位置推定における統計的推定理論

Statistical Estimation Theory in Localization

原 晋介 Shinsuke HARA

アブストラクト 電波を送受信することによって目的とする対象物の位置を推定する場合、その電波についてのより詳しい伝搬特性やその対象物についてのより多くの情報を用いることができれば、それだけより高い精度が得られる。本稿では、位置推定で用いられている初歩的な統計的推定理論について解説し、それらが非線形連続関数の最大化あるいは最小化問題として解くことができることを明らかにする。また、推定誤差に関するクラメル・ラオの下界式を示し、その結果から導き出される幾つかの性質について示す。

キーワード 最小二乗法、最尤度推定法、最大事後確率推定法、クラメル・ラオ下界式、TOA、RSSI

1. はじめに

直面する問題や対象とするシステムの中で、判断、検出や推定を行わなければならない場合、その問題やシステムに対して、確率的、言い換えると統計的な性質が導入できれば、その性質をうまく使って合理的な判断、検出や推定が行えるようになる。ここで、判断と検出は何かを推定してから行うものであることを考えると、統計的に一番確からしく推定することが考え方の基本となる。実際、このような統計的推定理論は現代の情報通信や情報処理の分野で重要な役割をしており、本稿で対象とする位置推定の中でもそれがうまく使われている。

本稿では、まず、直面する問題を統計的推定理論を使って解くことを解説し、その後に本論である位置推定の中での統計的推定理論の使い方を詳解する。

2. 推定理論を使った問題の解法

図1に示すように、ここに大きな袋が一つあり、その中に幾つかの箱 (box, b と表記) が入っているとしよう。見た目には区別がつかないが箱には二つの種類があり、箱Aには赤い (red, r) 石 (stone, s) が5個と白い (white, w) 石が1個、一方、箱Bには赤い石が2個と白い石が4個入っている。あなたがこの袋から箱を一つ選び、そしてその中から石を一つ取り出したときに、「もしも取り出した石が赤であれば、あなたが選んだ箱はAだと思った方がよいのか、それともBだと思った方がよいのか?」という問題に対し、あなたはどうか答えるだろうか?

図1 箱を選択して石を取り出す問題

この場合、あなたは「多分、その箱はAであろう」と直感的に答えると思うが、合理的に答えを導き出すためには推定理論を使えばよい。今、取り出した石が赤であることが分かっているので、その条件のもとで箱がAである (事後) 確率と箱がBである (事後) 確率を比較し、箱がAである確率がより大きければ、その箱はAである:

$$P(b=A|s=r) > P(b=B|s=r) \Rightarrow b=A \quad (1)$$

と推定し、逆に、箱がAである確率がより小さければ、その箱はBである:

$$P(b=A|s=r) < P(b=B|s=r) \Rightarrow b=B \quad (2)$$

と推定すれば合理的であることが分かる。ここでは、「取り出した石が赤である」という事実が条件となり、対象とする事柄の (事後) 確率の大小で推定が直接行われているので、これを最大事後確率 (MAP, Maximum A Posteriori) 推定と呼ぶ⁽¹⁾。では、この問題の場合、MAP推定が行えるのであろうか。

問題から、選んだ箱が分かったという条件のもとで、赤い石と白い石を取り出す確率は計算できるので、それらを条件付き確率で表すと、

原 晋介 正員 大阪市立大学大学院工学研究科
Shinsuke HARA, Member (Graduate School of Engineering, Osaka City University,
Osaka-shi, 558-8585 Japan).
電子情報通信学会 基礎・境界サイエティ
Fundamentals Review Vol.4 No.1 pp.32-38 2010年7月
©電子情報通信学会 2010

$$P(s=r|b=A)=\frac{5}{6}, P(s=w|b=A)=\frac{1}{6} \quad (3)$$

$$P(s=r|b=B)=\frac{2}{6}, P(s=w|b=B)=\frac{4}{6} \quad (4)$$

となる。これらは取り出した石が赤か白かという確率を表しているのであって、箱がAかBかという確率を表していないことに注意しなければならない。一方、ベイズの法則を使うと、(1)と(2)で与えられる条件付確率は(3)と(4)で与えられる条件付確率を使って次のように表すことができる：

$$\begin{aligned} P(s=r \text{ or } w, b=A \text{ or } B) &= P(s=r \text{ or } w|b=A \text{ or } B)P(b=A \text{ or } B) \\ &= P(b=A \text{ or } B|s=r \text{ or } w)P(s=r \text{ or } w) \quad (5) \\ \therefore P(b=A \text{ or } B|s=r \text{ or } w) &= \frac{P(b=A \text{ or } B)}{P(s=r \text{ or } w)} P(s=r \text{ or } w|b=A \text{ or } B) \end{aligned}$$

しかしながら、(5)を見ると、事後確率を計算しようとする、袋の中の箱Aと箱Bのそれぞれの個数を知ってないと計算できない「箱の事前確率 $P(b=A \text{ or } B)$ 」が含まれていることが分かる。したがって、この問題の場合、それらは未知であるのでMAP推定は行えないことになる。

しかし、事前確率が未知の場合でも我々は推定しなければならない状況に現実の多くの場面では直面する。上でも述べたが、この場合、あなたは「多分、その箱はAであろう」と直感的に思うのである。それは、推定に使うことができる唯一の値を用いて

$$P(s=r|b=A)=\frac{5}{6} > P(s=r|b=B)=\frac{2}{6} \Rightarrow b=A \quad (6)$$

という推定を頭の中で自然に行っているからである。もう一度言うが、これらは石が赤か白かについての確率であり、箱がAかBかについての確率的な意味を全く持っていない。しかし、箱についても何らかの「もっともらしさを表す度合い」を表しているはずであるので、我々はこれらを箱がAかBかについての尤度値と呼ぶ。(6)で推定する方法は最尤(ML, Maximum Likelihood)推定と呼ばれる⁽¹⁾。MAP推定とML推定の能力差は、この問題の場合、箱Aが1個で箱Bが1,000個であったという箱についての事前分布を知っていた場合について答えを出せば一目瞭然である。この場合、MAP推定による答えは「箱Bである」になるが、ML推定による答えは「箱Aである」になる。

3. 位置推定とは

前章では、簡単な問題を合理的に解く方法の中でMAP推定とML推定について紹介した。では、本論である位置推定の問題に移ろう。

目的とする対象物の二次元あるいは三次元座標を推定することを位置推定あるいは測位と呼び、英語ではlocation,

location estimation, positioning や localization と呼んでいる。「位置が既知である異なる複数の地点と対象物の間の距離に関する情報を集めて対象物の座標を推定すること」が位置推定の原理であり、以下では、位置が既知である地点のことをアンカーポイント、対象物をターゲットと呼ぶ。一般に、ターゲットのN次元座標を推定する場合、N+1のアンカーポイントとターゲットとの間の距離に関する情報を取得する必要がある。

4. 位置推定法の分類

位置推定法は、アンカーポイントーターゲット間距離に関する情報に対し、その距離を推定すなわち測距(range)を行わずに位置推定を行うものと、実際に何からの方法で測距し位置推定を行うものの二つに大きく分類できる。前者の代表的なものに、マルチホップネットワークにおいて、アンカーポイントとターゲットとの間のノードのホップ数を用いて位置推定を行うものがある⁽²⁾。一方、後者は確定的な方法と統計的な方法の二つに分類できる。確定的方法の代表的なものに、指紋照合(finger printing)と同じ原理に基づくものがあり⁽³⁾、一方、統計的方法は、得られる情報を距離に関する幾つかのパラメータを持った関数として取り扱うものと、そうでないものの二つに更に分類できる⁽⁴⁾。以下で解説するものはパラメトリックな統計位置推定法である。図2に推定法の分類をまとめる。

5. 位置推定法の原理

n番目のアンカーポイント($n=1, \dots, N$)の既知位置とターゲットの推定すべき未知位置を $[x_n, y_n, z_n]$ と $[x, y, z]$ でそれぞれ表し、未知パラメータベクトルを $\Phi=[x, y, z]$ と表そう。n番目のアンカーポイントはターゲットまでの距離に関する何らかの測定がL回可能であると仮定し($l=1, \dots, L$)、その測定値をL次元ベクトルで

$$\mathbf{M}_n = [M_{n1}, \dots, M_{nL}] \quad (7)$$

と表す。測定できるものの例としては、アンカーポイントーターゲット間の信号の到来時間(TOA: Time Of Arrival)、到来角(AOA: Angle Of Arrival)や受信信号強度(RSSI: Received Signal Strength Indication)等がある。位置推定問題とは、 $\mathbf{M}_n$ ($n=1, \dots, N$)が与えられたときに、 $\Phi=[x, y, z]$ をいかに精度良く推定するかという問題である。

図2 位置推定法の分類

5.1 最小二乗法

図3に示すようなTOAを用いた具体的な例の中で、ターゲットの三次元座標を推定する問題を考えよう。簡単のため、各アンカーポイントが信号を送信し、ターゲットはその受信信号のTOAを1回だけ測定 ($L=1$ なので(7)で添え字1を省略する) し、その伝搬遅延を計算する。 n 番目のアンカーポイントからの信号の測定伝搬遅延が $M_n (=t_n)$ であれば、その測定距離 ($d_n; n=1, \dots, N$) は

$$d_n = ct_n \quad (8)$$

で計算できる。ただし、 $c (=3.0 \times 10^8 [\text{m/s}])$ は電波の速度であり既知の定数である。一方、それぞれの座標を用いてその真の距離は

$$\tilde{d}_n(\boldsymbol{\varphi}) = \sqrt{(x-x_n)^2 + (y-y_n)^2 + (z-z_n)^2} \quad (9)$$

で計算できる。もしTOAの測定値に誤差が全くなければ、(8)と(9)は一致するはずであるが、実際には測定誤差があり一致しない。したがって、(8)と(9)を用いて、より正確にターゲットの位置を推定する必要がある。

測定誤差の事前分布等、測定誤差に対する事前情報を我々が知らない場合、以下のようにすると位置推定が行える。すなわち、 n 番目のアンカーポイントに関する測定距離と真の距離との誤差の二乗を $e_n(\boldsymbol{\varphi})$ で定義すると、それは

$$e_n(\boldsymbol{\varphi}) = (d_n - \tilde{d}_n(\boldsymbol{\varphi}))^2 = (ct_n - \tilde{d}_n(\boldsymbol{\varphi}))^2 \quad (10)$$

と書ける。したがって、 N 個のアンカーポイントに対する距離測定誤差の二乗の和は

$$E(\boldsymbol{\varphi}) = \sum_{n=1}^N e_n(\boldsymbol{\varphi}) = \sum_{n=1}^N (ct_n - \tilde{d}_n(\boldsymbol{\varphi}))^2 \quad (11)$$

と表せる。(11)は常に正値をとることを利用し、それを最小にする $\boldsymbol{\varphi} = [x, y, z]$ を見つけることによってターゲットの位置が推定できる：

図3 TOAを用いた測位の例

find $\boldsymbol{\varphi} = [x, y, z]$ which minimizes

$$E(\boldsymbol{\varphi}) = \sum_{n=1}^N e_n(\boldsymbol{\varphi}) = \sum_{n=1}^N (ct_n - \tilde{d}_n(\boldsymbol{\varphi}))^2 \quad (12)$$

(12)は $\boldsymbol{\varphi}$ に関して非線形連続関数なので、位置推定問題は拘束条件なしの非線形連続関数の最小化問題に帰着する。この方法は最小二乗法 (LS: Least Squares) と呼ばれており⁽⁵⁾、様々な解法があるが、局所解に陥らずに本当の最適解を探索する工夫が必要となる。

5.2 最尤推定法

次に、 N 個のアンカーポイントに対して、真のTOAが分かっているという条件のもとでの測定TOAの結合分布：

$$p(t_1, \dots, t_n, \dots, t_N | \tilde{d}_1(\boldsymbol{\varphi}), \dots, \tilde{d}_n(\boldsymbol{\varphi}), \dots, \tilde{d}_N(\boldsymbol{\varphi})) = p(t_1, \dots, t_n, \dots, t_N | \boldsymbol{\varphi}) \quad (13)$$

を知っていると仮定しよう。 t_n ($n=1, \dots, N$) の測定誤差が互いに統計的独立であると仮定すると、(13)は

$$l(\boldsymbol{\varphi}) = p(t_1, \dots, t_n, \dots, t_N | \boldsymbol{\varphi}) = \prod_{n=1}^N p(t_n | \boldsymbol{\varphi}) \quad (14)$$

と書くことができる。これは測定TOA t_n ($n=1, \dots, N$) が与えられたときの $\boldsymbol{\varphi} = [x, y, z]$ のまさに尤度関数であるので、(14)を最大にする $\boldsymbol{\varphi} = [x, y, z]$ を見つけることによってターゲットの位置が推定できる。ただし、(14)から最大値を直接探索するのではなく、尤度関数の対数値を対数尤度関数と定義し、その最大値を探索することが多い：

find $\boldsymbol{\varphi} = [x, y, z]$ which maximizes

$$L(\boldsymbol{\varphi}) = \sum_{n=1}^N \log p(t_n | \boldsymbol{\varphi}). \quad (15)$$

(15)も $\boldsymbol{\varphi}$ に関して非線形連続関数なので、位置推定問題は拘束条件なしの非線形連続関数の最大化問題に帰着する。この方法がML推定法である。

TOAの測定誤差の分布は次のガウス分布で与えられることが多い⁽⁶⁾：

$$p(t_n | \boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} e^{-\frac{(t_n - \tilde{d}_n(\boldsymbol{\varphi})/c)^2}{2\sigma_t^2}} \quad (16)$$

ここで、 $\tilde{d}_n(\boldsymbol{\varphi})/c$ と σ_t^2 はTOAの平均と分散である。(16)を(15)に代入すると、

$$L(\boldsymbol{\varphi}) = -\sum_{n=1}^N \frac{(ct_n - \tilde{d}_n(\boldsymbol{\varphi}))^2}{2c^2\sigma_t^2} + C_L \quad (17)$$

となるので(ただし、 C_L は $\boldsymbol{\varphi}$ に依存しない定数)、左辺の最大

化問題は右辺第1項の分子の最小化問題に帰着する：

$$\begin{aligned} \text{find } \boldsymbol{\varphi} = [x, y, z] \text{ which minimizes} \\ R(\boldsymbol{\varphi}) = \sum_{n=1}^N \left(ct_n - \tilde{d}_n(\boldsymbol{\varphi}) \right)^2. \end{aligned} \quad (18)$$

(18)は(12)と同じである。すなわち、測定誤差がガウス分布に従うときだけ、最小二乗法による推定位置と最尤法による推定位置は一致する。

TOAを用いた位置推定の利点は、TOAが平均と分散という2パラメータを持ったガウス分布で与えられる場合、言い換えると、その測定誤差が分散という1パラメータ(平均は0)を持ったガウス分布で与えられる場合、最終的に得られる(18)にはそのパラメータが含まれないことである。つまり、TOAの測定誤差の分散値を知らなくても最尤位置推定が行える。

5.3 最大事後確率推定法

更に、ターゲット位置の事前分布 $p(\boldsymbol{\varphi})$ も知っていると仮定しよう。この場合、ベイズの法則より

$$p(\boldsymbol{\varphi} | t_n) = \frac{p(t_n | \boldsymbol{\varphi}) \times p(\boldsymbol{\varphi})}{p(t_n)} = C_M p(t_n | \boldsymbol{\varphi}) \times p(\boldsymbol{\varphi}) \quad (19)$$

と書ける。ただし、 C_M は $\boldsymbol{\varphi}$ に依存しない定数である。TOAの測定誤差が互いに統計的独立である条件のもとでは、MAPによる位置推定問題は次の拘束条件なし非線形連続関数の最大化問題に帰着する：

$$\begin{aligned} \text{find } \boldsymbol{\varphi} = [x, y, z] \text{ which maximizes} \\ M(\boldsymbol{\varphi}) = \sum_{n=1}^N \log p(\boldsymbol{\varphi} | t_n). \end{aligned} \quad (20)$$

(19)も $p(t_n | \boldsymbol{\varphi})$ で書けるため、結局、位置推定は $p(t_n | \boldsymbol{\varphi})$ 、つまり、位置推定を行う場所での電波の伝搬特性をいかに正確に把握するかが鍵となる。この電波の伝搬特性が幾つかのパラメータを持った関数で表せると仮定し、位置推定を行うものがパラメトリックな統計位置推定法である。

6. 推定結果の評価：クラメル・ラオの下界式

自分が考案した位置推定法の性能を計算機シミュレーションあるいは実験によって評価した場合、その得られた性能が正しいかどうか、あるいはまだ改善の余地があるかどうかを考察する必要がある。その場合に便利なツールとなるのが推定誤差の分散に対するクラメル・ラオの下界式である。

6.1 最尤位置推定に対するクラメル・ラオの下界式

簡単のため、ターゲットは $z=0$ の平面上に存在するとし、2次元座標 $\boldsymbol{\varphi} = [x, y]$ を推定する問題を考える。また、各アンカーポイントターゲット間の距離に関する情報の測定誤差は独立で同一の分布 $M_{nl} = M_n$ ($l=1, \dots, L$)に従うものと仮定する。この場合、対数尤度関数は

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\varphi}) &= \sum_{n=1}^N \log p(\mathbf{M}_n | \tilde{d}_n(\boldsymbol{\varphi})) = \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N \log p(M_{nl} | \tilde{d}_n(\boldsymbol{\varphi})) \\ &= \sum_{n=1}^N L \log p(M_n | \tilde{d}_n(\boldsymbol{\varphi})) = \sum_{n=1}^N L_n(\boldsymbol{\varphi}) \end{aligned} \quad (21)$$

と書ける。ここで $L_n = \log p(M_n | \tilde{d}_n(\boldsymbol{\varphi}))$ である。クラメル・ラオの下界式はフィッシャー情報行列から計算できるので、まずフィッシャー情報行列を求めることから始める。(21)は対数尤度関数を表しているが、この尤度関数に対するフィッシャー情報行列は次式で定義される⁽⁷⁾：

$$J_F(\boldsymbol{\varphi}) = -E \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} L(\boldsymbol{\varphi}) & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} L(\boldsymbol{\varphi}) \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} L(\boldsymbol{\varphi}) & \frac{\partial^2}{\partial y^2} L(\boldsymbol{\varphi}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (22)$$

ここで、 $E[\cdot]$ は $(\cdot)$ の統計的平均を表す。更に

$$E \left[\frac{\partial L_n(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \tilde{d}_n(\boldsymbol{\varphi})} \right] = 0 \quad (23)$$

であることを考慮に入れると、(22)の各要素は

$$J_{11} = -L \sum_{n=1}^N \xi_n(\boldsymbol{\varphi}) \left(\frac{\partial \tilde{d}_n(\boldsymbol{\varphi})}{\partial x} \right)^2 \quad (24)$$

$$J_{22} = -L \sum_{n=1}^N \xi_n(\boldsymbol{\varphi}) \left(\frac{\partial \tilde{d}_n(\boldsymbol{\varphi})}{\partial y} \right)^2 \quad (25)$$

$$J_{12} = J_{21} = -L \sum_{n=1}^N \xi_n(\boldsymbol{\varphi}) \frac{\partial \tilde{d}_n(\boldsymbol{\varphi})}{\partial x} \frac{\partial \tilde{d}_n(\boldsymbol{\varphi})}{\partial y} \quad (26)$$

と計算できる。ただし、

$$\xi_n(\boldsymbol{\varphi}) = E \left[\frac{\partial^2 L_n(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \tilde{d}_n(\boldsymbol{\varphi})^2} \right] \quad (27)$$

である。フィッシャー情報行列の逆行列を

$$I_F(\boldsymbol{\varphi}) = J_F^{-1}(\boldsymbol{\varphi})$$

$$= \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \quad (28)$$

と定義すると、最尤推定法に対する推定誤差の分散の下界は次式で与えられる：

$$\sigma_{CRLB}^2(\boldsymbol{\varphi}) = \min[\text{var}(x) + \text{var}(y)] = I_{11} + I_{22} \\ = \frac{-\sum_{n=1}^N \xi_n(\boldsymbol{\varphi}) \left(\frac{x-x_n}{d_n(\boldsymbol{\varphi})} \right)^2 - \sum_{n=1}^N \xi_n(\boldsymbol{\varphi}) \left(\frac{y-y_n}{d_n(\boldsymbol{\varphi})} \right)^2}{L \left\{ \sum_{n=1}^N \xi_n(\boldsymbol{\varphi}) \left(\frac{x-x_n}{d_n(\boldsymbol{\varphi})} \right)^2 \right\} \left\{ \sum_{n=1}^N \xi_n(\boldsymbol{\varphi}) \left(\frac{y-y_n}{d_n(\boldsymbol{\varphi})} \right)^2 \right\} - L \left\{ \sum_{n=1}^N \xi_n(\boldsymbol{\varphi}) \left(\frac{x-x_n}{d_n(\boldsymbol{\varphi})} \right) \left(\frac{y-y_n}{d_n(\boldsymbol{\varphi})} \right) \right\}^2} \quad (29)$$

ここで、 $\text{var}(\cdot)$ は $(\cdot)$ の分散を表す。(29)はクラメル・ラオ下界式と呼ばれ⁽⁷⁾、推定誤差の分散は L^{-1} に比例すること、つまり、測定回数を増やすとそれだけ推定誤差の分散が小さくなることが分かる。下界の意味は「いかなるML推定もこの式で与えられる推定誤差の分散より小さくなることはない」ということである。

さて、図4に示すように、 n 番目のアンカーポイントターゲット間の真の距離を仰角 η_n と方位角 θ_n で表してみる。明らかに、

$$x - x_n = \tilde{d}(\boldsymbol{\varphi}) \cos \eta_n \cos \theta_n \quad (30)$$

$$y - y_n = \tilde{d}(\boldsymbol{\varphi}) \cos \eta_n \sin \theta_n \quad (31)$$

が成立することが分かるので、これらを(29)に代入すると、

$$\sigma_{CRLB}^2(\boldsymbol{\varphi}) = \frac{-\sum_{n=1}^N \xi_n(\boldsymbol{\varphi}) \frac{1}{\cos^2 \eta_n}}{L \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \xi_i(\boldsymbol{\varphi}) \xi_j(\boldsymbol{\varphi}) \frac{\sin^2(\theta_i - \theta_j)}{\cos^2 \eta_i \cos^2 \eta_j}} \quad (32)$$

を得る。ここで、 $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_N$ としてみると、

図4 仰角と方位角による表現

$$\sigma_{CRLB}^2(\boldsymbol{\varphi}) = +\infty \quad (33)$$

となるが、これはアンカーポイントが同一直線上に並んでいると、当たり前であるが、位置推定が行えないことを表している。

6.2 最大事後確率推定に対するクラメル・ラオの下界式

推定すべき未知パラメータ $\boldsymbol{\varphi}=[x,y]$ の事前分布 $p(\boldsymbol{\varphi})$ を知っている場合、 $p(\boldsymbol{\varphi})$ に対するフィッシャー情報行列は

$$J_P(\boldsymbol{\varphi}) = -E \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log p(\boldsymbol{\varphi}) & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log p(\boldsymbol{\varphi}) \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \log p(\boldsymbol{\varphi}) & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \log p(\boldsymbol{\varphi}) \end{bmatrix} \quad (34)$$

で定義される。(22)と(34)の和を

$$J_T(\boldsymbol{\varphi}) = J_F(\boldsymbol{\varphi}) + J_P(\boldsymbol{\varphi}) \quad (35)$$

その行列の逆行列を

$$I_T(\boldsymbol{\varphi}) = J_T^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) = \begin{bmatrix} I'_{11} & I'_{12} \\ I'_{21} & I'_{22} \end{bmatrix} \quad (36)$$

でそれぞれ定義する。MAP推定法に対する推定誤差の分散の下界は次式で与えられる：

$$\sigma_{CRLB}^2(\boldsymbol{\varphi}) = \min[\text{var}(x) + \text{var}(y)] = I'_{11} + I'_{22} \quad (37)$$

これはベイズアン・クラメル・ラオ下界式と呼ばれている⁽⁷⁾。未知パラメータに関する事前情報がない場合、 $J_P(\boldsymbol{\varphi})=0$ より(37)は(29)と一致する。

7. RSSIを用いた位置推定法

図5に示しているマークを見たことがない人はまずいないだろう。左図は携帯電話での電波の受信状態を、右図は無線ローカルエリアネットワークでの電波の受信状態を表しており、携帯電話やノートパソコンが受信電力を測定していることを示している。このように、受信デバイスで受信電力を測定することは難しいことではなく、ほとんどの受信デバイスが受信電力を測定する機能を持っているといっても過言でな

図5 RSSIを測定していることを示すマークの例

い。したがって、受信電力と送受信機間の距離との間には何らかの関係を見つけないことができれば、受信電力、すなわちRSSIを用いて位置推定が行えることになる。

電波の強さは距離に反比例することを経験的に知っている。RSSIを用いた位置推定はTOAの場合のように行えると思う人は多いだろう。図6は、無線パーソナルエリアネットワークの規格であるIEEE 802.15.4に準拠した送受信機を用いて、ある室内でRSSI (P) と距離 (d) との関係を測定したものであり、図中の赤い点が測定データを表している。送信機から受信機へ直接到達する電波に加え、屋内では、周りの人、壁、天井や床、一方、屋外でも周りの人や地面からの反射波が受信機に到達するので、その結果、受信機は異なる複数の経路を通った電波を受信することになる。これらの電波は場所や周りの状況の微小な変化によって強め合ったり弱め合ったりして受信されるため、図5に示すように、RSSIは距離に対して大きくかつ激しく変動することになる。したがって、RSSIと距離との間には1対1対応するような単純な関係は成立しない。では、図5のRSSIと距離との間には何らかの構造を持った関係が成立しないのだろうか。

図6の中で、距離 d_k に対するRSSIを P_k と定義する。一方、図6の測定データは距離の変化に対して激しく変動しているが、各距離におけるRSSIの平均値は距離によって減衰しているように見える。したがって、平均電力を $\bar{P}$ と定義し、 $\bar{P}$ を二次元の伝搬パラメータベクトル $\boldsymbol{\varsigma}=[\alpha, \beta]$ を持った次の関数で近似できると仮定する：

$$\bar{P} = \alpha d^{-\beta}. \quad (38)$$

そして、測定データと(38)を用いてLS法を用いて伝搬パラメータベクトルを決定する：

find $\boldsymbol{\varsigma}=[\alpha, \beta]$ which minimizes

$$E(\alpha, \beta) = \sum_k (P_k - \alpha d_k^{-\beta})^2.$$

図7の(a)の中の直線が得られた式を表しており(RSSIが対数で表記されているので直線になる)、この場合、

図6 RSSIと距離との関係

$\alpha=1.2 \times 10^{-6}$ と $\beta=1.61$ が得られた。更に、(38)が確定できると、

$$\hat{P}_k = P_k / (\alpha d_k^{-\beta}) \quad (39)$$

より測定データを正規化し(トレンドの除去)、正規化されたRSSIに対してその確率密度関数(pdf: probability density function)を計算することができる。その結果が図7の(b)であり、この場合、正規化されたRSSI $P/\bar{P}$ は指数関数を用いて精度良く近似できる⁽⁸⁾。最終的に得られるRSSIの分布は、送受信機間の距離が得られたという条件のもとでのpdfであり、位置推定の場合はその距離にターゲットの未知位置が含まれているので、

$$p(P|\boldsymbol{\varphi}) = 1/\bar{P}(\boldsymbol{\varphi}) e^{-P/\bar{P}(\boldsymbol{\varphi})} \quad (40)$$

$$\bar{P}(\boldsymbol{\varphi}) = \alpha d(\boldsymbol{\varphi})^{-\beta} \quad (41)$$

と書ける。伝送速度が比較的遅く無線信号が狭帯域信号とみなせる場合、(40)と(41)により与えられる二層構造を持ったモデルでその伝搬特性は精度良く記述できる。また、受信電力が指数分布をなすことは理論的にも導出できる⁽⁹⁾。更に、無線ローカルエリアネットワークの規格であるIEEE 802.11aやgでは伝送速度が速く無線信号が狭帯域信号とみなせない。その伝搬特性は厳密には複雑なものになるが、RSSIを用いた位置推定問題に対しては(40)と(41)で与えられる二層モデルで精度良く近似できる⁽¹⁰⁾。

TOAの場合と同じように、 N 個のアンカーポイントがあり、各アンカーポイントでRSSIを L 回測定する場合に、測定誤差は同一アンカーポイントでの異なる測定間ですべて独立であると仮定すると($\mathbf{M}_n=\mathbf{P}_n$, 添え字 n はアンカーポイントのインデックス), n 番目のアンカーポイントでの尤度関数は(P_{nl} の添え字 l は測定に関するインデックス)

$$p(\mathbf{P}_n | \tilde{d}_n(\boldsymbol{\varphi})) = p(\mathbf{P}_n | \boldsymbol{\varphi}) = p(P_{n1}, \dots, P_{nl}, \dots, P_{nL} | \boldsymbol{\varphi}) = \prod_{l=1}^L p(P_{nl} | \boldsymbol{\varphi}) \quad (42)$$

で与えられる。更に、測定誤差は異なるアンカーポイント間で独立であると仮定すると、対数尤度関数は

(a) 平均電力と距離との関係 (b) 正規化電力の確率密度関数

図7 RSSIと距離との関係

$$L(\boldsymbol{\Phi}) = \sum_{n=1}^N \log p(\mathbf{M}_n | \tilde{\mathbf{d}}_n(\boldsymbol{\Phi})) = \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N \log p(P_{nl} | \boldsymbol{\Phi}) \quad (43)$$

で与えられる。(43)に(9)、(40)及び(41)を代入することによって、推定すべき未知パラメータ $\boldsymbol{\Phi}$ の尤度関数、すなわち、電波伝搬特性が(40)、(41)で与えられる場合、RSSIを用いたML位置推定は次の拘束条件なし非線形関数の最大化問題に帰着する：

find $\boldsymbol{\Phi} = [x, y, z]$ which maximizes

$$L(\boldsymbol{\Phi}) = \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N \left(-\log \bar{P}_n(\boldsymbol{\Phi}) - \frac{P_{nl}}{\bar{P}_n(\boldsymbol{\Phi})} \right) \quad (44)$$

$$\bar{P}_n(\boldsymbol{\Phi}) = \alpha \left(\sqrt{(x-x_n)^2 + (y-y_n)^2 + (z-z_n)^2} \right)^\beta. \quad (45)$$

(45)には場所に依存する伝搬パラメータ α と β が含まれている。これらの伝搬パラメータは、位置推定を行う前に測定を行って求めておく必要があり、それがRSSIを用いた位置推定の欠点であった。しかし、 $\boldsymbol{\varsigma} = [\alpha, \beta]$ も未知として、(40)と(41)を

$$p(P | \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\varsigma}) = 1 / \bar{P}(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\varsigma}) e^{-P / \bar{P}(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\varsigma})} \quad (46)$$

$$\bar{P}(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\varsigma}) = \alpha d(\boldsymbol{\Phi})^{-\beta} \quad (47)$$

のように考えると、次のように伝搬パラメータと位置を交互に推定することが可能になる：⁽¹¹⁾

- (1) $l=1$ とする
- (2) $\boldsymbol{\varsigma}_0 = [\alpha_0, \beta_0]$ を任意に決定する
- (3) $p(P_{nl} | \boldsymbol{\Phi}_l, \boldsymbol{\varsigma}_{l-1})$ を用いて位置 $\boldsymbol{\Phi}_l$ を推定する
- (4) $p(P_{nl} | \boldsymbol{\Phi}_l, \boldsymbol{\varsigma}_l)$ を用いて伝搬パラメータ $\boldsymbol{\varsigma}_l$ を推定する
- (5) $l=l+1$ として(3)に戻る。

位置推定のアルゴリズムは繰返し計算が必要となり少し複雑になるが、これを用いると、前もって測定を行って伝搬パラメータを求めておく必要はなくなる。この例では、伝搬パラメータと位置の両方をML法で推定しているが、伝搬パラメータをLS法、位置をML法で推定することも可能である⁽¹²⁾。

さて、最後にクラメル・ラオの下界式を得るために(27)に(40)と(41)を代入することによって、(32)は

$$\begin{aligned} \sigma_{CRLB}^2(\boldsymbol{\Phi}) &= \frac{\sum_{n=1}^N \tilde{d}_n^{-2}(\boldsymbol{\Phi}) \frac{1}{\cos^2 \eta_n}}{L\beta^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \tilde{d}_i^{-2}(\boldsymbol{\Phi}) \tilde{d}_j^{-2}(\boldsymbol{\Phi}) \frac{\sin^2(\theta_i - \theta_j)}{\cos^2 \eta_i \cos^2 \eta_j}} \quad (48) \end{aligned}$$

となる。(48)から推定誤差の分散は β^{-2} に比例することが分かる。つまり、 $|\beta|$ が大きい場所の方が、言い換えると電波が余り飛ばない方が位置推定精度が高くなる。

8. まとめ

位置推定の中で使われている初歩的な統計的推定理論について解説を行った。位置推定問題を数学という言葉を用いてまず定式化することが重要である。そうすれば、使える解法と注意点がおのずから見えてくる。また、推定精度に関しては理論式を用いて上界や下界を評価することが重要である。それにより、推定精度に大きく影響を及ぼす要因や推定法の改善の可能性も分かってくる。

文 献

- (1) C.M. Bishop, Pattern Recognition and Machine Learning, Springer, 2006.
- (2) D. Niculescu and B. Nath, "Ad hoc positioning system (APS)," IEEE Globecom 2001, pp.2926–2931, Nov. 2001.
- (3) P. Bahl and V. Padmanabhan, "RADAR: An in-building RF-based user location and tracking system," IEEE Infocom 2000, pp.775–784, March. 2000.
- (4) A. T. Ihler, J. W. Fisher III, R. L. Moses, and A. S. Willsky, "Nonparametric belief propagation for selflocalization of sensor networks," IEEE J.Sel.Areas Commun., vol.23, no. 4, pp.809-819, April. 2005.
- (5) L. Ljung, System Identification: Theory for the User, Prentice-Hall, 1999.
- (6) N. Patwari, A. O. Hero III, M. Perkins, N. S. Correal and R. J. O' Dea, "Relative location estimation in wireless sensor networks," IEEE Trans. Signal Process., vol.51, no.8, pp. 2137-2148, Aug. 2003.
- (7) H.L. V. Trees, Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part I, John Wiley & Sons, 1968.
- (8) S. Hara, D. Zhao, K. Yanagihara, J. Taketsugu, K. Fukui, S. Fukunaga, and K. Kitayama, "Propagation characteristics of IEEE 802.15.4 radio signal and their application for location estimation," Proc. IEEE Vehicular Technology Conference (VTC) 2005-Spring, pp.1-5, in CD-ROM, Stockholm, Sweden, May/ June 2005.
- (9) J.G. Proakis, Digital Communications 4th edition, McGraw-Hill, 2000.
- (10) S. Hara and D. Anzai, "Use of a simplified maximum likelihood function in a WLAN-based location estimation," Proc. IEEE Wireless Communications & Networking Conference (WCNC) 2009, pp.1167-1172, in CD-ROM, Budapest, Hungary, April. 2009.
- (11) Z. Radim, S. Hara, "RSSI-based localization without a prior knowledge of channel model parameters," Int. J. Wirel. Inf. Netw., vol.15, nos.3-4, pp.128-136, Dec. 2008.
- (12) I.Yamada and T. Ohtsuki, "An indoor location estimation method by maximum likelihood method using RSSI," 信学技報, SN2006-43, pp.37-41, Dec. 2006.

(平成22年3月23日受付 平成22年5月11日最終受付)

原 晋介 (正員)

1990 阪大大学院工学研究科通信工学専攻了。工博。現在、阪市大大学院工学研究科教授。2003 年から独立行政法人情報通信研究機構専攻研究員を経て現在招へい専門員。2007 から (株) シンセシス主幹研究員を経て現在研究顧問。2009 から韓国 慶熙大 International Scholar。2008 ～ 2009 年度本学会基礎・境界ソサイエティ ワイドバンドシステム研究専門委員会委員長。2010 年度から本学会通信ソサイエティ 医療情報通信時限研究専門委員会委員長。無線通信システムにおける変復調方式と信号処理応用に関する研究に従事。