電気・電子・通信分野における非線形振動の研究

Research on Nonlinear Oscillation in the Field of Electrical,
Electronics, and Communication Engineering

遠藤哲郎 Tetsuro ENDO

アブストラクト 本学会 非線形問題研究会の歴史と昔の研究会の雰囲気について述べた。発振器結合系を代表的な二つの解析法で解析し、平均化法の適用上の注意点について述べた。

キーワード 非線形振動, 発振器結合系, 非線形問題研究会 (NLP), 平均化法

1. はじめに

筆者は大学院修士2年(1973年)ごろから今日に至るまで非線形振動, 特に発振器の結合系の同期現象や位相同期回路に見られる様々な非線形振動現象の研究を行ってきた。研究発表の場としては本学会の非線形問題研究専門委員会(以下, 非線形問題研究会と略)を利用させて頂く機会が大変多く, 今日の筆者があるのは非線形問題研究会のお陰と言っても過言ではない。本稿では筆者の体験してきた当研究会を中心とした電気・電子・通信・情報などの分野における非線形問題の研究の歩みとその中で筆者の行ってきた研究について簡単に述べてみたい。

2. 非線形問題研究会の歴史

非線形問題研究会は大変歴史ある研究会で, 本学会の記録によると1951年に非直線理論研究専門委員会として発足し, 途中1970年5月に名称変更があり, 非線形問題研究会となった。1951年から1967年まで高木純一先生(当時, 早稲田大学, 故人)が専門委員長を, 1962年から1967年まで南雲仁一先生(当時, 東京大学, 故人)が幹事を務めておられたという記録が残っている。1967年以降は本学会に確かな記録が残っており表1のようである。1988年5月までは委員長1名, 幹事2名の体制で推移しており, 以後, 副委員長が導入され, また1999年からは幹事補佐も導入されている。筆者は幹事(1986~1989), 副委員長(1996~1997), 委員長(1997~1998)とすべての役職を経験したが, 一番勉強になったのは, 実務を経験した幹事のときであったと思う。

3. 大学院生のころの 非線形問題研究会の雰囲気

筆者が非線形問題研究会で最初に研究発表を行ったのは, 確か1973年の秋で, 場所は本学会のある東京・芝の機械振興会館内の一室であった。このとき, 専門委員長は藤田広一先生(当時, 慶應義塾大学, 故人), 幹事は森真作先生(当時, 慶應義塾大学)と吉澤修治先生(当時, 東京大学)であった。研究の内容はヴァン・デル・ポール形の発振器をはしご状に多数結合した発振器の結合系における振動モードの解析の話をしたと思う。当時の非線形問題研究会は優秀なメンバーはいたが, 必ずしも研究者人口は多くなく, 場所はほとんど機械振興会館で, 研究会の参加者は10名程度で, 研究発表も1回の研究会で3, 4件というのが普通だったと記憶している。したがって, 研究発表も1日の午後だけの場合がほとんどで, 原稿執筆枚数や発表時間については本人の好きなだけというのが普通だったと記憶している。1982年になると上田皖亮先生(当時, 京都大学)が専門委員長となられ, 東京中心の研究会開催の方針を変更され, 毎月各地で研究会を開催し, その土地, 土地での非線形問題の研究者の発掘に努められた。また同じころ, 回路とシステム研究専門委員会の非線形問題に関係した研究者のグループから研究会の共催の話があり, これも松本隆先生(早稲田大学)が音頭をとってスタートし, 物理や数学の分野の非線形問題の研究者も仲間に入ってもらい, なかなか盛会であった。筆者は1986年から1989年にかけて約2年半にわたり非線形問題研究会の幹事を拝命した。お引き受けするにあたり, 一番心配したことは, 研究会開催にあたり, もし発表件数が集まらなかったらどうしようかということであった。実際筆者が大学院生のころ(1972~1977)は研究会の開催の予定は決まっているのに件数が集まらなくて, 幹事さんに頼まれ, 急きょピンチヒッターとして発表をしたことが何回もあった。しかし, このころになると地方巡回や共催研究会の効果か発表件数も十分に集まるようになり筆者の当初の考えは杞憂に終わった。この幹事をお引き受けすることにより筆者は研究者として大きく成長させて頂いたと今でも感謝している。つまり, 幹事は開催月の初めまでに集まった

遠藤哲郎 正員: フェロー 明治大学理工学部電気電子生命学科
E-mail: endoh@isc.meiji.ac.jp
Tetsuro ENDO, Fellow (Department of Electronics and Bioinformatics, Kawasaki-shi, 214-8571 Japan).
Fundamentals Review Vol.2 No.2 pp.31-39 2008 年 10 月

表 1 非線形問題研究専門委員会 (幹事補佐は割愛)

専門委員長	副委員長	任 期	幹 事	任 期
高木純一		1951/12/01 - 1967/03/31	南雲仁一	1962/04/01 - 1967/03/31
後藤以紀		1967/04/01 - 1969/03/31	藤田広一	1967/04/01 - 1969/03/31
林 千博		1969/04/01 - 1973/03/31	佐藤 力	1969/04/01 - 1973/03/31
			上田皖亮	1969/04/01 - 1973/03/31
藤田広一		1973/04/01 - 1975/03/31	森 真作	1973/04/01 - 1977/03/31
			吉澤修治	1973/04/01 - 1976/07/31
南雲仁一		1975/04/01 - 1978/03/31	馬被健次郎	1976/07/01 - 1978/03/31
			上田皖亮	1977/04/01 - 1981/03/31
佐藤 力		1978/04/01 - 1982/03/31	吉澤修治	1978/04/01 - 1982/03/31
			倉光正己	1981/04/01 - 1983/03/31
上田皖亮		1982/04/01 - 1984/03/31	馬被健次郎	1982/04/01 - 1983/09/30
			奥村浩士	1983/04/01 - 1985/05/17
			亀山充隆	1983/10/01 - 1986/09/30
吉澤修治		1984/04/01 - 1986/03/31	倉光正己	1985/05/18 - 1987/05/15
森 真作		1986/04/01 - 1988/05/20	遠藤哲郎	1986/10/01 - 1989/05/19
			奥村浩士	1987/05/16 - 1989/05/19
森末道忠	牛田明夫	1988/05/21 - 1989/05/19		
牛田明夫	松本 隆	1989/05/20 - 1990/05/18	田中 衛	1989/05/20 - 1991/05/17
			香田 徹	1989/05/20 - 1992/05/22
松本 隆	平井正一	1990/05/19 - 1991/05/17		
平井正一	倉光正己	1991/05/18 - 1992/05/22	大石進一	1991/05/18 - 1993/05/21
倉光正己	沢田康次	1992/05/23 - 1993/05/21	潮 俊光	1992/05/23 - 1994/05/13
沢田康次	奥村浩士	1993/05/22 - 1994/05/13	中島康治	1993/05/22 - 1995/05/19
奥村浩士	田中 衛	1994/05/14 - 1995/05/19	引原隆士	1994/05/14 - 1996/05/17
田中 衛	香田 徹	1995/05/20 - 1996/05/17	斉藤利通	1995/05/20 - 1997/05/16
香田 徹	遠藤哲郎	1996/05/18 - 1997/05/16	大濱靖匡	1996/05/18 - 1998/05/22
遠藤哲郎	大石進一	1997/05/17 - 1998/05/22	浅井秀樹	1997/05/17 - 1999/05/21
大石進一	長島知正	1998/05/23 - 1999/05/21	山村清隆	1998/05/23 - 2000/05/21
長島知正	合原一幸	1999/05/22 - 2000/05/21	土居伸二	1999/05/22 - 2001/05/29
合原一幸	中島康治	2000/05/22 - 2001/05/29	池口 徹	2000/05/22 - 2002/05/27
中島康治	潮 俊光	2001/05/30 - 2002/05/27	早川美德	2001/05/30 - 2003/05/27
潮 俊光	斉藤利通	2002/05/28 - 2003/05/27	西尾芳文	2002/05/28 - 2004/05/28
斉藤利通	林 初男	2003/05/28 - 2004/05/28	夏目季代久	2003/05/28 - 2005/05/27
林 初男	佐野雅已	2004/05/29 - 2005/05/27	矢内浩文	2004/05/29 - 2006/05/27
佐野雅已	引原隆士	2005/05/28 - 2006/05/26	小西啓治	2005/05/28 - 2007/05/24
引原隆士	浅井秀樹	2006/05/27 - 2007/05/24	丹治裕一	2006/05/27 - 2008/05/24
浅井秀樹	太田有三	2007/05/25 - 2008/05/24	久門尚史	2007/05/25 -
太田有三	山村清隆	2008/05/27 -	堀尾喜彦	2008/05/27 -

発表申込みを基に発表プログラムを作り、これを開催地の世話人の先生に送り、会場を確保してもらい、また、懇親会等の手配をお願いする。このようなやりとりの中で、世話人の先生や他の幹事、委員長の先生方と親しくなり、いろいろ研究の話も教えて頂く機会が増える。また、懇親会においても多くの先生方と身近に接する機会を得、ここでも様々な研究上のヒントや刺激を頂くことが少なからずあった。このような一見研究と直接関係ない、「雑用」のようなことが実は研究者としての成長に大変重要であるように感じている。以下、筆者の行ってきた研究と関連する研究について基本的な部分を記してみたい。

4. 発振器の結合系の研究

発振器の結合系の研究には長い歴史がある。大別して一方の発

振器は他方の発振器に影響を与えるが、その逆はない場合と相互に影響を与え合う場合の2通りの場合がある。前者は強制同期系といい、後者は相互同期系という。本稿では、二つの発振器の相互同期系についての2通りの解析結果について述べてみたい。

4.1 発振器の結合系の研究 1

発振器の相互同期の研究は1965年に当時の本学会雑誌から刊行された末崎・森先生によるものが我が国のこの方面の研究としては、初期のものではないかと思われる⁽¹⁾。この研究について簡単に紹介する。図1(a)、(b)はこの研究で対象とした回路である。図1(a)は発振周波数のわずかに異なる二つのファン・デル・ポール発振器をコンデンサで結合した系、図1(b)は発振周波数のわずかに異なる二つのファン・デル・ポール発振器を抵抗

図 1 二つの発振器の結合系

で結合した系である。非線形特性としては、その電圧・電流特性が $i = -g_1 v + g_3 v^3$, $g_1, g_3 > 0$ で表わされる三次の非線形特性を仮定している。平均化法による解析の結果、前者は同相同期と逆相同期を中心とした状態の両方を持つこと、後者は同相同期を中心とした状態のみを持つことが明らかにされている。同期範囲は後者は $-\pi/2$ から $\pi/2$ となるが、前者は一般にこれより狭い範囲となる。以下、解析の流れを簡単に示す。

図 1 (a) の回路の回路方程式は正規化の後次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \ddot{x} + x &= \frac{\varepsilon}{\Omega} (1 - x^2) \dot{x} + \frac{\Omega^2 - 1}{\Omega^2} x - \alpha y \\ \ddot{y} + y &= \frac{k^2 \varepsilon}{\Omega} (1 - y^2) \dot{y} + \frac{\Omega^2 - k^2}{\Omega^2} y - k^2 \alpha x \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、 $x \propto v_1$, $y \propto v_2$, Ω は相互同期時の角周波数、 α ($0 \leq \alpha \leq 1$) は結合係数、 ε (> 0) は非線形性の強さを表す微小定数である。後述するが、平均法による解析ではどの量を微小定数と置くかによって解析の結果が変わることが多い。ここでは式 (1) の右辺の各項は ε オーダの微量であるとしている。解の基本形は、この微量を 0 としたときの方程式から求まるから、この場合、

$$\begin{aligned} x &= a \cos(\tau - \varphi), \dot{x} = -a \sin(\tau - \varphi) \\ y &= b \cos(\tau - \theta), \dot{y} = -b \sin(\tau - \theta) \end{aligned} \quad (2)$$

となる。平均化法では a, b, φ, θ をゆっくり変化する (すなわち、その微分が ε オーダの量である) 時間の関数と考え、これらの量に関する 1 階の微分方程式を求め、これの漸近安定な定常解 (= 定数) が実現可能な同期状態を与える。したがって、解を式 (2) のように置いた時点で x と y は既に角周波数 1 で同期した解を仮定していることになる。別のいい方をすると式 (1) の平均化法による解析からは後述の非同期二重モード振動 (= 一般に概周期解) などは (たとえ存在しても) 出てこないということになる。つまり、式 (1) を平均化法で解析する場合、非線形特性は弱い、 Ω, k^2 は 1 に十分近い (個々の発振器の発振周波数は同じではないが、そのずれは小さい)、結合係数 α は 0 に十分近いという三つの

図 2 周波数特性 (コンデンサ結合) $\varepsilon = 0.02$.
参考文献 (1) より転載

仮定が満足されているという大前提の下に解析が行われていることになる。この仮定の一つでも崩れると式 (1) の平均化法による解析の結果は保証されなくなる点に注意する。

以上を念頭に置いて、平均化された方程式を求めると次式のようなになる。

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{\varepsilon a}{2\Omega} \left(1 - \frac{a^2}{4} \right) + \frac{\alpha b}{2} \sin(\theta - \varphi) \\ \dot{\varphi} &= \frac{\Omega^2 - 1}{2\Omega^2} - \frac{\alpha b}{2a} \cos(\theta - \varphi) \\ \dot{b} &= \frac{k^2 \varepsilon b}{2\Omega} \left(1 - \frac{b^2}{4} \right) - \frac{k^2 \alpha a}{2} \sin(\theta - \varphi) \\ \dot{\theta} &= \frac{\Omega^2 - k^2}{2\Omega^2} - \frac{k^2 \alpha b}{2b} \cos(\theta - \varphi) \end{aligned} \quad (3)$$

振幅と位相は定常状態では一定値になるので、 $\dot{a}, \dot{\varphi}, \dot{b}, \dot{\theta} = 0$ として平衡点 $(a_e, \varphi_e, b_e, \theta_e)$ を求め、安定性を吟味して漸近安定な平衡点を求めれば、それが物理的に実現可能な定常解となる。このようにして平均化された方程式 (3) を解析すると基本的に同相に近い解 (離調 $\delta = 0$ で同相となる解) と逆相に近い解 (離調 $\delta = 0$ で逆相となる解) の二つの解が共存しており、初期値の違いによってどちらかの解が現れることが分かる。以上のことを踏まえて様々な結合係数 α に対して離調 δ に対する同相に近い解及び逆相に近い解の周波数特性を求めると図 2 のようになる。ただし、離調 $\delta \equiv (k^2 - 1)/k^2$ 及び同期角周波数偏移 $\sigma \equiv (\Omega^2 - 1)/\Omega^2$ とする。また振幅、位相特性はそれぞれ図 3, 4 のようになる。以上を整理すると、同相を中心とした同期状態のとき、同期周波数は逆相を中心とした同期状態の同期周波数よりも高く、固有周波数の大きい方の発振器の振幅は単独で動作しているときの振幅 (= 2) よりも大きく、逆に固有周波数の小さい方の発振器の振幅は単独で動作しているときよりも小さい。また逆相を中心とした同期状態では、同相の場合と全く逆の性質を持つ。結合係数 α を小にすればするほど同期範囲は狭くなるが、逆に同期範囲全体にわたる位相差の総変化量は大きくなる。以上が二つの軟発振器をコンデンサで結合した場合の特性の概略である。

次に二つの発振器を抵抗で結合した図 1(b) の回路に対して平均化法による解析を行う。正規化された基礎方程式は次のようになる。

図 3 振幅特性 (コンデンサ結合) $\varepsilon = 0.02$.
参考文献 (1) より転載

図 4 位相特性 (コンデンサ結合) $\varepsilon = 0.02$.
参考文献 (1) より転載

$$\begin{aligned}\ddot{x} + x &= \frac{\varepsilon}{\Omega} (1 - x^2) \dot{x} + \frac{\Omega^2 - 1}{\Omega^2} x + \frac{\alpha}{\Omega} \dot{y} \\ \ddot{y} + y &= \frac{k^2 \varepsilon}{\Omega} (1 - y^2) \dot{y} + \frac{\Omega^2 - k^2}{\Omega^2} y + \frac{k^2 \alpha}{\Omega} \dot{x}\end{aligned}\quad (4)$$

コンデンサ結合の場合と同様に、式 (4) の右辺の各項は ε オーダの微量量であるとする。このとき、右辺の微量量を 0 としたときの解は式 (2) のようになる。これを基に $\varepsilon \neq 0$ における解を平均化法により求めると次の平均化された 1 階の微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \frac{\varepsilon a}{2\Omega} \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) + \frac{\alpha b}{2\Omega} \cos(\varphi - \theta) \\ \dot{\varphi} &= \frac{\Omega^2 - 1}{2\Omega^2} - \frac{\alpha b}{2\Omega a} \sin(\varphi - \theta) \\ \dot{b} &= \frac{k^2 \varepsilon b}{2\Omega} \left(1 - \frac{b^2}{4}\right) + \frac{k^2 \alpha a}{2\Omega} \cos(\varphi - \theta) \\ \dot{\theta} &= \frac{\Omega^2 - k^2}{2\Omega^2} + \frac{k^2 \alpha a}{2\Omega b} \sin(\varphi - \theta)\end{aligned}\quad (5)$$

上式より、 $\dot{a}, \dot{\varphi}, \dot{b}, \dot{\theta} = 0$ として漸近安定な平衡点を求めると次のような定常解が得られる。

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{2}\delta \\ a^2 = b^2 &= 4 \left(1 \pm \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\alpha^2 - \frac{\delta^2}{2(2-\delta)}}\right) \\ \sin(\varphi - \theta) &= \frac{\sigma}{\alpha \sqrt{1 - \sigma}} \quad \left(|\varphi - \theta| \leq \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}\quad (6)$$

また、安定条件は $a^2 > 4$ となる。抵抗結合の場合の位相特性、振幅特性を図示するとそれぞれ図 5, 6 のようになる。この場合にはコンデンサ結合の場合とは異なって同期周波数、振幅、位相差及び安定性は直接求められる。抵抗結合の場合には同期状態はただ一つだけ存在し、同期周波数は両発振器の固有周波数の間の値をとる。また同期しているときは両発振器の振幅は常に等しく (> 2)、かつ両発振器の固有周波数が異なるとき最大となる位相差は同期範囲内において、 $-\pi/2$ から $\pi/2$ まで連続的に変化し、両発振器の固有周波数が等しいとき位相差は 0 となる。

図 5 位相特性 (抵抗結合)
参考文献 (1) より転載

図 6 振幅特性 (抵抗結合)
参考文献 (1) より転載

4.2 発振器の結合系の研究 2

次に図 7 に示す発振器のインダクタンスによる結合系の解析を 4.1 とは別のやり方で解析してみよう^{(2), (3)}。この系は基本的に図 1(a) の系において両発振器の固有周波数が等しい場合と同じである。この系を適当に正規化すると次のような 2 階の連立微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 - \varepsilon(1 - x_1^2)\dot{x}_1 + x_1 - \alpha x_2 &= 0 \\ \ddot{x}_2 - \varepsilon(1 - x_2^2)\dot{x}_2 + x_2 - \alpha x_1 &= 0\end{aligned}\quad (7)$$

式 (7) において α は ε オーダの微量量とは仮定していないので微量量 ε を 0 とした無摂動系は式 (1) とは異なる点に注意する。

さて式 (7) を次のようなベクトル形式で書く。

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{x} = \varepsilon \dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{3}\varepsilon \dot{\mathbf{x}}_c$$

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T, \mathbf{x}_c = [x_1^3, x_2^3]^T, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1-\alpha \end{bmatrix} \quad (8)$$

式 (8) に線形変換: $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$ を行い, 左から $\mathbf{P}^{-1}$ を乗ずると次の式が得られる。

$$\ddot{\mathbf{y}} + (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P})\mathbf{y} = \varepsilon \dot{\mathbf{y}} - \frac{1}{3}\varepsilon (\mathbf{P}^{-1}\dot{\mathbf{x}}_c) \quad (9)$$

上式において $\mathbf{B}$ の固有値は $\lambda_1 = 1 - \alpha$, $\lambda_2 = 1 + \alpha$ となる。したがって, λ_1 に対する長さ 1 の固有ベクトルを $\mathbf{p}_1 = [1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]^T$, λ_2 に対する長さ 1 の固有ベクトルを $\mathbf{p}_2 = [1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]^T$ とすると, $\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2] \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ と選ぶことにより, $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}$ は対角化され, 次のようになる。

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} = \mathbf{P}^T\mathbf{B}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

ここにおいて $\mathbf{B}$ は実対称行列であるから直交行列で対角化でき, $\mathbf{P}^{-1}$ は $\mathbf{P}^T$ とすることができるとに注意する。このような対角化により式 (9) は次のようなスカラー形式の微分方程式となる。

$$\ddot{y}_1 + \omega_1^2 y_1 = \varepsilon f_1(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2)$$

$$\ddot{y}_2 + \omega_2^2 y_2 = \varepsilon f_2(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2) \quad (11)$$

ここに

$$\omega_1^2 \equiv \lambda_1, \omega_2^2 \equiv \lambda_2$$

$$f_1(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2) \equiv \dot{y}_1 - \frac{1}{3}\varepsilon g_1(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2) \quad (12)$$

$$f_2(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2) \equiv \dot{y}_2 - \frac{1}{3}\varepsilon g_2(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2)$$

とする。式 (12) において g_1, g_2 は次式で定義されている。

$$[g_1, g_2]^T = \mathbf{P}^{-1}\dot{\mathbf{x}}_c = \frac{d(\mathbf{P}^T\mathbf{x}_c)}{dt} \quad (13)$$

そして次のように具体的に計算される。

$$\mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \mathbf{x}_c = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right)^3 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right)^3 \end{bmatrix}$$

図 7 インダクタンスで結合された二つの発振器

以上より

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}y_1^2\dot{y}_1 + \frac{3}{2}\dot{y}_1y_2^2 + 3y_1y_2\dot{y}_2 \\ \frac{3}{2}y_2^2\dot{y}_2 + \frac{3}{2}\dot{y}_2y_1^2 + 3y_2y_1\dot{y}_1 \end{bmatrix}$$

となり, 更に f_1, f_2 は次式となる。

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 - \frac{1}{2}y_1^2\dot{y}_1 - \frac{1}{2}\dot{y}_1y_2^2 - y_1y_2\dot{y}_2 \\ \dot{y}_2 - \frac{1}{2}y_2^2\dot{y}_2 - \frac{1}{2}\dot{y}_2y_1^2 - y_2y_1\dot{y}_1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

式 (11) において $\varepsilon = 0$ とすると

$$y_1 = \rho_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1), \dot{y}_1 = \rho_1 \omega_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1)$$

$$y_2 = \rho_2 \sin(\omega_2 t + \theta_2), \dot{y}_2 = \rho_2 \omega_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) \quad (15)$$

となる。 $\varepsilon \neq 0$ の場合, 式 (15) において $\rho_i \rightarrow \rho_i(t), \theta_i \rightarrow \theta_i(t)$ として, これを式 (11) に代入すると

$$\dot{\rho}_i \sin \psi_i + \rho_i \dot{\theta}_i \cos \psi_i = 0$$

$$\dot{\rho}_i \omega_i \cos \psi_i - \rho_i \omega_i \dot{\theta}_i \sin \psi_i = f_i(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2)$$

$$\psi_i \equiv \omega_i t + \theta_i, \quad i = 1, 2$$

となり, これより次式が得られる。

$$\dot{\rho}_i = \frac{\varepsilon}{\omega_i} f_i(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2) \cos(\omega_i t + \theta_i)$$

$$\dot{\theta}_i = \frac{-\varepsilon}{\omega_i \rho_i} f_i(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2) \sin(\omega_i t + \theta_i), \quad i = 1, 2 \quad (16)$$

ここに $y_i, \dot{y}_i, i = 1, 2$ は式 (15) で与えられる $\sin, \cos$ に関する時間 t の関数である。平均化法の理論より式 (16) は $\varepsilon > 0$ が十分小さければ, これらの式の右边を ρ_i, θ_i を一定として時間に関して平均化した次の方程式の解で近似されることが知られている。

$$\dot{\rho}_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon}{\omega_i T} \int_0^T f_i(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2) \cos(\omega_i t + \theta_i) dt$$

$$\dot{\theta}_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{-\varepsilon}{\omega_i \rho_i T} \int_0^T f_i(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2) \sin(\omega_i t + \theta_i) dt$$

$$i = 1, 2 \quad (17)$$

上式の右辺の具体的な計算は一見複雑だが, 幾つかの「こつ」を覚えれば以外と簡単である。まず簡単のため, $\psi_i(t) = \omega_i t + \theta_i, i = 1, 2$ と置くと, 式 (14), (15) と式 (17) を用いて上式の右辺は次のように書くことができる。

$$\dot{\rho}_i = \frac{\varepsilon}{\omega_i} \left[\omega_i \rho_i \langle \cos^2 \psi_i \rangle - \frac{1}{2} \omega_i \rho_i^3 \langle \sin^2 \psi_i \cos^2 \psi_i \rangle \right.$$

$$- \frac{1}{2} \omega_i \rho_i \rho_{i+1}^2 \langle \cos^2 \psi_i \sin^2 \psi_{i+1} \rangle$$

$$- \omega_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} \langle \sin \psi_i \sin \psi_{i+1} \cos \psi_i \cos \psi_{i+1} \rangle \left. \right]$$

$$\dot{\theta}_i = \frac{-\varepsilon}{\omega_i} \left[\omega_i \langle \sin \psi_i \cos \psi_i \rangle - \frac{1}{2} \omega_i \rho_i^3 \langle \sin^3 \psi_i \cos \psi_i \rangle \right.$$

$$- \frac{1}{2} \omega_i \rho_i \rho_{i+1}^2 \langle \cos \psi_i \sin \psi_i \sin^2 \psi_{i+1} \rangle$$

$$- \omega_{i+1} \rho_{i+1}^2 \langle \sin^2 \psi_i \sin \psi_{i+1} \cos \psi_i \cos \psi_{i+1} \rangle \left. \right]$$

(18)

ここにおいて $\langle \cdot \rangle$ は括弧内の時間関数の無限時間に渡る平均, すなわち,

$$\langle p(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T p(t) dt \quad (19)$$

を表すものとする. また, $i = 1, 2$ とし添字 3 は 1 と読み替えるものとする. 式 (18) の右辺の計算は次のような三角関数の性質を用いれば比較的簡単である. ただし, 角周波数 ω_1, ω_2 の比は無理数とする (正確にいうと非線形特性の性質によって決まる特定の整数比にならないければよいのであるが, 十分条件として無理数比としている). 実際問題としては $\omega_1/\omega_2 = m/n$ としたとき m, n が小さな整数とならなければ, 以下の計算結果はほぼ成立すると考えてよい.

$$\begin{aligned} \langle \cos^2 \psi_i \rangle &= \left\langle \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\psi_i(t) \right\rangle = \frac{1}{2} \\ \langle \sin \psi_i \cdot \cos \psi_i \rangle &= \left\langle \frac{1}{2} \sin 2\psi_i(t) \right\rangle = 0 \\ \langle \sin^2 \psi_i \cdot \cos^2 \psi_i \rangle &= \left\langle \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos 4\psi_i(t) \right\rangle = \frac{1}{8} \\ \langle \sin^2 \psi_{i+1} \cdot \cos^2 \psi_i \rangle &= \frac{1}{4} \langle 1 + \cos 2\psi_i(t) - \cos 2\psi_{i+1}(t) \\ &\quad - \cos 2\psi_i(t) \cos 2\psi_{i+1}(t) \rangle = \frac{1}{4} \\ \langle \sin \psi_i \sin \psi_{i+1} \cos \psi_i \cos \psi_{i+1} \rangle &= \\ &\quad \left\langle \frac{1}{4} \sin 2\psi_i(t) \sin 2\psi_{i+1}(t) \right\rangle = 0 \\ \langle \sin^2 \psi_i \rangle &= \left\langle \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\psi_i(t) \right\rangle = \frac{1}{2} \\ \langle \sin^3 \psi_i \cos \psi_i \rangle &= \left\langle \frac{1}{4} \sin 2\psi_i(t) - \frac{1}{8} \sin 4\psi_i(t) \right\rangle = 0 \\ \langle \sin \psi_i \cos \psi_i \sin^2 \psi_{i+1} \rangle &= \\ &\quad \left\langle \frac{1}{4} \sin 2\psi_i(t) - \frac{1}{4} \sin 2\psi_i(t) \cos 2\psi_{i+1}(t) \right\rangle = 0 \\ \langle \sin^2 \psi_i \sin \psi_{i+1} \cos \psi_{i+1} \rangle &= \\ &\quad \left\langle \frac{1}{4} \sin 2\psi_{i+1}(t) - \frac{1}{4} \sin 2\psi_{i+1}(t) \cos 2\psi_i(t) \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

式 (20) において $i = 1, 2$ であるが $i+1$ が 3 になった場合には 1 と読み替えるものとする. 式 (18) と式 (20) より, $\dot{\rho}_1, \dot{\theta}_1, \dot{\rho}_2, \dot{\theta}_2$ に関する平均化された方程式は次のように求められる.

$$\dot{\rho}_1 = \frac{1}{16} \varepsilon \rho_1 (8 - \rho_1^2 - 2\rho_2^2) \quad (21a)$$

$$\dot{\rho}_2 = \frac{1}{16} \varepsilon \rho_2 (8 - \rho_2^2 - 2\rho_1^2) \quad (21b)$$

$$\dot{\theta}_1 = 0 \quad (21c)$$

$$\dot{\theta}_2 = 0 \quad (21d)$$

位相に関する式の微分が 0 となるのは, 式 (15) で定義された y_1 と y_2 の角周波数 ω_1 と ω_2 の間には非共鳴の仮定がなされているからで, このため相互に何ら干渉はなく, $\theta_1(t), \theta_2(t)$ は与えられた初期値をそのまま保持する.

さて, 次に平均化された振幅に関する方程式 (21a), (21b) を解析して, どのような解が安定に存在するか調べてみよう. 定常状態では振幅は一定と考えられるから振幅の微分は 0 となる. すなわち, 振幅に関する方程式の安定な平衡点の実現できる定常状態となる. 平衡点としては

$$(\rho_{1s}, \rho_{2s}) = (0, 0), (2\sqrt{2}, 0), (0, 2\sqrt{2}), (\sqrt{8/3}, \sqrt{8/3}) \quad (22)$$

の 4 個が存在する. これらの平衡点は振幅に関する平均化方程式の平衡点周りのヤコビ行列のすべての固有値の実部が負のときに限り漸近安定となる. ヤコビ行列 $\mathbf{J}$ は次のようになる.

$$\mathbf{J} = \frac{1}{16} \varepsilon \begin{bmatrix} 8 - 3\rho_{1s}^2 - 2\rho_{2s}^2 & -4\rho_{1s}\rho_{2s} \\ -4\rho_{1s}\rho_{2s} & 8 - 2\rho_{1s}^2 - 3\rho_{2s}^2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

安定判別の結果, $\varepsilon > 0$ として漸近安定な平衡点は, $(2\sqrt{2}, 0)$, $(0, 2\sqrt{2})$ で, 他はすべて不安定であることが分かる. 平衡点 $(2\sqrt{2}, 0)$ に対応する y 領域の定常解は $y_1 = 2\sqrt{2} \sin(\omega_1 t + \theta_1)$, $y_2 = 0$ となり, 平衡点 $(0, 2\sqrt{2})$ に対応する定常解は $y_1 = 0$, $y_2 = 2\sqrt{2} \sin(\omega_2 t + \theta_2)$ となる. これらを x 領域の解に書き直すと

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

の関係から次のようになる.

- 平衡点 $(2\sqrt{2}, 0)$ に対する解 (= 同相解):

$$x_1 = x_2 = 2 \sin(\omega_1 t + \theta_1)$$

- 平衡点 $(0, 2\sqrt{2})$ に対する解 (= 逆相解):

$$x_1 = -x_2 = 2 \sin(\omega_2 t + \theta_2)$$

ここにおいて $\omega_1 = \sqrt{1-\alpha}$, $\omega_2 = \sqrt{1+\alpha}$ であり, θ_1, θ_2 は任意定数である. 以上のように結合発振器は $0 < \varepsilon \ll 1$ の場合, 図 8 のように与えられた初期値により二つの発振器の出力電圧が同相に同期した状態と逆相に同期した状態の二つの定常状態が共存していることが分かる. これは基本的に 4.1 で述べたキャパシタ結合の相互同期系と同じ振舞いである.

4.3 二つの硬発振器の結合系

4.2 では三次の非線形特性を持つ, いわゆる軟発振器の結合系について解析した. 本節では, 各発振器は五次の非線形特性を持つ, いわゆる硬発振器となった場合について同様の解析を行う^{(3), (4)}. この場合, 非線形素子の $I-V$ 特性は $i = g_1 v - g_3 v^3 + g_5 v^5$, $g_1, g_3, g_5 > 0$ で与えられ, その一般的な形は図 9 のようになる. 図 7 の回路において非線形特性 N がこのような五次の非線形特性として与えられた場合の基礎方程式は適当な正規化の後, 次のように書くことができる.

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \varepsilon(1 - \beta x_1^2 + x_1^4) \dot{x}_1 + x_1 - \alpha x_2 &= 0 \\ \ddot{x}_2 + \varepsilon(1 - \beta x_2^2 + x_2^4) \dot{x}_2 + x_2 - \alpha x_1 &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

ここにおいて $0 < \varepsilon \ll 1$ は非線形特性の強さを表す定数,

(a) 同相解

(b) 逆相解

図 8 軟発振器の結合系における安定なモード
文献 (3) 転載

$0 \leq \alpha \leq 1$ は結合係数, β は発振振幅を決める定数とする. この方程式は次のような形のベクトル微分方程式として表される.

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{x} = -\varepsilon\dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{3}\varepsilon\beta\dot{\mathbf{x}}_c - \frac{1}{5}\varepsilon\dot{\mathbf{x}}_f \quad (25a)$$

ここに

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T, \mathbf{x}_c = [x_1^3, x_2^3]^T, \mathbf{x}_f = [x_1^5, x_2^5]^T \quad (25b)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

となる. 式 (25a) に線形変換: $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$ を行い, 左から $\mathbf{P}^{-1}$ を乗ずると次式が得られる.

$$\ddot{\mathbf{y}} + (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P})\mathbf{y} = -\varepsilon\dot{\mathbf{y}} + \frac{1}{3}\varepsilon\beta(\mathbf{P}^{-1}\dot{\mathbf{x}}_c) - \frac{1}{5}\varepsilon(\mathbf{P}^{-1}\dot{\mathbf{x}}_f) \quad (26)$$

上式において $\mathbf{B}$ の固有値は $\lambda_1 = 1 - \alpha$, $\lambda_2 = 1 + \alpha$ となる. 4.2 と同様にして対角化することにより, 上式は次のようなスカラー形式の微分方程式となる.

$$\ddot{y}_i + \omega_i^2 y_i = \varepsilon f_i(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2), i = 1, 2 \quad (27a)$$

ここに $\omega_i^2 \equiv \lambda_i$ また

図 9 硬発振器の非線形素子の $I - V$ 特性

$$f_i(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2) \equiv -\dot{y}_i + \frac{1}{3}\beta g_i(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2) - \frac{1}{5}h_i(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2) \quad (27b)$$

となる. 更に g_1, g_2, h_1, h_2 は次式のように定義される.

$$[g_1, g_2]^T = \mathbf{P}^{-1}\dot{\mathbf{x}}_c = \frac{d(\mathbf{P}^T \mathbf{x}_c)}{dt} \quad (28)$$

$$[h_1, h_2]^T = \mathbf{P}^{-1}\dot{\mathbf{x}}_f = \frac{d(\mathbf{P}^T \mathbf{x}_f)}{dt}$$

これらは具体的に次のように計算される.

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}y_1^2\dot{y}_1 + \frac{3}{2}\dot{y}_1y_2^2 + 3y_1y_2\dot{y}_2 \\ \frac{3}{2}y_2^2\dot{y}_2 + \frac{3}{2}\dot{y}_2y_1^2 + 3y_2y_1\dot{y}_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2\sqrt{2}}y_1^4\dot{y}_1 + \frac{15}{\sqrt{2}}y_1^2\dot{y}_1y_2^2 + \frac{10}{\sqrt{2}}y_1^3y_2\dot{y}_2 \\ \frac{5}{2\sqrt{2}}y_2^4\dot{y}_2 + \frac{15}{\sqrt{2}}y_2^2\dot{y}_2y_1^2 + \frac{10}{\sqrt{2}}y_2^3y_1\dot{y}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{2\sqrt{2}}\dot{y}_1y_2^4 + \frac{10}{\sqrt{2}}y_1\dot{y}_2^3y_2 \\ \frac{5}{2\sqrt{2}}\dot{y}_2y_1^4 + \frac{10}{\sqrt{2}}y_2\dot{y}_1^3y_1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

式 (27a) の解を式 (15) のように置き, $\rho_i \rightarrow \rho_i(t)$, $\theta_i \rightarrow \theta_i(t)$ として平均化法の理論を基に ρ 及び θ に関して平均化された方程式 (16) を式 (27b) の f_1, f_2 を用いて具体的に計算する. この際, 角周波数 ω_1, ω_2 の比は特定の整数比にない, または無理数とする. 平均化方程式は $U_i \equiv \rho_i^2, i = 1, 2$ と置くと次のようになる.

$$\dot{U}_1 = -\varepsilon U_1 \left(1 - \frac{1}{8}\beta U_1 - \frac{1}{4}\beta U_2 + \frac{1}{32}U_1^2 + \frac{3}{32}U_2^2 + \frac{3}{16}U_1U_2 \right)$$

$$\dot{U}_2 = -\varepsilon U_2 \left(1 - \frac{1}{8}\beta U_2 - \frac{1}{4}\beta U_1 + \frac{1}{32}U_2^2 + \frac{3}{32}U_1^2 + \frac{3}{16}U_2U_1 \right)$$

$$\dot{\theta}_1 = 0$$

$$\dot{\theta}_2 = 0 \quad (30)$$

位相に関する項の微分が 0 となるのは, y_1, y_2 が位相的に無関係であることを示す. したがって振幅に関する方程式の平衡点周りの解析から可能な振動状態はすべて求まる. 振幅に関する平衡点としては以下の 9 個が存在する (複合同順).

$$(U_{1s}, U_{2s}) = (0, 0), (2\beta \pm 2\sqrt{\beta^2 - 8}, 0), (0, 2\beta \pm 2\sqrt{\beta^2 - 8}),$$

$$\left(\frac{3\beta \pm \sqrt{9\beta^2 - 80}}{5}, \frac{3\beta \pm \sqrt{9\beta^2 - 80}}{5} \right)$$

$$(\beta \pm \sqrt{16 - \beta^2}, \beta \mp \sqrt{16 - \beta^2}) \quad (31)$$

これらの平衡点のうち, 漸近安定なものは以下の四つのみであり, 他はすべて不安定であることが分かる.

$$(U_{1s}, U_{2s}) = (0, 0), (2\beta + 2\sqrt{\beta^2 - 8}, 0), (0, 2\beta + 2\sqrt{\beta^2 - 8}), \left(\frac{3\beta + \sqrt{9\beta^2 - 80}}{5}, \frac{3\beta + \sqrt{9\beta^2 - 80}}{5} \right) \quad (32)$$

平衡点 $(0, 0)$ は無発振状態が安定であることを意味する。次の二つの平衡点のうち、前者に対応する y 領域の定常解は

$$y_1 = \sqrt{2\beta + 2\sqrt{\beta^2 - 8}} \sin(\omega_1 t + \theta_1), y_2 = 0 \quad (33)$$

後者に対応するものは

$$y_1 = 0, y_2 = \sqrt{2\beta + 2\sqrt{\beta^2 - 8}} \sin(\omega_2 t + \theta_2) \quad (34)$$

となり、これを x 領域の解に書き直すと、 $x_1 = y_1/\sqrt{2} + y_2/\sqrt{2}$, $x_2 = y_1/\sqrt{2} - y_2/\sqrt{2}$ の関係から次のようになる。

- 平衡点 $(2\beta + 2\sqrt{\beta^2 - 8}, 0)$ に対する解 (= 同相解):
安定領域 $\beta^2 > 8$

$$x_1 = x_2 = \sqrt{\beta + \sqrt{\beta^2 - 8}} \sin(\omega_1 t + \theta_1)$$

- 平衡点 $(0, 2\beta + 2\sqrt{\beta^2 - 8})$ に対する解 (= 逆相解):
安定領域 $\beta^2 > 8$

$$x_1 = -x_2 = \sqrt{\beta + \sqrt{\beta^2 - 8}} \sin(\omega_2 t + \theta_2)$$

同様にして最後の平衡点に対応する解は次のように求められる。

- 平衡点 $((3\beta + \sqrt{9\beta^2 - 80})/5, (3\beta + \sqrt{9\beta^2 - 80})/5)$ に対する解 (= 二重モード解):

安定領域 $4\sqrt{5}/3 < \beta < 4$

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{0.3\beta + 0.3\sqrt{\beta^2 - \frac{80}{9}}} \sin(\omega_1 t + \theta_1) \\ &\quad + \sqrt{0.3\beta + 0.3\sqrt{\beta^2 - \frac{80}{9}}} \sin(\omega_2 t + \theta_2) \\ x_2 &= \sqrt{0.3\beta + 0.3\sqrt{\beta^2 - \frac{80}{9}}} \sin(\omega_1 t + \theta_1) \\ &\quad - \sqrt{0.3\beta + 0.3\sqrt{\beta^2 - \frac{80}{9}}} \sin(\omega_2 t + \theta_2) \end{aligned}$$

ここにおいて $\omega_1 = \sqrt{1 - \alpha}$, $\omega_2 = \sqrt{1 + \alpha}$ であり、 θ_1, θ_2 は任意定数である。

以上のように結合硬発振器は $0 < \varepsilon \ll 1$ の場合、図 8 のように与えられた初期値により二つの発振器の出力電圧が同相に同期した状態と逆相に同期した状態、更には図 10 のようにこれらの混在した概周期振動を表す二重モード解の三つの定常状態が共存していることが分かる。図 4.3 は $\beta = 3.3$ における式 (30) の振幅に関する位相平面で、各安定平衡点の引込領域はくら形平衡点

D の安定多様体 (セパトリックス) によって区切られている様子がよく分かる。

図 10 硬発振器の結合系における安定な二重モード解。
文献 (3) より転載

図 11 硬発振器の平均化方程式の位相平面図 S: 同相解の平衡点, R: 逆相解の平衡点, D: 二重モード解の平衡点, 太線はサドルの安定多様体を表す。
文献 (3) より転載

4.4 二つの異なる解析法の結果に与える影響

第 1 の方法でコンデンサで結合された二つの (軟) 発振器の結合系を解析した場合、4.1 で示したように離調がないとき、結合係数 α が十分に 0 に近いならば同相同期解と逆相同期解の二つの解が共に安定で、共存するとの結論が得られた。また、第 2 の方法でインダクタンスで結合された二つの (軟) 発振器の結合系を解析した場合、4.2 で示したように (結合係数 α が小さくないとき) 同相同期解と逆相同期解の二つの解が共に安定で、共存するとの結論が得られた (三次の非線形特性を持つ発振器の結合系を第 2 の方法で解析した場合、二重モード解は平衡点としては存在するが、不安定であるため物理的には実現されない)。しかし、第 2 の方法で 4.3 で示したインダクタンスで結合された二つの (硬) 発振器の結合系を解析した場合、同相同期解と逆相同期解のほか、これらが同時に現れる二重モード解 (概周期解) も安定に存在することが示された。仮に、4.3 で示したような二つの硬発振器の結合系を第 1 の方法で解析した場合には、安定な同相同期解と逆相同期解は求まるが、二重モード解は原理的に求まらない。

同じ系であっても解析方法の違いによって求まる解が異なるのは、第1の方法では結合係数 α を十分に小さいと仮定しているため、解の形を決める無摂動系の解が式(2)のように単一の周波数成分から構成されるためと考えられる。これは物理的に考えると、仮に二重モード解(概周期振動)が現れたとした場合、その構成周波数成分である逆相、同相周波数が極めて近いので同期引込を起こし、単一周波数の振動となることを表しているものと思われる。一方、第2の方法では、結合係数を小さいとはしていないため同相、逆相の固有周波数はある程度離れており、二重モード振動が安定であれば、これが出現するわけである。このように見ると第2の方法の方が第1の方法よりも一見優れているように思えるが必ずしもそうではない。すなわち、二つの発振器間に固有周波数のずれ(離調)がある場合、同相、逆相において 0° もしくは 180° からの位相差はあられず、各々の発振器の出力電圧 x_1, x_2 の振幅の違いとしてあらわれる。一方、第1の方法によれば、離調があるときは、同相、逆相同期からの位相差があらわれる。どちらが正しいかは結合係数 α の大きさによる。すなわち、 α が大きければ第2の方法の結論のように、また α が小さければ第1の方法の結論ようになる。このように実際の系に平均化法を適用する場合、何を ε オーダの微少量と考えるかによって、解析の出発点となる無摂動系の形が変わるため、結果が異なる場合がある。この辺りは、平均化法の適用において十分注意すべき点と考えられる。

5. 結 論

二つの発振器の結合系を平均化法によって解析する場合、代表的な二つの異なる解析法があることを紹介し、その特徴を比較した。また、非線形問題研究会の歴史や筆者の幹事その他としての感想を述べた。発振器の結合系の研究は現在様々な分野で研究が活発に進められており^{(5), (6)}、一部応用的な研究⁽⁷⁾も行われている。以上のようなわけで今後ますますの発展が期待される。

謝辞 本解説論文の作成にあたり、明治大学研究員 清水邦康氏の世話になった。誌面を借りて謝意を表します。

文 献

- (1) 末崎輝雄, 森 真作, “二つの発振器の相互同期,” 電気通信学会雑誌, vol. 48, no.9, pp.1551-1557, 1965.
- (2) T. Endo and S. Mori, “Mode analysis of a multimode ladder oscillator,” IEEE Trans. Circuits Syst., vol.CAS23, no.2, pp.100-113, 1976.
- (3) 遠藤哲郎, 非線形回路, コロナ社, 東京, 2004.
- (4) T. Endo and T. Ohta, “Multimode oscillations in a coupled oscillator system with fifth-power nonlinear characteristics,” IEEE Trans. Circuits Syst., vol.CAS27, no.4, pp.277-283, 1980.
- (5) Y. Uwate and Y. Nishio, “Synchronization phenomena in van der Pol oscillators coupled by a time-varying resistor,” Int. J. Bifurcation Chaos, vol.17, no.10, pp.3565-3569, 2007.
- (6) M. Yamauchi, M. Wada, Y. Nishio, and A. Ushida, “Wave propagation phenomena of phase states in oscillators coupled by inductors as a ladder,” IEICE Trans.Fundamentals, vol.E82-A, no.11, pp.2592-2598, Nov. 1999.
- (7) T. Miyano and T. Tsutsui, “Data synchronization in a network of coupled phase oscillators,” Phys. Rev. Lett., vol.98, 024102, 2007.

(平成 20 年 6 月 3 日受付 平成 20 年 8 月 21 日最終受付)

遠藤哲郎 (正員：フェロー)

1972 慶大・工・電気卒。1977 同大学院博士課程了。同年、防衛大・電気・助手。同講師、助教授を経て、1992 明大・理工・電子通信・教授。この間、発振器、PLL、カオスなどの非線形振動の研究に従事。1986 から 1989 まで本学会非線形問題研究会幹事。1990 から 1994 まで本学会基礎・境界研究グループ論文誌編集委員。1996 本学会非線形問題研究会副委員長。1997 同委員長。1995 から 1997 まで、IEEE Circuits & Systems 誌アソシエイトエディタ。2006 から本学会基礎・境界ソサイエティ副会長(非線形理論とその応用)。IEEE、電気本学会各会員。