用して効率的に計算可能となる．

次に、それぞれの $\mathbf{z}_k$ を用いた近接写像は以下の計算に帰着する⁽⁶⁴⁾．

$$\begin{aligned}
 \mathbf{z}_1^{(t+1)} &\leftarrow \text{prox}_{\frac{1}{\rho_1} \|\cdot\|_{2,1}}(\mathbf{D}\mathbf{x}^{(t+1)} + \mathbf{u}_1^{(t)}) \\
 &\Rightarrow [\text{prox}_{\gamma \|\cdot\|_{2,1}}(\mathbf{v})]_i \\
 &= v_i \left(1 - \frac{\gamma}{\max(\gamma, \sqrt{\sum_{j=0}^5 v_{\text{mod}(i-1, N)+1+Nj}^2})}\right) \\
 \forall_i \mathbf{z}_{2,i}^{(t+1)} &\leftarrow \text{prox}_{\frac{\lambda}{\rho_2} \|\cdot\|_{*,w}}(\mathcal{P}_i \mathbf{x}^{(t+1)} + \mathbf{U}_{2,i}^{(t)}) \\
 &\Rightarrow \text{see Eqs. (28), (29)} \\
 \mathbf{z}_3^{(t+1)} &\leftarrow \text{prox}_{\frac{1}{\rho_3} \mathcal{B}_{\mathbf{y},\varepsilon}}(\mathbf{x}^{(t+1)} + \mathbf{u}_3^{(t)}) \\
 &\Rightarrow \text{prox}_{\gamma \mathcal{B}_{\mathbf{y},\varepsilon}}(\mathbf{v}) = \begin{cases} \mathbf{v} & \|\mathbf{v} - \mathbf{y}\|_2 \leq \varepsilon \\ \mathbf{y} + \varepsilon \frac{\mathbf{v} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{v} - \mathbf{y}\|_2} & \text{otherwise} \end{cases} \\
 \mathbf{z}_4^{(t+1)} &\leftarrow \text{prox}_{\frac{1}{\rho_4} [0,1]^{3N}}(\mathbf{x}^{(t+1)} + \mathbf{u}_4^{(t)}) \\
 &\Rightarrow [\text{prox}_{\gamma [0,1]^{3N}}(\mathbf{v})]_i = \max(0, \min(1, v_i))
 \end{aligned} \tag{42}$$

ここで $[\cdot]_i$ は要素ごとの計算を表す．上から順に、縮退、特異値に対する縮退、正規化、範囲の丸め込みの処理を表す．剰余演算 mod を含む平方根の箇所は、同一画素における隣接差分ベクトル（縦横 × RGB の 6 次元）の ℓ_2 ノルムを計算していることに相当する．

最後に、それぞれの $\mathbf{u}_k$ に関する最小化は、以下の単純な更新式として与えられる．

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_1^{(t+1)} &\leftarrow \mathbf{u}_1^{(t)} + \mathbf{D}\mathbf{x}^{(t+1)} - \mathbf{z}_1^{(t+1)} \\
 \forall_i \mathbf{U}_{2,i}^{(t+1)} &\leftarrow \mathbf{U}_{2,i}^{(t)} + \mathcal{P}_i \mathbf{x}^{(t+1)} - \mathbf{z}_{2,i}^{(t+1)} \\
 \mathbf{u}_3^{(t+1)} &\leftarrow \mathbf{u}_3^{(t)} + \mathbf{x}^{(t+1)} - \mathbf{z}_3^{(t+1)} \\
 \mathbf{u}_4^{(t+1)} &\leftarrow \mathbf{u}_4^{(t)} + \mathbf{x}^{(t+1)} - \mathbf{z}_4^{(t+1)}
 \end{aligned} \tag{43}$$

図 9 に応用例として述べた VTV 正則化⁽⁶³⁾と LCNN 正則化⁽³⁹⁾を用いたシミュレーション結果を示す．なお、LCNN 正則化は色むら除去に対して有効に働くが、輝度雑音に対しては雑音除去効果を持たないため、VTV 正則化と組み合わせて用いる．同図は左から順に、(a) 原画像、(b) ごま塩雑音を加えて劣化させた画像、(c) VTV の結果、(d) VTV 正則化と LCNN 正則化の結果となる．雑音が付加された画像の Color-Line からは、原画像の Color-Line の形状を推定することは難しく見えるが、VTV 正則化と LCNN 正則化を組み合わせた結果である (d) を見ると、原画像の Color-Line に近い形状が復元されていることが分かる．また、復元された画像についても、原画像の特徴的な模様が復元できており、Color-Line を考慮することの有効性が伺える．

4. 課題と今後の展望

ここまで話に上げた正則化は、紹介ということで細かい箇所には触れなかったが、より自然な画像を得るためにはこれらを工夫して用いる必要がある．ここでは“Color-Lines”画像特徴に基づく正則化の課題と今後の展望を述べる．

Levin らの定式化では、式 (4) を見てみると要素の二乗和である ℓ_2 ノルムで構成されており、この場合、解が外れ値の影響を受ける可能性を持つ．すなわち、Color-Line が外れ値の方へと傾き、所望の色とは異なる色が生じる．例えば、今回の応用例でも示したフラッシュ画像とノーフラッシュ画像の色変換では、フラッシュ光により反射光や影が生じると、それらが外れ値となり、これらの周辺の領域に変色やぼけを招く．そのため、より外れ値に対して頑健な定式化が望まれ、また、通常そのような定式化は解きにくい場合が多いため、いかに効率良く解け

るかを検討する必要がある。

例えば、筆者らは ℓ_2 ノルムの代わりに、ロバスト関数⁽⁴⁸⁾を用いることを試み⁽³⁷⁾、同文献では反復再重み付け最小二乗法 (IRLS) を用いて求解した。しかし、この正則化を他の目的関数に加えて用いる場合は、その部分問題の解法に反復処理が必要となるため、計算量的に好ましくない。また、非凸な関数やそのような関数に関連付く重み付けを用いると初期値依存の問題が生じる。効率的な計算のためには ℓ_1 ノルムを用いた定式化が望ましいと考えられる。

核型ノルムを用いた正則化では、近接写像の計算量削減が大きな課題である。局所領域が $W \times W$ の方形で形成されるとして、各画素を中心に局所領域を形成すると（重複を許容する）、各局所領域が重ならないよう設計した場合と比べ、 W^2 倍の特異値分解の計算が必要となる。特異値の個数は少ないため、局所領域ごとの特異値分解に要する時間は少ないが、通常 100 万を超える画素数分の特異値分解には膨大な時間を要する。一方、筆者らは、確率的最適化を利用した効率的な画像復元法を最近提案している⁽⁶⁵⁾。この手法では、観測データを分割し、最適化の際にこれらの一部をランダムに選択・評価することで、大幅な効率化を実現した。LCNN 正則化においても、変数分離の恩恵により各領域ごとの近接写像の計算を分割できるため、分散最適化・確率的最適化の知見を利用した高速化が見込める。

また、重み付き核型ノルムを用いる正則化であるが、データのクラスタリングとも関係しており、凸クラスタリングでの定式化と関連を持つ⁽⁶⁶⁾。Color-Line という直線クラスタを推定する問題は、凸クラスタリングで扱われるクラスタバスを求める問題でもあるため、凸クラスタ解析の知見を利用できると考えられる。

最後に、これは本稿で紹介した手法に限らず様々な画像処理手法において共通ではあるが、目的関数中の各項のバランスを調整する重みや局所領域のサイズなどのパラメータの決定方法の確立が重要な課題であることは言うまでもない。これに関しては、SURE⁽²³⁾、⁽⁶⁷⁾ と呼ばれる統計的指標の利用による自動調整⁽⁶⁸⁾、⁽⁶⁹⁾ や、本稿でも少し触れた目的関数の制約条件化によるパラメータ設定の簡易化⁽⁷⁰⁾、⁽⁷¹⁾ が対応策として挙げられる。

5. ま と め

本稿ではカラー画像において、色の分布が線状に広がる“Color-Lines”画像特徴に基づく正則化を題材とし、画像処理における最適化の利用法について解説した。画素数 = 変数の次元であり、また、局所領域ごとの処理が必要となることも多いため、各応用において適切な定式化とアルゴリズムの選択が効率的な計算のためには非常に重要であることが伝われば幸いである。

本稿では説明を省いたが、色線形性を用いた画像復元は RGB の三層で構成されるカラー画像のみならず、より多くの層から構成されるハイパスベクトル画像においても有効であることが確認されている⁽⁴⁰⁾、⁽⁴¹⁾。

付 録

1. 総和記号を含む関数の偏微分

本文中で途中式を省いた計算は、以下の各計算を用いて導出できる

- 同一記号であってもサブスクリプトが異なれば別変数とみなせる。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} x_i = 1, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} x_j = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} x_i x_j = x_j \quad (\text{A} \cdot 1)$$

- 偏微分を用いる変数と総和記号のサブスクリプトが異なる場合、総和記号の内側に偏微分を移動できる。若しくは、その変数を総和記号の外側へと移動できる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_j x_i y_j &= \sum_j \frac{\partial}{\partial x_i} x_i y_j = \sum_j y_j, \\ \text{or } \frac{\partial}{\partial x_i} x_i \sum_j y_j &= \sum_j y_j \end{aligned} \quad (\text{A} \cdot 2)$$

- 偏微分を用いる変数と総和記号のサブスクリプトが等しい場合、変数ごとの偏微分に分割される。変数 x_i と完全一致する x_i は総和記号内に唯一含まれる。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \sum_i x_i y_j \Rightarrow \forall_i \frac{\partial}{\partial x_i} x_i y_j = y_j \quad (\text{A} \cdot 3)$$

- 総和記号が連続する場合も上の手順に従えばよい。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}_i} \sum_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{1}{2} (\mathbf{A}_i \mathbf{y}_j)^2 \\ \Rightarrow \forall_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}_i} \frac{1}{2} (\mathbf{A}_i \mathbf{y}_j)^2 &= \mathbf{A}_i \left(\sum_{j \in \mathcal{N}_i} \mathbf{y}_j \mathbf{y}_j^\top \right) \end{aligned} \quad (\text{A} \cdot 4)$$

- 同一記号であるがサブスクリプトの異なる変数で偏微分する場合は、以下のようにサブスクリプトを交換できる。すなわち、注目画素と近傍画素の関係を交換できる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_i} \sum_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{1}{2} (\mathbf{A}_i \mathbf{y}_j)^2 &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_i} \sum_i \sum_{j: i \in \mathcal{N}_j} \frac{1}{2} (\mathbf{A}_j \mathbf{y}_i)^2 \\ \Rightarrow \forall_i \left(\sum_{j: i \in \mathcal{N}_j} \mathbf{A}_j^\top \mathbf{A}_j \right) \mathbf{y}_i \end{aligned} \quad (\text{A} \cdot 5)$$

文 献

- (1) A. Chambolle, “An algorithm for total variation minimization and applications,” J. Math. Imaging Vis., vol.20, no.1-2, pp.89–97, 2004.
- (2) P. L. Combettes and J.-C. Pesquet, “A Douglas-Rachford splitting approach to nonsmooth convex variational signal recovery,” IEEE J. Sel. Top. Signal Process., vol.1, no.4, pp.564–574, 2007.
- (3) T. Goldstein and S. Osher, “The split Bregman method for L1-regularized problems,” SIAM J. Imaging Sci., vol.2, no.2, pp.323–343, 2009.
- (4) M. Afonso, J. Bioucas-Dias, and M. Figueiredo, “Fast image recovery using variable splitting and constrained optimization,” IEEE Trans. Image Process., vol.19, no.9, pp.2345–2356, 2010.
- (5) A. Chambolle and T. Pock, “A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging,” J. Math. Imaging, Vis., vol.40, no.1, pp.120–145, 2010.
- (6) G.B. Passty, “Ergodic convergence to a zero of the sum of monotone operators in Hilbert space,” J. Math. Anal. Appl., vol.72, no.2, pp.383–390, 1979.

- (7) P. L. Combettes and V. R. Wajs, "Signal recovery by proximal forward-backward splitting," *SIAM Multiscale Model. Simul.*, vol.4, no.4, pp.1168–1200, 2005.
- (8) A. Beck and M. Teboulle, "A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems," *SIAM J. Imaging Sci.*, vol.2, pp.183–202, 2009.
- (9) A. Beck and M. Teboulle, "Fast gradient-based algorithms for constrained total variation image denoising and deblurring problems," *IEEE Trans. Image Process.*, vol.18, no.11, pp.2419–2434, 2009.
- (10) D. Gabay and B. Mercier, "A dual algorithm for the solution of nonlinear variational problems via finite elements approximations," *Comput. Math. Appl.*, vol.2, pp.17–40, 1976.
- (11) J. Eckstein and D.P. Bertsekas, "On the Douglas-Rachford splitting method and proximal point algorithm for maximal monotone operators," *Math. Program.*, vol.55, pp.293–318, 1992.
- (12) S. Boyd, N. Parikh, E. Chu, B. Peleato, and J. Eckstein, "Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers," *Foundations Trends Mach. Learn.*, vol.3, no.1, pp.1–122, 2011.
- (13) P. L. Combettes and J.-C. Pesquet, "Primal-dual splitting algorithm for solving inclusions with mixtures of composite, Lipschitzian, and parallel-sum type monotone operators," *Set-Val. Var. Anal.*, vol.20, no.2, pp.307–330, 2012.
- (14) L. Condat, "A primal-dual splitting method for convex optimization involving Lipschitzian, proximable and linear composite terms," *J. Optim. Theory Appl.*, vol.158, no.2, pp.460–479, 2013.
- (15) J. Pearl, *Probabilistic reasoning in intelligent systems: networks of plausible inference*, Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, USA, 1988.
- (16) Y. Weiss and W. Freeman, "Correctness of belief propagation in Gaussian graphical models of arbitrary topology," *Neural Comput.*, pp.2173–2200, 2001.
- (17) J. Mooij and H. Kappen, "Sufficient conditions for convergence of the sum-product algorithm," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol.53, no.12, pp.4422–4437, 2007.
- (18) Y. Boykov and G. Funka-Lea, "Graph cuts and efficient N-D image segmentation," *Int. J. Comput. Vis.*, vol.70, no.2, pp.109–131, 2006.
- (19) A. Delong, A. Osokin, H. N. Isack, and Y. Boykov, "Fast approximate energy minimization with label costs," *Int. J. Comput. Vis.*, vol.96, no.1, pp.1–27, 2012.
- (20) R. Szeliski, R. Zabih, D. Scharstein, O. Veksler, V. Kolmogorov, A. Agarwala, M. Tappen, and C. Rother, "A comparative study of energy minimization methods for markov random fields with smoothness-based priors," *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol.30, no.6, pp.1068–1080, 2008.
- (21) A. Chambolle, D. Cremers, and T. Pock, "A convex approach to minimal partitions," *SIAM J. Imaging Sci.*, vol.5, no.4, pp.1113–1158, 2012.
- (22) L. I. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi, "Nonlinear total variation based noise removal algorithms," *Physica D*, vol.60, no.1–4, pp.259–268, 1992.
- (23) D.L. Donoho and I.M. Johnstone, "Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage," *J. Am. Stat. Assoc.*, vol.90, no.432, pp.1200–1224, 1995.
- (24) J.-L. Starck, E. J. Candes, and D. L. Donoho, "The curvelet transform for image denoising," *IEEE Trans. Image Process.*, vol.11, no.6, pp.670–684, 2002.
- (25) H. Schaeffer and S. Osher, "A low patch-rank interpretation of texture," *SIAM J. Imaging Sci.*, vol.6, no.1, pp.226–262, 2013.
- (26) S. Ono, T. Miyata, and I. Yamada, "Cartoon-texture image decomposition using blockwise low-rank texture characterization," *IEEE Trans. Image Process.*, vol.23, no.3, pp.1128–1142, 2014.
- (27) I. Omer and M. Werman, "Color Lines: Image specific color representation," *Proc. IEEE Conf. Comput. Vis. Pattern Recognit. (CVPR)*, pp.946–953, 2004.
- (28) T. Morimoto, R. T. Tan, R. Kawakami, and K. Ikeuchi, "Estimating optical properties of layered surfaces using the spider model," *Proc. IEEE Conf. Comput. Vis. Pattern Recognit. (CVPR)*, pp.207–214, 2010.
- (29) A. Levin, D. Lischinski, and Y. Weiss, "A closed form solution to natural image matting," *Proc. IEEE Conf. Comput. Vis. Pattern Recognit. (CVPR)*, pp.61–68, 2006.
- (30) A. Bousseau, S. Paris, and F. Durand, "User-assisted intrinsic images," *ACM Trans. Graphics (SIGGRAPH Asia)*, vol.28, no.5, pp.130:1–130:10, Dec. 2009.
- (31) Q. Shan, J. Jia, and M. S. Brown, "Globally optimized linear windowed tone-mapping," *IEEE Trans. Vis. Comput. Graphics*, vol.16, no.4, pp.663–675, 2010.
- (32) F. Deng, S.J. Kim, Y.-W. Tai, and Michael S. Brown, "Color-aware regularization for gradient domain image manipulation," *Proc. Springer Lecture Notes in Comput. Sci. (ACCV)*, vol.7727, pp.392–405, 2012.
- (33) K. He, J. Sun, and X. Tang, "Guided image filtering," *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol.35, no.6, pp.1397–1409, 2013.
- (34) K. He, J. Sun, and X. Tang, "Fast matting using large kernel matting laplacian matrices," *Proc. IEEE Conf. Comput. Vis. Pattern Recognit. (CVPR)*, pp.2165–2172, 2010.
- (35) F. C. Crow, "Summed-area tables for texture mapping," *ACM SIGGRAPH Comput. Graphics*, vol.18, no.3, pp.207–212, 1984.
- (36) J. Lu, K. Shi, D. Min, L. Lin, and M. N. Do, "Cross-based local multipoint filtering," *Proc. IEEE Conf. Comput. Vis. Pattern Recognit. (CVPR)*, pp.430–437, 2012.
- (37) 白井啓一郎, 池原雅章, 岡本正行, "フラッシュ画像とノンフラッシュ画像の色彩と陰影の変換による鮮鋭画像生成法," *信学論 (A)*, vol.J94-A, no.4, pp.275–284, April 2011.
- (38) T. Baba, R. Matsuoka, K. Shirai, and M. Okuda, "Misaligned image integration with local linear model," *IEEE Trans. Image Process.*, vol.25, no.5, pp.2035–2044, 2016.
- (39) S. Ono and I. Yamada, "Color-line regularization for color artifact removal," *IEEE Trans. Comput. Imaging*, vol.2, no.3, pp.204–217, 2016.
- (40) M. Rizkinia, T. Baba, K. Shirai, and M. Okuda, "Local spectral component decomposition for multi-channel image denoising," *IEEE Trans. Image Process.*, vol.25, no.7, pp.3208–3218, 2016.
- (41) S. Ono, K. Shirai, and M. Okuda, "Vectorial total variation based on arranged structure tensor for multichannel image restoration," *Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics Speech Signal Process. (ICASSP)*, pp.4528–4532, 2016.
- (42) R. M. Hestenes and E. Stiefel, "Methods of conjugate gradients for solving linear systems," *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, vol.49, no.6, pp.409–436, 1952.
- (43) G. Petschnigg, R. Szeliski, M. Agrawala, M. Cohen, H. Hoppe, and K. Toyama, "Digital photography with flash and no-flash image pairs," *ACM Trans. Graphics (SIGGRAPH)*, vol.23, no.3, pp.664–672, 2004.
- (44) E. Eisemann and F. Durand, "Flash photography enhancement via intrinsic relighting," *ACM Trans. Graphics (SIGGRAPH)*, vol.23, no.3, pp.673–678, 2004.
- (45) C. Tomasi and R. Manduchi, "Bilateral filtering for gray and color images," *Proc. IEEE Int. Conf. Comput. Vis. (ICCV)*, pp.839–846, 1998.
- (46) K. N. Chaudhury, "Acceleration of the shiftable O(1) algorithm for bilateral filtering and nonlocal means," *IEEE Trans. Image Process.*, vol.22, no.4, pp.1291–1300, 2013.
- (47) K. Sugimoto and S. Kamata, "Compressive bilateral filtering," *IEEE Trans. Image Process.*, vol.24, no.11,

- pp.3357–3369, 2015.
- (48) C. C. Heyde, Quasi-likelihood and its application: a general approach to optimal parameter estimation, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York, 1997.
 - (49) Y. Tatesumi, K. Iwata, K. Shirai, and M. Okuda, “Color transform between image pair using covariance correspondences of local color distributions,” Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics Speech Signal Process. (ICASSP), pp.1219–1223, 2014.
 - (50) C. Liu, J. Yuen, A. Torralba, J. Sivic, and W. T. Freeman, “SIFT flow: dense correspondence across different scenes,” Proc. Euro. Conf. Comput. Vis. (ECCV), vol.5304, pp.28–42, 2008.
 - (51) R. Ciak, B. Shafel, and G. Steidl, “Homogeneous penalizers and constraints in convex image restoration,” J. Math. Imaging & Vis., vol.47, no.3, pp.210–230, 2012.
 - (52) L. Yuan, J. Sun, L. Quan, and H.-Y. Shum, “Image deblurring with blurred/noisy image pairs,” ACM Trans. Graphics (SIGGRAPH), vol.26, no.3, pp.1–10, 2007.
 - (53) S. Zhuo, G. Dong, and T. Sim, “Robust flash deblurring,” Proc. IEEE Conf. Comput. Vis. Pattern Recognit. (CVPR), pp.2440–2447, 2010.
 - (54) N. Joshi, C. L. Zitnick, R. Szeliski, and D. Kriegman, “Image deblurring and denoising using color priors,” Proc. IEEE Conf. Comput. Vis. Pattern Recognit. (CVPR), pp.1550–1557, 2009.
 - (55) W.-S. Lai, J.-J. Ding, Y.-Y. Lin, and Y.-Y. Chuang, “Blur kernel estimation using normalized color-line priors,” Proc. IEEE Conf. Comput. Vis. Pattern Recognit. (CVPR), pp.64–72, 2015.
 - (56) Netlib Repository, “Linear algebra package (LAPACK),” www.netlib.org.
 - (57) S. Gu, L. Zhang, W. Zuo, and X. Feng, “Weighted nuclear norm minimization with application to image denoising,” Proc. IEEE Conf. Comput. Vis. Pattern Recognit. (CVPR), pp.2862–2869, 2014.
 - (58) K. B. Petersen and M. S. Pedersen, “The matrix cookbook,” 2012.
 - (59) K. Wright, “Numerical solution of differential equations for the analytic singular value decomposition,” Numer. Math., vol.63, no.1, pp.283–295, 1992.
 - (60) J.-F. Cai, E. J. Candes, and Z. Shen, “A singular value thresholding algorithm for matrix completion,” SIAM J. Optim., vol.20, no.4, pp.1956–1982, 2010.
 - (61) D. Tschumperlé and R. Deriche, “Vector-valued image regularization with PDE’s: a common framework for different applications,” IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., vol.27, no.4, pp.506–517, 2005.
 - (62) K. Dabov, A. Foi, V. Katkovnik, and K. Egiazarian, “Color image denoising via sparse 3D collaborative filtering with grouping constraint in luminance-chrominance space,” Proc. IEEE Int. Conf. Image Process. (ICIP), vol.1, pp.313–316, 2007.
 - (63) X. Bresson and T. F. Chan, “Fast dual minimization of the vectorial total variation norm and applications to color image processing,” Inverse Prob. & Imaging, vol.2, no.4, pp.455–484, 2008.
 - (64) P.L. Combettes and J.-C. Pesquet, “Proximal splitting methods in signal processing,” Fixed-point algorithms for inverse problems in science and engineering, pp.185–212, Springer Optim. & Its Apps., 2011.
 - (65) S. Ono, M. Yamagishi, T. Miyata, and I. Kumazawa, “Image restoration using a stochastic variant of the alternating direction method of multipliers,” Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics Speech Signal Process. (ICASSP), pp.4523–4527, 2016.
 - (66) C. Zhu, H. Xu, C. Leng, and S. Yan, “Convex optimization procedure for clustering: Theoretical revisit,” Adv. Neural Inf. Process. Syst. (NIPS), pp.1619–1627, 2014.
 - (67) C.M. Stein, “Estimation of the mean of a multivariate normal distribution,” The Annals of Statistics, vol.9, no.6, pp.1135–1151, 1981.
 - (68) T. Blu and F. Luisier, “The sure-let approach to image denoising,” IEEE Trans. Image Process., vol.16, no.11, pp.2778–2786, 2007.
 - (69) M. Onuki, S. Ono, M. Yamagishi, and Y. Tanaka, “Graph signal denoising via trilateral filter on graph spectral domain,” IEEE Trans. Signal & Inf. Process. over Netw., vol.2, no.2, pp.137–148, 2016.
 - (70) M. Afonso, J. Bioucas-Dias, and M. Figueiredo, “An augmented Lagrangian approach to the constrained optimization formulation of imaging inverse problems,” IEEE Trans. Image Process., vol.20, no.3, pp.681–695, 2011.
 - (71) S. Ono and I. Yamada, “Signal recovery with certain involved convex data-fidelity constraints,” IEEE Trans. Signal Process., vol.63, no.22, pp.6149–6163, 2015.

(SIP 研究会提案, 平成 29 年 3 月 10 日受付)

白井啓一郎 (正員)

2001 慶大・理工・電子卒。2006 同大学院博士課程了 (総合デザイン工学専攻)。博士 (工学)。同年信州大・工・助教。2017 同准教授。信号処理, 画像処理に関する研究に従事。

馬場達也 (学生会員)

2012 北九州市大・国際環境工・情報メディア卒。2017 同大学院博士課程了 (情報工学専攻)。博士 (工学)。現在華為技術日本株式会社・研究員。画像処理に関する研究に従事。

小野峻佑 (正員)

2010 東工大・工・情報卒。2014 同大学院理工学研究科博士課程了 (集積システム専攻)。博士 (工学)。2012~2014 日本学術振興会特別研究員 (DC1)。現在, 東工大・科学技術創成研究院・未来産業技術研究所・助教, 及び, 科学技術振興機構 (JST) さきがけ個人研究者 (兼任)。主として画像処理, 信号処理, 数値最適化の研究に従事。本会学術奨励賞 (2013), 本会論文賞 (2014), IEEE SPS Japan Chapter Outstanding Student Journal Paper Award (2014), 丹羽保次郎記念論文賞 (2015), 手島精一記念研究賞博士論文賞 (2016), テレコムシステム技術賞 (奨励賞, 2016), 船井研究奨励賞 (2017) 各受賞。

奥田正浩 (正員)

1993 慶大・理工・電子卒。1998 同大学院博士課程了 (電気工学専攻)。工博。2001 北九州市大・助教。2011 同教授。信号処理, 画像処理に関する研究に従事。