ニューラルネットワークのアクティブ化と非線形解析

Activation of Neural Networks and Nonlinear Analyses

中島康治 Koji NAKAJIMA

早川吉弘 Yoshihiro HAYAKAWA

アブストラクト 人工ニューラルネットワーク (ANN) は知的な情報処理の可能性を求めて研究され続けている。一時期最急降下法による解探索や学習方法の提案により研究が急増したがその後落ち着きを見せ、研究者は新たな方向性を模索しながら研究活動を展開している。しかし究極の目標である脳の情報処理原理の解明とそれに基づいた脳型計算機の構成により、最先端の計算機においても実現されていないロバスト性や、外部環境変化や不良設定問題への適応性などを手に入れようとする挑戦は依然として魅力的テーマである。このテーマへの糸口の一つとして ANN のアクティブ化という問題を提起した。ANN において多くの成果をもたらした統計力学的手法の枠内にアクティブ化を取り入れることは困難であるが、非線形振動の大域的動作の理解を進めるために提案した手法により、神経細胞ユニットの動特性の設計が分岐解析との接点も含めて可能になった。本稿ではその手法とアクティブ化による情報処理能力の向上を示す数値解析結果について解説する。

キーワード ニューラルネットワーク, ポテンシャル, アクティブエリア, 負性抵抗, 分岐解析, 最適化問題

Abstract There have been many research studies of various neuron models that typically take the form of ordinary nonlinear differential equations of several dimensions. The pattern of spiking is of great importance, because it is presumed that it codifies information transmitted by neurons. It is an actively studied problem to apply various neuron models to artificial neural networks (ANNs) for intelligent information processing in the field of nonlinear dynamics and brain research. One important aspects in this situation is the lack of universal discussion about the dynamical behaviors of various neuron models, although perturbation and bifurcation theories exist. Thus, we reveal that each model has its own potential function and active areas on the potential. Negative resistance is one of the active areas. This concept realizes the universal discussion of the dynamical behaviors of models, for example, bursting and spiking. On the other hand, Hopfield neural network is capable of solving combinatorial optimization problems and is a parallel-processing version of the gradient method. However, it has some drawbacks. One of its most serious drawbacks is that it frequently finds locally minimum solutions instead of global minima. The active areas of neuron models make the state of the network escape from local minima by their destabilization. In computer simulation and theoretical estimation, we have already shown that the ID network, which is active ANN for implementing associative memory and combinatorial optimization problems, can converge on optimal solutions only.

Key words neural network, potential, active area, negative resistance, bifurcation theory, optimization problem

1. はじめに

今日の情報化社会を形作っているコンピュータネットワークの進展には目を見張るものがあり、それは社会生活の根幹をなすライフラインの重要な部分となっている。そのため高い信頼性や高速・大容量性が追求されて急速なシステム拡張が行われ、情報ビッグバンとも表現されている。しかしロバスト性や、外

部環境変化や不良設定問題への適応性などは最先端の計算機においても満足のいくものとはなっていない。つまりアルゴリズムに基づく情報処理は非常に便利で有用であるが、知的な香りがしない。また情報産業を支え続けたシリコン集積回路は微細化の限界が近く、消費電力の問題にも直面している。

一方、知的な情報処理システムの存在証明を与えている、生体の神経系・脳についての解析的な情報処理原理の追及は、その成果を用いて知的な情報処理システム、脳型計算機を構成できるレベルにはない。そのため構成的とされる工学的脳研究の手法が用いられるが、一時期人工ニューラルネットワーク (ANN) の最急降下法による解探索⁽¹⁾や学習方法^{(2),(3)}の提案により研究が急増したがその後落ち着きを見せている。

我々は神経系をモデルとした知的情報処理への糸口の一つとして ANN のアクティブ化という問題を提起した⁽⁴⁾。これはカオスニューロンを除いて従来の ANN がシグモイド関数に代表

中島康治 正員：フェロー 東北大学電気通信研究所

E-mail hello@riec.tohoku.ac.jp

早川吉弘 正員 仙台高等専門学校

E-mail hayakawa@sendai-nct.ac.jp

Koji NAKAJIMA, Fellow, Member (Research Institute of Electrical Communication, Tohoku University, Sendai-shi, 980-8577 Japan), Yoshihiro HAYAKAWA, Member (Sendai National College of Technology, Sendai-shi, Miyagi, 989-3128 Japan).

電子情報通信学会 基礎・境界サイエティ

Fundamentals Review Vol.6 No.2 pp.123-133 2012 年 10 月

©電子情報通信学会 2012

される受動的なユニットを用いて統計力学的手法の枠組みを取り入れたのとは違い、能動的なユニットを用いてネットワーク自体をアクティブ化したものである。これによりネットワークをより生体の神経系に近づけて構成的脳研究に寄与するとともに、ANN の情報処理能力を向上させようとしたものである。この方向においては学習方程式のアクティブ化も検討対象内に位置付けることができる。

ネットワークのアクティブ化にあたっては構成ユニットの設計が必要とされる。その設計を容易にするにはユニットの動作特性の直感的把握が重要であり、初めにそれを可能にする提案手法⁽⁵⁾の説明を分岐理論など線形安定性解析との接点も含めて解説する。その後、自励発振、バースト、カオスなどのダイナミクスを示すユニットの数値解析結果⁽⁶⁾を述べ、更に既に提案されているニューロンユニットのモデルと提案手法との関係について説明する。最後にアクティブ化された ANN の情報処理性能の向上について 2, 3 の数値解析結果に基づいて議論する⁽⁷⁾。

2. 時間微分方程式のポテンシャルとアクティブエリア

連続力学系の平衡点近傍での解の振舞いは線形安定性理論を用いて特性方程式の根の性質から議論できる。更に分岐理論ではパラメータの変化によりその平衡点の性質がどのように変化するかを解析する。安定性に関するより大域的な議論としてはリヤプノフ関数を用いる議論、また周期解が存在する場合はポアンカレ写像とリヤプノフの方法による議論などが行われる。特性方程式は系が n 個の独立変数に対する n 個の 1 階の時間微分方程式で表せる場合に Jacobian から構成でき、これはどのような系に対しても適用できるため与えられた系の解析には強力な方法である^{(8),(9)}。しかし系の大域的振舞いに対する直感的理解やそれに基づく系自身の設計は簡単ではない。

一方、 n 個の 1 階の微分方程式を n 階の 1 変数の微分方程式へ変換できる場合や初めから系が n 階の微分方程式で表現されている場合がある。系が線形な場合はこの間の変換は可能であるが、非線形の場合には変換できないときもある。提案手法では変換が可能となきに得られる次の方程式において大域的な安定性と動的状態について議論を行う。

$$\frac{d^n x}{dt^n} + b_{n-1} \left(x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} \right) \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \left(x, \frac{dx}{dt} \right) \frac{dx}{dt} = f(x, \theta), \quad (1)$$

ここで $x = x(t) \in \mathbf{R}$ であり、 θ は時間に依存しない入力である。更に式 (1) の $f(x, \theta)$ は x だけの連続関数で微分可能とする。式 (1) の平衡点は $f(x, \theta) = 0$ から得られるから、 $f(x, \theta) = -\partial U_n(x, \theta) / \partial x = -U'_n(x, \theta)$ とおいて $U_n(x, \theta)$ は一種のポテンシャルと捉えることができる。式 (1) は $n = 2$ までは通常の粒子のポテンシャル内の運動を表すが、 $n > 2$ については粒子に働く力として慣性力の変化など高次の力まで考慮されたポテンシャル内の疑似粒子の運動を表すと解釈する。これにより $U_n(x, \theta)$ を求めて発散、非発散を含めた大域的な運動

の直感的理解を得ることができる。

また式 (1) において平衡点を x_0 として $x = x_0 + \delta$, $\delta = A \exp(\lambda t)$ を代入して δ について線形化すれば次の特性方程式が得られる。

$$\lambda^n + b_{n-1}(x_0, 0, \dots, 0)\lambda^{n-1} + \dots + b_1(x_0, 0)\lambda - f'(x_0, \theta) = 0. \quad (2)$$

平衡点 x_0 の安定性は特性方程式の係数に対してルース・フルビッツの定理を適用して議論できる。式 (2) において $-f'(x_0, \theta) = U''_n(x_0, \theta)$ はポテンシャルの平衡点における曲率となる。

$n = 1$ の場合、運動は常にポテンシャルの極小点に向かい、平衡点の安定性はその点でのポテンシャルの曲率だけで決まる。つまり $U''_n(x_0, \theta) > 0$ なら安定、 $U''_n(x_0, \theta) < 0$ なら不安定である。

2.1 2 階微分方程式のモデル

- FitzHugh-Nagumo モデル -

$n = 2$ の場合、平衡点の安定性はポテンシャルの曲率だけでは決まらず、 $U''_2(x_0, \theta) < 0$ なら不安定であるが、 $U''_2(x_0, \theta) > 0$ でも $b_1(x_0, 0) < 0$ なら不安定である。ここで x の関数 $b_1(x, 0)$ を考えると (以後 $b_1(x)$ と記述する) $b_1(x) < 0$ を満足する x の範囲 $X_{b_1 < 0}$ 内に平衡点 x_0 があれば不安定であるから $X_{b_1 < 0}$ をアクティブエリアと定義する。

式 (1) に戻ると $b_1(x) < 0$ は負性抵抗領域となり、ポテンシャル的に安定な平衡点が負性抵抗領域内に入っていれば不安定となり発振を始める。この発振がリミットサイクルとして安定になるかどうかは負性抵抗領域の範囲とポテンシャル形状に依存する。簡単な場合として $x \rightarrow \pm\infty$ でポテンシャルの曲率が正であり、そこで $b_1(x) > 0$ ならば発散することはないといえる。

分岐は方程式に含まれるパラメータの変化によって生じるポテンシャル形状やアクティブエリアの変形によって引き起こされる。一例として次の FitzHugh-Nagumo(FN)⁽¹⁰⁾モデルを取り上げる。

$$\frac{1}{c} \dot{x} = - \left(\frac{x^3}{3} - x - y - \theta \right), \quad (3)$$

$$c \dot{y} = -(by + x - a), \quad (4)$$

ここで $\dot{x}$ は x の時間微分を表す。この式を変数 x だけの 2 階微分方程式に変換すると次式となる。

$$\ddot{x} + c \left\{ x^2 - \left(1 - \frac{b}{c^2} \right) \right\} \dot{x} = - \left\{ \frac{b}{3} x^3 + (1 - b)x - a - b\theta \right\}. \quad (5)$$

ポテンシャル $U_2(x)$ と $b_1(x)$ 関数並びにアクティブエリア $X_{b_1 < 0}$ は以下となる。

$$U_{2FN}(x) = \frac{b}{12} x^4 + \frac{1-b}{2} x^2 - (a + b\theta)x, \quad (6)$$

$$b_{1FN}(x) = c \left\{ x^2 - \left(1 - \frac{b}{c^2} \right) \right\}, \quad (7)$$

$$X_{b_{1FN} < 0} : -\sqrt{1 - \frac{b}{c^2}} < x < \sqrt{1 - \frac{b}{c^2}}, \quad (8)$$

ここで $b < c^2$ が仮定されている．

$a = \theta = 0$ のとき， $b < 1$ なら式 (6) よりポテンシャルはシングルウェルで平衡点は $x_0 = 0$ のみとなり，アクティブエリア内にあるため発振する． $b > 1$ ならモデルは分岐現象を示しポテンシャルはダブルウェルとなり平衡点は 3 点で $x_0 = 0$ が $U''_{2FN}(x_0) < 0$ で不安定， $x_0 = \pm\sqrt{3(1 - \frac{1}{b})}$ は $U''_{2FN}(x_0) > 0$ であるが $\sqrt{3(1 - \frac{1}{b})} < \sqrt{1 - \frac{b}{c^2}}$ ならその平衡点はアクティブエリア内にあり発振する． a の増加や $b > 0$ での θ の増加は式 (6) から解るように平衡点を x の+側へ移動させるがアクティブエリアの位置は変化しない．FitzHugh の論文では $0 < b < 1$ が仮定されているが，もし $b < 0$ とすると式 (6) よりダブルウェル型のポテンシャルが上下反転した形となり，発散の可能性がある．

ここで $0 < b < 1, a = \theta = 0$ として，また簡単のために $c \gg 1$ を仮定して，このモデルの動作の概略を通してアクティブエリアの性質について議論する． x と y の変化に対する時定数はそれぞれ $\tau_x = 1/c$ と $\tau_y = c$ と考えられるから x の変化に対して y の変化は十分遅くなる．式 (3) の右辺 $= -\tau_x \partial U_{1FN}(x, y) / \partial x$ で定義されるポテンシャル $U_{1FN}(x, y) = (x^4/12 - x^2/2 - yx) / \tau_x$ は y が本来時間変化するからそれに伴い形を変えるが y の変化が遅いことからある短い区間では y を定数として考えることができる．

$\partial U_{1FN}(x, y = 0) / \partial x$ は N 型の関数であり，図 1 に示す 2 個の平衡点 $x_{T\pm} = \pm 1$ を持つ．一方式 (6) の $U_{2FN}(x)$ がシングルウェルであるのに反してポテンシャル $U_{1FN}(x, y = 0)$ はダブルウェルで $x = 0$ が不安定平衡点， $x = \pm\sqrt{3}$ が安定平衡点である． $\partial U_{1FN}(x, y \simeq \text{const.}) / \partial x = 0$ の根の数は 1 個，2 個，または 3 個である． $x^3/3 - x = y \simeq \text{const.}$ の根が 1 個の場合それは安定，3 個の場合外側の 2 個は安定，中の 1 個は不安定であり，ダブルウェルポテンシャル U_{1FN} の 2 個の安定平衡点と 1 個の不安定平衡点に対応する．根の数が 2 個の場合は $x_{T+} = 1$ と $x_{F-} = -2$ か，または $x_{T-} = -1$ と $x_{F+} = 2$ である．

1 階の時間微分で表せるシステムでは運動は常にポテンシャルの極小点に向かう．そのため $x^3/3 - x = y \simeq \text{const.}$ から決まる安定平衡点に x があるときは y は式 (4) に従ってゆっくりと $y|_{\dot{y}=0} = (a - x)/b = -x/b$ へ向かう． $x > 0$ なら y は減少するから x は $x_{T+} = 1$ へ向かう． x が $x_{T+} = 1$ へ到達すると $y = -2/3$ であるがそれは $-x/b = -1/b$ ($0 < b < 1$) より大きいから y は更に減少し $-x/b = -1/b$ へ向かうとするとポテンシャル U_{1FN} の 2 個の安定平衡点の+側の 1 個が消滅して x は $x_{F-} = -2$ へ転げ落ちる．そこで $x < 0$ となるから y は式 (4) に従って増加に転じてゆっくりと $-x/b$ へ向かい x は $x_{T-} = -1$ へ向かう． x が $x_{T-} = -1$ へ到達すると $y = 2/3$ であるがそれは $-x/b = 1/b$ より小さいから y は更に増加し $-x/b = 1/b$ へ向かうとするとポテンシャル U_{1FN} の 2 個の安定平衡点の-側の 1 個が消滅して x は $x_{F+} = 2$ へ転げ落ちる．このサイクルの繰返しが自励発振状態を出現させる．以

上のように U_{1FN} は時間的に変化するが式 (6) の U_{2FN} の形状はアクティブエリア $X_{b_{1FN} < 0}$ とともに時間変化しない．平衡点は $x_0 = 0$ であり $X_{b_{1FN} < 0} \subset (-1, 1)$ であるからアクティブエリア内にあり不安定である．この議論から分かることはアクティブエリアは，負性抵抗という言葉から粒子へエネルギーを注入して一方向へ加速する領域という印象を受けるが，そうではなく粒子へ振動成分を与える領域と考えるのが妥当だということになる．一般的には $b_1(x) \propto (x - C)^2 - \beta$ とするとアクティブエリアの中心位置 C とその幅 $2\sqrt{\beta}$ が任意に設定可能となる．この FN モデルの場合 $C = 0$ ， $\beta = 1 - \frac{b}{c^2}$ である．

2.2 3 階微分方程式のモデル

$n = 3$ の場合，アクティブエリアはルース・フルビッツの定理から $b_1(x) < 0, b_2(x) < 0, B_1(x) = b_2(x)b_1(x) - b_0(x) < 0$ を満足する領域となる．ここで $b_0(x) \equiv U'_3(x)$ である．このタイプのモデルはパラメータの値によって各種のバースト発振を示すことが知られている．初めに例として Hindmarsh-Rose⁽¹¹⁾ モデルのポテンシャルとアクティブエリアを示し，それを一般化した簡潔なモデル，バースト ID モデルについてその動作特性を説明する．その後これまでに提案された $n = 3$ の幾つかのモデルについてポテンシャルとアクティブエリアを示す．

図 1 $\partial U_{1FN}(x, y = 0) / \partial x$ と $U_{1FN}(x, y = 0)$ ．

2.2.1 Hindmarsh-Rose モデル

Hindmarsh-Rose(HR) モデルは無次元化した形として次のように表される．

$$\dot{x} = y + 3x^2 - x^3 - z + I, \quad (9)$$

$$\dot{y} = 1 - 5x^2 - y, \quad (10)$$

$$\dot{z} = -r \left\{ z - 4 \left(x + \frac{8}{5} \right) \right\}. \quad (11)$$

z の時定数が $\tau_z = 1/r$ で $r \ll 1$ である．この3式を1変数化すると次式となる．

$$\ddot{x} + \{3(x-1)^2 + r - 2\} \dot{x} \quad (12)$$

$$+ \{3(1+r)x^2 + 2(2-3r)x + 5r + 6(x-1)\dot{x}\} \dot{x} \\ = -r \left(x^3 + 2x^2 + 4x + \frac{27}{5} - I \right). \quad (13)$$

これにより以下の関数が得られる．

$$U_{3HR}(x) = r \left\{ \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + \left(\frac{27}{5} - I \right) x \right\}, \quad (14)$$

$$b_{0HR}(x) = r(3x^2 + 4x + 4) \\ = r \left\{ 3 \left(x + \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{8}{3} \right\}, \quad (15)$$

$$b_{1HR}(x) = 3(1+r)x^2 + 2(2-3r)x + 5r \\ = 3(1+r) \left[\left\{ x + \frac{2-3r}{3(1+r)} \right\}^2 - \frac{4-6r^2-27r}{9(1+r)^2} \right], \quad (16)$$

$$b_{2HR}(x) = 3 \left\{ (x-1)^2 - \frac{2-r}{3} \right\}, \quad (17)$$

$$B_{1HR}(x) = b_{2HR}(x)b_{1HR}(x) - b_{0HR}(x). \quad (18)$$

$U_{3HR}(x)$ はシングルウェルで平衡点は外部入力 I により移動する． b_{1HR} 、 b_{2HR} アクティブエリアはそれぞれ中心が $-\frac{2-3r}{3(1+r)}$ と 1 で、その幅は $2\sqrt{\frac{4-6r^2-27r}{9(1+r)^2}}$ と $2\sqrt{\frac{2-r}{3}}$ である． $I = 0$ のときは平衡点はアクティブエリアの外にあり安定である．

2.2.2 パースト ID モデル

次に HR モデルを一般化した次式のバースト ID モデルを使って $n = 3$ の場合の代表的動特性を示す．

$$\tau_x \dot{x} = u + z - g(x), \quad (19)$$

$$\tau_z \dot{z} = z_\infty(x) - z + \theta, \quad (20)$$

$$\tau_u \dot{u} = u_\infty(x) - u, \quad (21)$$

ここで τ_x , τ_z , τ_u と θ は時定数と外部入力であり、 $g(x)$, $z_\infty(x)$, と $u_\infty(x)$ は x の任意関数である．式 (19) と式 (20) から次の2変数 x, u の式が得られる．

$$\ddot{x} + \eta(x)\dot{x} = -\frac{\partial U_{2BI}(x, u, \theta)}{\partial x}, \quad (22)$$

ここで

$$\eta(x) = \frac{1}{\tau_x} \frac{dg(x)}{dx} + \frac{1}{\tau_z} = \frac{g'(x)}{\tau_x} + \frac{1}{\tau_z} \quad (23)$$

は粘性係数に相当し

$$\frac{\partial U_{2BI}(x, u, \theta)}{\partial x} = \frac{1}{\tau_x \tau_z} \left\{ g(x) - z_\infty(x) - \frac{\tau_z}{\tau_u} u_\infty(x) \right. \\ \left. - \left(1 - \frac{\tau_z}{\tau_u} \right) u - \theta \right\} \quad (24)$$

の $U_{2BI}(x, u, \theta)$ は変数 x に対するポテンシャルとみなせるが、 $u = u(t)$ のため $U_{2BI}(x, u, \theta)$ は時間変化する．更に式 (21) と式 (22) から次の1変数 x の式が得られる．

$$\ddot{x} + b_{2BI}(x)\ddot{x} + b_{1BI}(\dot{x}, x)\dot{x} = -\frac{\partial U_{3BI}(x, \theta)}{\partial x}. \quad (25)$$

ここで $\delta = \tau_x(\tau_z^{-1} + \tau_u^{-1})$ として、

$$b_{2BI}(x) = \frac{1}{\tau_x} \left\{ g'(x) + \delta \right\} = \eta(x) + \frac{1}{\tau_u}, \quad (26)$$

$$b_{1BI}(\dot{x}, x) = \frac{g''(x)}{\tau_x} \dot{x} + \frac{1}{\tau_x} \left\{ \frac{g'(x) - z'_\infty(x)}{\tau_z} \right. \\ \left. + \frac{g'(x) - u'_\infty(x)}{\tau_u} + \frac{\tau_x}{\tau_z \tau_u} \right\}, \quad (27)$$

$$\frac{\partial U_{3BI}(x, \theta)}{\partial x} = \frac{1}{\tau_x \tau_z \tau_u} \left\{ g(x) - z_\infty(x) \right. \\ \left. - u_\infty(x) - \theta \right\}, \quad (28)$$

$$\frac{\partial^2 U_{3BI}(x, \theta)}{\partial x^2} = \frac{1}{\tau_x \tau_z \tau_u} \left\{ g'(x) - z'_\infty(x) \right. \\ \left. - u'_\infty(x) \right\} \equiv b_{0BI}(x). \quad (29)$$

更に式 (24)、式 (26)、式 (27) から次が得られる、

$$\frac{\partial^2 U_{2BI}}{\partial x^2} = b_{1BI}(x) - \frac{1}{\tau_u} b_{2BI}(x) + \frac{1}{\tau_u^2}, \quad (30)$$

$$\frac{\partial U_{2BI}(x, u, \theta)}{\partial x} = \int \left\{ b_{1BI}(x) - \frac{1}{\tau_u} b_{2BI}(x) + \frac{1}{\tau_u^2} \right\} dx \\ - \frac{1}{\tau_x \tau_z} \left\{ \left(1 - \frac{\tau_z}{\tau_u} \right) u + \theta \right\}. \quad (31)$$

また式 (19) を次の形に書き換える．

$$\dot{x} = -\frac{\partial U_{1BI}(x, z, u)}{\partial x}, \quad (32)$$

ここで $\partial U_{1BI}/\partial x = \tau_x^{-1}(g(x) - z - u)$ であり、 $U_{1BI}(x, z, u)$ は x に対するポテンシャルとみなせるが、 $z = z(t)$ と $u = u(t)$ のために $U_{1BI}(x, z, u)$ は時間変化する．式 (26) と式 (32) から次の式が得られる．

$$\frac{\partial^2 U_{1BI}}{\partial x^2} = b_{2BI}(x) - \frac{1}{\tau_x} \delta, \quad (33)$$

$$\frac{\partial U_{1BI}(x, z, u)}{\partial x} = \int \left\{ b_{2BI}(x) - \frac{1}{\tau_x} \delta \right\} dx \\ - \frac{1}{\tau_x} (z + u). \quad (34)$$

ここで $b_{1BI}(x)$, $b_{2BI}(x)$, $U_{1BI}(x, z, u)$, $U_{2BI}(x, u)$ と $U_{3BI}(x)$ を用いてポテンシャルの平衡点とポテンシャル上のアクティブエリアの位置からニューロンモデルの大域的動作特性について議論をするため、解の発散を避けてできるだけ簡単な形にバースト ID モデルを設定する．そのためポテンシャルとして次の形を仮定する．

$$U_{3BI}(x, \theta) = \frac{1}{\tau_x \tau_z \tau_u} (x^4 - 2\gamma x^2 - \theta x), \quad (35)$$

$$\frac{\partial U_{3BI}(x, \theta)}{\partial x} = \frac{1}{\tau_x \tau_z \tau_u} \{4x(x^2 - \gamma) - \theta\}, \quad (36)$$

$$\frac{\partial^2 U_{3BI}(x, \theta)}{\partial x^2} = b_{0BI}(x) = \frac{1}{\tau_x \tau_z \tau_u} (12x^2 - 4\gamma). \quad (37)$$

ポテンシャル $U_3(x, \theta)$ は γ の符号によりシングルウェルまたはダブルウェルとなる。ダブルウェルの場合 $\gamma > 0$, $\theta = 0$ なら 3 個の平衡点, $b_{0BI}(0) < 0$ である $x = 0$ と $b_{0BI}(\pm\sqrt{\gamma}) > 0$ である $x = \pm\sqrt{\gamma}$ が存在する。平衡点の位置は外部入力 θ により移動できる。

出力 $x(t)$ の発散を避けるためアクティブエリアはポテンシャル上で局在することが望ましく, そのためには $b_{1BI}(x)$ と $b_{2BI}(x)$ は正の曲率を持つことが要求される。またその位置と幅を独立に設定できる最も次数の低い形として次式を仮定する。

$$b_{2BI}(x) = \frac{1}{\tau_x} \{(x - C_2)^2 - \beta_2\}, \quad (38)$$

$$b_{1BI}(x) = \frac{1}{\tau_x} \{(x - C_1)^2 - \beta_1\}. \quad (39)$$

この形は HR モデルの式 (16) と式 (17) に対応する。 b_2 -アクティブエリアの中心位置と幅は C_2 と $2\sqrt{\beta_2}$ であり, b_1 -アクティブエリアのそれは C_1 と $2\sqrt{\beta_1}$ である。これから式 (26) を使って次式を得る。

$$g'(x) = \tau_x b_2(x) - \delta = (x - C_2)^2 - \beta_2 - \delta, \quad (40)$$

$$g(x) = \frac{x^3}{3} - C_2 x^2 + (C_2^2 - \beta_2 - \delta)x. \quad (41)$$

ここで積分定数は 0 とした。更に式 (26), 式 (27) と式 (29) から次式が得られる。

$$z_\infty(x) = \frac{\tau_z \tau_u}{\tau_u - \tau_z} \left[\left(\frac{4}{\tau_u} + \frac{1 - \tau_z}{3\tau_z} \right) x^3 + \frac{C_1 \tau_z - C_2}{\tau_z} x^2 - \left\{ \frac{4\gamma}{\tau_u} - \frac{C_2^2 - \beta_2}{\tau_z} + C_1^2 - \beta_1 + \frac{\tau_x}{\tau_z^2} \right\} x \right], \quad (42)$$

$$u_\infty(x) = \frac{\tau_z \tau_u}{\tau_z - \tau_u} \left[\left(\frac{4}{\tau_z} + \frac{1 - \tau_u}{3\tau_u} \right) x^3 + \frac{C_1 \tau_u - C_2}{\tau_u} x^2 - \left\{ \frac{4\gamma}{\tau_z} - \frac{C_2^2 - \beta_2}{\tau_u} + C_1^2 - \beta_1 + \frac{\tau_x}{\tau_u^2} \right\} x \right], \quad (43)$$

$$z_\infty(x) + u_\infty(x) = -\frac{11}{3}x^3 - C_2 x^2 + (4\gamma + C_2^2 - \beta_2 - \delta)x. \quad (44)$$

各時定数の関係を $\tau_u \gg \tau_z \gg \tau_x \simeq 1$ とすると $\theta = 0$ でのバースト ID モデルの動特性の概略は FN モデルを参考にして次のように説明される。ポテンシャル $U_{1BI}(x, z, u)$ は z と u が本来時間変化するからそれに伴い形を変えるが z と u の変化が遅いことからある短い区間では z と u を定数として考えることができる。

式 (34) と式 (38) に従って $\partial U_{1BI}(x, z=0, u=0)/\partial x$ は N 型の関数であり, $\partial^2 U_{1BI}/\partial x^2 = \tau_x^{-1} g'(x) = 0$ から得られる 2 個の平衡点 $x_{T\pm} = C_2 \pm \sqrt{\beta_2 + \delta} \simeq C_2 \pm \sqrt{\beta_2}$ を持つ。この間の領域が b_2 -アクティブエリアに対応する。 $\partial U_{1BI}/\partial x = 0$ つまり $g(x) = z + u \simeq const.$ の根の数は 1 個, 2 個, または 3 個である。 $g(x) = z + u \simeq const.$ の根が 1 個の場合それは安定, 3 個の場合外側の 2 個は安定, 中の 1 個は不安定であり, ダブルウェルポテンシャル U_{1BI} の 2 個の安定平衡点と 1 個の

不安定平衡点に対応する。例えば $z + u = 0$ のとき解は $x = 0$ と $x = 3C_2/2 \pm \sqrt{3(\beta_2 - C_2^2/4) + 3\delta}$ である。根の数が 2 個の場合は $x_{T+} = C_2 + \sqrt{\beta_2 + \delta}$ と $x_{F-} = C_2 - 2\sqrt{\beta_2 + \delta}$ か, または $x_{T-} = C_2 - \sqrt{\beta_2 + \delta}$ と $x_{F+} = C_2 + 2\sqrt{\beta_2 + \delta}$ である。この $x_{T\pm}$ と $x_{F\pm}$ は図 1 の $x_{T\pm}$ と $x_{F\pm}$ に対応する。

出力 x が $g(x) = z + u \simeq const.$ から決まる安定平衡点にあるときは式 (20) と式 (21) によって z と u はそれぞれゆっくりと $z_\infty(x)$ と $u_\infty(x)$ へ向かう。 $x \geq C_2 + \sqrt{\beta_2 + \delta}$ に対して $z_\infty(x) + u_\infty(x) < 0$ ならば式 (19) によって出力 x は $x_{2+} = C_2 + \sqrt{\beta_2 + \delta}$ へ, また $x \leq C_2 - \sqrt{\beta_2 + \delta}$ に対して $z_\infty(x) + u_\infty(x) > 0$ ならば出力 x は $x_{2-} = C_2 - \sqrt{\beta_2 + \delta}$ へ向かう。出力 x が $x_{T\pm} = C_2 \pm \sqrt{\beta_2 + \delta}$ へ到達するとポテンシャル U_{1BI} の二つの安定平衡点の内の一つが消滅して出力 x は $x_{F\mp} = C_2 \mp 2\sqrt{\beta_2 + \delta}$ へ転がり落ちる。例えば $C_2 = 0$ と $\gamma = 0$ のとき $x_{T\pm} = \pm\sqrt{\beta_2 + \delta}$ に対して式 (44) から $z_\infty(x) + u_\infty(x) = \mp 14(\sqrt{\beta_2 + \delta})^3/3$ である。つまり $x_{T+} = +\sqrt{\beta_2 + \delta}$ に対して $z_\infty(x) + u_\infty(x) < 0$ であり, $x_{T-} = -\sqrt{\beta_2 + \delta}$ に対して $z_\infty(x) + u_\infty(x) > 0$ である。このサイクルがバースト発振の早い振動を作り出し, $\tau_z \ll \tau_u$ だからその周期は主に τ_z に依存する。

一方, 式 (24), 式 (30) 並びに式 (39) を使ってバースト発振の遅い振動についての知見を得ることができる。 $\partial U_{2BI}(x, u = 0, \theta = 0)/\partial x$ もまた N 型の関数であり, $\partial^2 U_{2BI}/\partial x^2 = 0$ から得られる 2 個の平衡点 $x_{T\pm} \simeq C_1 \pm \sqrt{\beta_1}$ を持つ。この間の領域が b_1 -アクティブエリアに対応する。 $\partial U_{2BI}/\partial x = 0$ つまり $\tau_x \tau_u \partial U_{2BI}(x, u = 0, \theta = 0)/\partial x = (1 - \tau_z/\tau_u)u \simeq const.$ の根の数は 1 個, 2 個, または 3 個である。その安定性は上の議論と同じであり, 2 個の場合の解は $x_{T+} \simeq C_1 + \sqrt{\beta_1}$ と $x_{F-} \simeq C_1 - 2\sqrt{\beta_1}$ または $x_{T-} \simeq C_1 - \sqrt{\beta_1}$ と $x_{F+} \simeq C_1 + 2\sqrt{\beta_1}$ である。ここでの $x_{T\pm}$ と $x_{F\pm}$ も図 1 の $x_{T\pm}$ と $x_{F\pm}$ に対応する。上で述べた早い振動と同じ過程を通してバースト発振の遅い振動が作り出され, その周期は式 (22) と式 (24) により主に τ_u に依存する。以上の議論からもアクティブエリアは, 擬粒子へ振動成分を与える領域とするのが妥当であり, b_1 -アクティブエリアは大きい時定数 τ_u のためバースト発振の遅い振動を, b_2 -アクティブエリアは早い振動を支配する。この $n = 3$ の議論は基本的に $n = 2$ の FN モデルの時間的に変動するポテンシャル U_1 の議論と同じであるが, U_1, U_2 の二つのポテンシャルが絡み合った特性となり, $\tau_u \gg \tau_z \gg \tau_x$ の条件が満足される場合にはその絡み合いを分離することが可能となると解釈できる。

2.2.3 バースト ID モデルの数値解析

バーストを引き起こすには $\tau_u \gg \tau_x, \tau_z$ が必要である。以下の結果は $\tau_u = 30 - 400, \tau_x = \tau_z = 2$ として得られたものである⁽⁶⁾。またその出力特性はポテンシャルの平衡点並びに b_1 -と b_2 -アクティブエリアの相対位置に強く依存する。そのためアクティブエリアの幅を決めた上でその中心位置の $C_1 - C_2$ 平面上で主に出力波形の変化を解説する。

ポテンシャルは式 (35) としたため γ と θ に依存する。初

めに $\gamma = 0$ のシングルウェルを考える． θ は平衡点の位置を移動させるが，以後の議論はアクティブエリアの方を移動させるため $\theta = 0$ として平衡点の位置は $x_0 = 0$ に固定する． $U_{3BI} = x^4 / (\tau_x \tau_z \tau_u)$ であり下に凸である．

平衡点 x_0 を含むように b_1 -アクティブエリアを配置して遅い振動を発生させ，その振幅が届く位置に b_2 -アクティブエリアを設置すると典型的なバーストの波形が得られる．図 2 に示すように b_1, b_2 -アクティブエリアの間に間隙があると早い振動の振幅がその間隙にまたがって減衰する「ティバード」バースト⁽¹²⁾となる． C_2 を減少させ間隙を狭くしていくと 1 バースト当りのスパイクの本数が減少して行きついにはインパルス発振となる．しかし更に b_1, b_2 -アクティブエリアの重畳部分を増加していくと「スクエア」バースト⁽¹²⁾となりスパイクの本数が逆に増加していく．この場合の速い振動は b_2 -アクティブエリアの上部で起き， τ_u が大きく例えば 400 のときは図 3 に示すように一旦減衰した後 b_2 -アクティブエリア内に入り，再び増幅された後に b_1 -アクティブエリア内に落ち込む． $\tau_u = 100$ のときは速い振動が減衰する前に b_1 -アクティブエリア内に落ち込む． $\tau_u = 100$ で更に C_2 が小さい部分，例えば $C_2 = 0.15, C_1 = -0.75$ 周辺になるとバースト波形は乱れて行きカオス的になる．

以上のバースト発振はアンダシュートなしの波形を示し，比較的広いパラメータの範囲で観測できる．一方アンダシュートありのバーストを観測できるパラメータ範囲はそれに比べると狭い．図 4 には $\gamma = 0.5$ の場合に観測される波形を示したが， $\gamma = 0$ でも基本的に変わらない．このバーストは b_2 -アクティブエリアが b_1 -アクティブエリアを完全に覆う範囲で観測される．このことからこのバーストは速い振動を作り出す b_2 -アクティブエリアが支配的役割を示し，その振動を遅い振動を作り出す b_1 -アクティブエリアによって抑えられることにより作り出されると思われる．それに反してアンダシュートなしのバーストは遅い振動が支配的役割を演じていると理解される．

$\gamma = 0.5, \theta = 0$ の場合は平衡点が $x_0 = 0, \pm\sqrt{\gamma}$ の 3 点でありダブルウェル型のポテンシャルとなる．ポテンシャルの形状を反映して $C_1 - C_2$ 平面上的の相図は複雑になり，アンダシュートなしの 1 バースト当りのスパイク数が大幅に増加する領域が見られるなどの変化があるが基本的な観測波形は変わらない． $\gamma = 0$ の場合に見られない波形としてビート発振の波形が狭い領域で見られる．これはティバードバーストにおいて速い振動を伴わない側の遅い振動の振幅領域へ落ち込まない動作である．またカオスの動作を示すパラメータ領域は増加する傾向が見られる．更に $\tau_u = 30$ まで減少させた結果からはカオスの発生を

図 2 「ティバード」バースト， $\tau_u = 400, C_1 = -0.4, C_2 = 1.7, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 0.5$

図 3 「スクエア」バースト， $\tau_u = 400, C_1 = -0.4, C_2 = 0.3, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 0.5$

図 4 アンダシュートを持つバースト， $\gamma = 0.5, \tau_u = 400, C_1 = 0, C_2 = 0.24, \beta_1 = 0.4, \beta_2 = 1.0$

容易にする傾向が観測されている．図 5 は観測されたカオス波形の 1 例を $x - u$ 位相平面上的の相軌道として示したものである．

2.2.4 $n = 3$ のその他のモデル

Morris-Lecar システム⁽¹³⁾は次式で表される．

$$\begin{aligned} \dot{v} &= y - 0.5(v + 0.5) - 2w(v + 0.7) \\ &\quad - m_\infty(v)(v - 1), \end{aligned} \quad (45)$$

$$\dot{w} = 1.15 \{w_\infty(v) - w\} \tau(v), \quad (46)$$

$$\dot{y} = \varepsilon(k - v), \quad (47)$$

ここで関数 $w_\infty(v), m_\infty(v), \tau(v)$ は以下である．

$$w_\infty(v) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \tanh \left(\frac{v - 0.1}{0.145} \right) \right\},$$

$$m_\infty(v) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \tanh \left(\frac{v + 0.01}{0.15} \right) \right\},$$

図 5 カオス波形の $x - u$ 位相平面上的の相軌道， $\gamma = 0.5, \tau_u = 30, C_1 = -0.91, C_2 = 0.4, \beta_1 = 0.154, \beta_2 = 0.27$

$$\tau(v) = \cosh\left(\frac{v-0.1}{0.29}\right).$$

変数 v だけの形に書き換えると次式となる．

$$\begin{aligned} & \ddot{v} + \ddot{v} \left[\frac{2}{f(v, \dot{v})} \ddot{v} + 0.5 + m'_\infty(v)(v-1) + m_\infty(v) \right. \\ & + 1.15\tau(v) + \frac{\dot{v}}{f(v, \dot{v})} \left\{ 1 + 2m'_\infty(v)(v-1) \right. \\ & + 2m_\infty(v) - 2.3\tau'(v)(v+0.7) - 2.3\tau(v) \left. \right\} \\ & + \frac{1}{f(v, \dot{v})} \left\{ 4.6w_\infty(v)\tau(v)(v+0.7) - 2\varepsilon(k-v) \right\} \left. \right] \\ & + \dot{v}^2 \left[m''_\infty(v)(v-1) + 2m'_\infty(v) - \frac{2.3}{f(v, \dot{v})} \left\{ 0.5 \right. \right. \\ & + m'_\infty(v)(v-1) + m_\infty(v) \left. \right\} \left\{ \tau'(v)(v+0.7) + \tau(v) \right\} \left. \right] \\ & + \dot{v} \left[\varepsilon + 2.3(v+0.7) \left\{ w'_\infty(v)\tau(v) + w_\infty(v)\tau'(v) \right\} \right. \\ & + 4.6w_\infty(v)\tau(v) + 1.15\tau(v) \left\{ 0.5 + m'_\infty(v)(v-1) \right. \\ & + m_\infty(v) \left. \right\} + \frac{2.3}{f(v, \dot{v})} \left\{ 2.3w_\infty(v)\tau(v)(v+0.7) \right. \\ & - \varepsilon(k-v) \left. \right\} \left. \right] \left\{ \tau'(v)(v+0.7) + \tau(v) \right\} \left. \right] \\ & = -1.15\tau(v)\varepsilon(v-k), \end{aligned} \quad (48)$$

ここで $f(v, \dot{v}) = 2.3\tau(v)(v+0.7) - 2\dot{v}$ である．式 (48) から $dU_{3ML}(v)/dv, b_{0ML}(v), b_{1ML}(v), b_{2ML}(v), B_{1ML}(v)$ が求められ， $U_{3ML}(v)$ は $w_\infty(v)$ と $m_\infty(v)$ には依存しないが， $b_{1ML}(v)$ と $b_{2ML}(v)$ は $w_\infty(v)$ と $m_\infty(v)$ に依存する．これらの形は参考文献 (5) にある．ポテンシャル $U_{3ML}(v)$ は底の広いシングルウェルで平衡点はアクティブエリア内にあり，バースト発振を示す v の波形は参考文献 (13) にある．

更に神経細胞のモデルではないがカオスを示すモデルとして 3 変数のシステムが提案されており，それらについてもポテンシャルとアクティブエリアを構成することができる．ここでは Lorenz モデルと Chua 回路についてそれらを示す．

Lorenz モデル⁽¹⁴⁾は次式で表される．

$$\frac{1}{a}\dot{x} = y - x, \quad (49)$$

$$\dot{y} = rx - xz - y, \quad (50)$$

$$\frac{1}{b}\dot{z} = \frac{1}{b}xy - z. \quad (51)$$

変数 x だけの形に書き換えると次式となる．

$$\begin{aligned} & \ddot{x} + \left(1 + a + b - \frac{\dot{x}}{x} \right) \ddot{x} + \left\{ x^2 + ab + b - \frac{\dot{x}}{x}(1+a) \right\} \dot{x} \\ & = -\left\{ ax^3 + ab(1-r)x \right\}. \end{aligned} \quad (52)$$

カオスを示すとされる $a = 10, b = 8/3, r = 28$ とするとポテンシャルは対称形のダブルウェルとなりその形状からは 1 個の不安定平衡点と 2 個の安定平衡点を持つ． $b_2(x)$ ， $b_1(x)$ は共に x の全域にわたり正であるが $B_1(x)$ が上に凸の関数となり， $x = 0$ 付近は正であるがポテンシャル上の 2 個の安定平衡点では負の値となり，平衡点を不安定化する．

ここで Lorenz モデルを例として 1 変数化した式 (52) と平衡点の周りの線形解析との関係を示す．平衡点をそれぞれ x_0, y_0, z_0

として式 (49)-(51) から Jacobian によって得られる特性方程式 λ^2 の係数は $a+b+1$ ， λ^1 の係数は $x_0^2 + ab + b + a(1-r+z_0)$ ， λ^0 の係数は $ax_0^2 + ax_0y_0 + abz_0 + ab(1-r)$ である． x_0, y_0, z_0 の関係は $y_0 = x_0$ ， $z_0 = x_0^2/b = r-1$ となり， $x_0^2 = b(r-1)$ である． λ^1 の係数に $z_0 = r-1$ を，また λ^0 の係数に $y_0 = x_0, z_0 = x_0^2/b$ を代入し x_0 を x と置くとポテンシャルとアクティブエリアに対応する式を導くことはできるが一意に求められるわけではない．一方，式 (52) から特性方程式は一意に求められる．これから式 (52) の方が特性方程式よりもより多くの情報を含んでいるといえる．

Chua 回路⁽¹⁵⁾は次式で表される．

$$C_1\dot{x} = \frac{1}{R}u - \frac{1}{R}x - G(x), \quad (53)$$

$$C_2\dot{u} = \frac{1}{R}x - \frac{1}{R}u + z, \quad (54)$$

$$L\dot{z} = -u. \quad (55)$$

変数 x だけの形に書き換えると次式となる．

$$\begin{aligned} & \ddot{x} + \left\{ \frac{1}{R} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) + \frac{G'(x)}{C_1} \right\} \ddot{x} \\ & + \frac{1}{RC_1C_2} \left\{ RC_2G''(x)\dot{x} + G'(x) + \frac{R}{L}(1+a) \right\} \dot{x} \\ & = -\frac{1}{LC_1C_2} \left\{ G(x) + \frac{1}{R} \right\}. \end{aligned} \quad (56)$$

ここで $G(x) = x^3 - x$ をとり，カオスを示すとされる $C_1 = 1/9, C_2 = 1, L = 1/7, R = 1/0.7$ とするとポテンシャルは対称形のダブルウェルとなりその形状からは 1 個の不安定平衡点と 2 個の安定平衡点を持つ． $b_1(x)$ は x の全域にわたり正であるが， $b_2(x)$ は下に凸の関数となり， $x = 0$ 付近は負であるがポテンシャル上の 2 個の安定平衡点はその外側にある． $B_1(x)$ はダブルウェル型の関数で 2 か所の下に凸の部分の一部が負の値となるが，ポテンシャル上の 2 個の安定平衡点は僅かにその外側にある．しかし少しの雑音で平衡点には留まらず，一度発振を始めると慣性力などの影響により振動は持続し，この振動がカオスへと発展する．Lorenz モデル，Chua 回路ともにダブルスクロールを示すがそれはダブルウェル型のポテンシャルに由来し，カオスは中央のポテンシャルの山を規則的には乗り越えられない結果とみなせる．

2.3 4 階微分方程式のモデル

- Hodgkin-Huxley システム -

$n = 4$ の場合，アクティブエリアはルース・フルビッツの定理から $b_1(x) < 0, b_2(x) < 0, b_3(x) < 0, B_1(x) = b_2(x)b_1(x) - b_0(x) < 0, B_2(x) = b_1(x)B_1(x) - b_0(x)\{b_3(x)\}^2 < 0$ を満足する領域となる．

Hodgkin-Huxley(HH) システム⁽¹⁶⁾は以下の方程式で表現される．

$$\begin{aligned} C\dot{v} &= G(v, m, n, h) + I_{ext} = g_{Na}m^3h(V_{Na} - v) \\ &+ g_Kn^4(V_K - v) + g_L(V_L - v) + I_{ext}, \end{aligned} \quad (57)$$

$$\tau_m(v)\dot{m} = m_\infty(v) - m, \quad (58)$$

$$\tau_n(v)\dot{n} = n_\infty(v) - n, \quad (59)$$

$$\tau_h(v)\dot{h} = h_\infty(v) - h, \quad (60)$$

ここで上の式に含まれる関数は次の形である．

$$m_\infty(v) = \frac{1}{1 + \frac{4\exp(-v/18)\{\exp(2.5-v/10)-1\}}{0.1(25-v)}}, \quad (61)$$

$$n_\infty(v) = \frac{1}{1 + \frac{0.125\exp(-v/80)\{\exp(1-v/10)-1\}}{0.01(10-v)}}, \quad (62)$$

$$h_\infty(v) = \frac{1}{1 + \frac{1}{0.07\exp(-v/20)\{\exp(3-v/10)+1\}}}, \quad (63)$$

$$\tau_m(v) = \frac{1}{\frac{0.1(25-v)}{\exp(2.5-v/10)-1} + 4\exp(-v/18)}, \quad (64)$$

$$\tau_n(v) = \frac{1}{\frac{0.01(10-v)}{\exp(1-v/10)-1} + 0.125\exp(-v/80)}, \quad (65)$$

$$\tau_h(v) = \frac{1}{0.07\exp(-v/20) + \frac{1}{\exp(3-v/10)+1}}. \quad (66)$$

残念ながら近似を使わずに 1 変数の方程式を得ることはできないため、式 (57) の代わりに

$$C\dot{v} = m + n + h - g_H(v), \quad (67)$$

を用いる．ここで $g_H(v)$ は次のヌルクライン近似を用いて

$$g_H(v) = \left\{ m(v) + n(v) + h(v) \right\} \Big|_{\dot{v}=\dot{m}=\dot{n}=\dot{h}=0}, \quad (68)$$

$$m(v, n, h) \Big|_{\dot{v}=0} = \left\{ \frac{g_K n_\infty(v)^4 (v - V_K)}{g_{Na} h_\infty(v) (V_{Na} - v)} + \frac{g_L (v - V_L) - I_{ext}}{g_{Na} h_\infty(v) (V_{Na} - v)} \right\}^{\frac{1}{3}} \Big|_{\dot{n}=0, \dot{h}=0}, \quad (69)$$

$$n(v, m, h) \Big|_{\dot{v}=0} = \left\{ \frac{g_{Na} m_\infty(v)^3 h_\infty(v) (v - V_{Na})}{g_K (V_K - v)} + \frac{g_L (v - V_L) - I_{ext}}{g_K (V_K - v)} \right\}^{\frac{1}{4}} \Big|_{\dot{m}=0, \dot{h}=0}, \quad (70)$$

$$h(v, m, n) \Big|_{\dot{v}=0} = \left\{ \frac{g_K n_\infty(v)^4 (v - V_K)}{g_{Na} m_\infty(v)^3 (V_{Na} - v)} + \frac{g_L (v - V_L) - I_{ext}}{g_{Na} m_\infty(v)^3 (V_{Na} - v)} \right\} \Big|_{\dot{m}=0, \dot{n}=0}, \quad (71)$$

と求められる．方程式としては式 (67) と式 (58)，式 (59)，式 (60) を用いることになるが、 $\tau_m(v)$ 、 $\tau_n(v)$ 、と $\tau_h(v)$ については緩やかな上に凸の関数であり簡単のために v 依存性を無視して定数とする．以上より 1 変数 v の次の 4 階の微分方程式が得られる．

$$\begin{aligned} & \ddot{v} + \ddot{v} \frac{1}{\tau_v} \left\{ g'_H(v) + \frac{\tau_v}{\tau_m} + \frac{\tau_v}{\tau_n} + \frac{\tau_v}{\tau_h} \right\} \\ & + \ddot{v} \frac{1}{\tau_v} \left\{ 3g''_H(v)\dot{v} + g'_H(v) \left(\frac{1}{\tau_m} + \frac{1}{\tau_n} + \frac{1}{\tau_h} \right) - \frac{m'_\infty(v)}{\tau_m} \right. \\ & \left. - \frac{n'_\infty(v)}{\tau_n} - \frac{h'_\infty(v)}{\tau_h} + \frac{\tau_v}{\tau_m \tau_n} + \frac{\tau_v}{\tau_n \tau_h} + \frac{\tau_v}{\tau_h \tau_m} \right\} \\ & + \dot{v} \frac{1}{\tau_v} \left[g'''_H(v)\dot{v}^2 + \left\{ g''_H(v) \left(\frac{1}{\tau_m} + \frac{1}{\tau_n} + \frac{1}{\tau_h} \right) - \frac{m''_\infty(v)}{\tau_m} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{n''_\infty(v)}{\tau_n} - \frac{h''_\infty(v)}{\tau_h} \right\} \dot{v} + g'_H(v) \left(\frac{1}{\tau_m \tau_n} + \frac{1}{\tau_n \tau_h} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\tau_h \tau_m} \right] - \frac{m'_\infty(v)}{\tau_m} \left(\frac{1}{\tau_n} + \frac{1}{\tau_h} \right) - \frac{n'_\infty(v)}{\tau_n} \left(\frac{1}{\tau_m} + \frac{1}{\tau_h} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{h'_\infty(v)}{\tau_h} \left(\frac{1}{\tau_m} + \frac{1}{\tau_n} \right) + \frac{\tau_v}{\tau_m \tau_n \tau_h} \Big] \\ & = - \frac{g_H(v) - m_\infty(v) - n_\infty(v) - h_\infty(v)}{\tau_v \tau_m \tau_n \tau_h}. \quad (72) \end{aligned}$$

これより $dU_{4HH}(v)/dv$ 、 $b_{0HH}(v)$ 、 $b_{1HH}(v)$ 、 $b_{2HH}(v)$ 、 $b_{3HH}(v)$ 、 $B_{1HH}(v)$ 、 $B_{2HH}(v)$ を求めることができる． $b_{0HH}(v)$ 、 $b_{1HH}(v)$ 、と $b_{2HH}(v)$ は $g'_H(v)$ 、 $m'_\infty(v)$ 、 $n'_\infty(v)$ 、と $h'_\infty(v)$ に依存し、一方、 $b_{3HH}(v)$ は $m'_\infty(v)$ 、 $n'_\infty(v)$ 、と $h'_\infty(v)$ に依存しない． $dU_{4HH}(v)/dv$ のゼロを横切る点は 1 か所のためポテンシャル $U_{4HH}(v)$ はシングルウェルである．このため解の発散の可能性はない．5 種類のアクティブエリアは $b_{1HH}(v) < 0$ 、 $b_{2HH}(v) < 0$ 、 $b_{3HH}(v) < 0$ 、 $B_{1HH}(v) < 0$ 、 $B_{2HH}(v) < 0$ となり、各アクティブエリアは多少のずれはあるもののほとんど重ね合った場所に局在する． $I_{ext} = 0$ のとき安定平衡点はアクティブエリアの外に位置し、Hodgkin と Huxleyand がオリジナルの論文で指摘したように I_{ext} を緩やかに増加してもアクティブエリアの中には入れられず、発振状態にするには I_{ext} の急激な変化が要求される．しかし彼らが使用したパラメータの値を変更すればその限りではない⁵⁾．

3. ネットワークのアクティブ化

これまで議論したアクティブなユニットを用いてネットワークを構成する．この場合、生体を模した回路を構成する方向もあるが、情報処理という観点から連想記憶、最適化問題、教師あり学習について考える．そこで FN モデルを変形した逆関数遅延 (ID) モデルを中心にして一部バースト ID モデルも取り上げる．ID モデルは出力に時間遅れ τ_x を設定しシグモイド型の活性化関数 $x = f(u)$ の逆関数 $u = g(x)$ を用いる次の式で表現される．

$$\tau_u \dot{u}_i = -u_i + W_{ii} x_i + \sum_{j \neq i}^n w_{ij} x_j + \theta_i, \quad (73)$$

$$\tau_x \dot{x}_i = u_i - g(x_i), \quad (\tau_x \ll \tau_u), \quad (74)$$

ここで u_i 、 x_i 、 w_{ij} 、 θ_i はそれぞれ内部状態、出力、ユニット j から i への結合強度、バイアス値を示す．以降の議論で扱いやすくするために、ID モデルの自己結合強度を W_{ii} としている．式 (74) で $\tau_x = 0$ として逆関数 $u = g(x)$ を元に戻すと一般的な神経回路の式となる．このシステムを x のみの形にすると次式となる．

$$\begin{aligned} & \tau_x \ddot{x}_i + \left\{ g'(x_i) + \frac{\tau_x}{\tau_u} \right\} \dot{x}_i \\ & + \frac{1}{\tau_u} \left\{ g(x_i) - W_{ii} x_i - \sum_{j \neq i} w_{ij} x_j - \theta_i \right\} = 0, \quad (75) \end{aligned}$$

第 3 項は $\partial U(x_i, x_j)/\partial x_i$ とすると、 $U(x_i, x_j)$ は x_i に対するポテンシャルである．式 (75) で $g(x)$ が負の傾きを持つ関数であれば負性抵抗領域を持つことができポテンシャル上の安定平衡点を不安定化できる．ここでネットワークダイナミクスを考えるが、対称結合 $w_{ij} = w_{ji}$ を仮定すると Hopfield(HF)⁽¹⁾ のエネルギー関数に相当する ID のエネルギー関数 E_{ID} が設定で

きる．この E_{ID} とその時間変化は，

$$E_{ID} = -\frac{1}{2\tau_u} \sum_i W_{ii} x_i^2 - \frac{1}{2\tau_u} \sum_i \sum_{j \neq i} w_{ij} x_i x_j - \frac{1}{\tau_u} \sum_i \theta_i x_i + \frac{1}{\tau_u} \sum_i \int^{x_i} g(x) dx + \frac{\tau_x}{2} \sum_i \dot{x}_i^2, \quad (76)$$

$$\dot{E}_{ID} = -\sum_i \left\{ g'(x_i) + \frac{\tau_x}{\tau_u} \right\} \dot{x}_i^2, \quad (77)$$

となる．式 (76) の最後の項は運動エネルギーとみなすことができ，それ以外はポテンシャルエネルギー、つまり HF のエネルギー関数に相当する．式 (77) から粘性係数に相当する $g'(x_i) + \frac{\tau_x}{\tau_u}$ が正ならエネルギーは時間とともに減少するが，それが負なら増加する．以降，連想記憶，最適化問題を扱うために $g(x)$ は N 字型の関数とし，連想記憶では $g(x) = f^{-1}(x) - Kx$ ($-1 \leq x \leq 1$)，最適化問題や教師あり学習では $g(x) = f^{-1}(x) - K(x - 0.5)$ ($0 \leq x \leq 1$) を使う． K はアクティブエリアをコントロールするパラメータである．

3.1 連想記憶

連想記憶は脳が行っている記憶方式と考えられ，ある外部入力に対してそれと関係する記憶内容を想起するシステムである．コンピュータでは CAM (Content Addressable Memory) と呼ばれる方式があるが，構成しにくいシステムで知的レベルを高くできない．HF タイプの自己想起システムはユニット数 N で自己結合がない場合に対して，統計力学的手法の枠組みを取り入れて記憶容量 $\simeq 0.14N$ が計算されている．

HF タイプの自己想起システムは，対称結合となるためネットワークはエネルギー関数 E_{HF} を持ち，

$$E_{HF} = -\frac{1}{2\tau_u} \sum_i w_{ii} x_i^2 - \frac{1}{2\tau_u} \sum_i \sum_{j \neq i} w_{ij} x_i x_j - \frac{1}{\tau_u} \sum_i \theta_i x_i + \frac{1}{\tau_u} \int^{x_i} f^{-1}(x) dx \quad (78)$$

となる．一方で式 (76) において，右辺第 4 項は $g(x) = f^{-1}(x) - Kx$ を使い整理することで

$$\frac{1}{\tau_u} \sum_i \int^{x_i} g(x) dx = \frac{1}{\tau_u} \sum_i \int^{x_i} f^{-1}(x) dx - \frac{1}{\tau_u} \sum_i K x_i^2 \quad (79)$$

と展開されるために， K の変更 (アクティブ領域変更) に対して ID モデルの自己結合を $W_{ii} = w_{ii} - K$ と補正することで，静止時に式 (76) の第 5 項が 0 であることから常に HF と等しいポテンシャル構造を設定できる．

自己結合強度が増加すると記憶容量は増加するがスブリアスメモリ状態も増加してベイスンサイズが減少することが知られている．記憶容量はポテンシャル構造だけによるため HF，ID 両システムともに同じ値を示す⁽¹⁷⁾．しかし ID では回路のアクティブ化によりスブリアスメモリを不安定化してベイスンサイズの減少を抑制することができる．アクティブエリアを出力空間内部に設定することにより，オーバーラップを指標にしたベイスンサイズは 1.75 倍程度までの増加を示す．その増加はアクティブエリアが広いほど大きい，広過ぎた場合は記憶ベクトルま

で不安定化してしまう．この結果はスブリアスメモリは出力空間内部に生じ，記憶ベクトルは出力空間のコーナにとどまる傾向が強いことを示しており，アクティブ化は連想記憶に対して有効に働く．また連続時間のシステムでの系列連想は従来難しかったが，アクティブ化によりそれが比較的容易に達成される結果も得られている⁽¹⁸⁾．

3.2 組合せ最適化問題

組合せ最適化問題は与えられた拘束条件を満たし，かつ目的関数が最小になる組合せを求める問題である．NP 完全とか NP 困難と呼ばれる種類の問題に分類され，多項式時間で計算が終了するアルゴリズムが発見されておらず，要素数が増えると計算量の爆発が引き起こされる．よく知られているものとして N-queen 問題，四色問題，巡回セールスマン問題，二次割当問題などがある．HF ネットワークを組合せ最適化問題の解探索に適用した場合の最大の欠点は最適解ではないポテンシャルの極小値状態に落ち込むことである．それを回避するためにシミュレーテッドアニーリングを用いた場合は雑音縮小のレートや収束時間が問題となる．またカオス雑音⁽¹⁹⁾やカオスユニット⁽²⁰⁾を用いた場合は最小値状態だけを遍歴するわけではなくその都度判定動作が要求される．回路のアクティブ化はこれらの欠点を改善し，最適解のみが静止出力となる．つまり正解率 100 % を達成できる．これは極小値状態が出力空間の内部にあり，最適解を示す最小値状態は出力空間のコーナにとどまる傾向が強いことから極小値状態のみをアクティブエリアで覆ってしまう設定が可能となるためである．そのためこの手法の適用には最小値状態と極小値状態を分離して存在させる必要がある．

また，ニューラルネットワークで扱う組合せ最適化問題は，正解時に満足すべき制約条件だけを要求するものと，その制約条件と合わせてあるコストの最小または最大を要求するものに分類できる．第 1 のタイプに分類される問題は，一般的な二次形式のエネルギー関数を用いて設計したネットワークにおいて，最小値状態が出力空間のコーナに，極小値状態が出力空間の内部にと分離して存在し，N-queen 問題，四色問題などがこれにあたる⁽²¹⁾．

第 2 のタイプは，巡回セールスマン問題，二次割当問題などがこれに相当し，二次形式のエネルギー関数では最小値状態と極小値状態が出力空間内で明確に分離せず，分離には現在のところ三次以上の高次の結合が必要となる⁽²²⁾．

参考文献(7)は第 1 のタイプについて，問題の制約条件を表現するエネルギー関数に含まれる任意パラメータとシグモイド関数 $f(u)$ の傾き β_S について，状態を明確に分離するのに必要なパラメータ間の関係式を導き出している．

よく使われる制約条件は，ニューロンユニットのグループを構成し，そのグループ中で発火状態となるユニット数が 1 個である (C1)，若しくは，最大 1 個である (C2) というもの，そして発火状態のユニットは出力が 1，非発火状態のユニットは 0 である (C3) というものである．それらが関係するエネルギー関数中の任意パラメータをそれぞれ A, B, C と置くと，正解状態のみ

存在できる領域の最大値 ϵ_u が、次の不等式を満足する値として求めることができる。

$$A - \frac{C}{2} > f^{-1}(\epsilon_u) + (AN_{max}^p - C)\epsilon_u + A\epsilon_u \quad (80)$$

$$B - \frac{C}{2} > f^{-1}(\epsilon_u) + (AN_{max}^p - C)\epsilon_u + B\epsilon_u \quad (81)$$

$$A - BN_{max}^q - \frac{C}{2} > \{AN_{max}^p(n_{max}^p - 1) - A + BN_{max}^q(n_{max}^q - 2) - C\} + f^{-1}(\epsilon_u) \quad (82)$$

ここで、制約条件 (C1) の中でニューロンユニットが属するグループ数で最大のグループ数を N_{max}^p 、グループの要素数で最大の値を n_{max}^p 、同様に制約条件 (C2) についての N_{max}^q, n_{max}^q を用いている。この関係式から得られた ϵ_u からアクティブ領域の大きさが決定される。

この方法により、正解以外の極小値はアクティブ領域で不安定化されるが、部分的な振動状態の発生から正解状態に到達できない場合が発生する。しかし、この振動状態の回避パラメータについても参考文献(7)で解析されている。図6は、8-queen 問題での解析結果と数値実験の関係を示したものである。解析的に求めた極小値を排除する境界線を (A)、振動状態発生を回避する境界線を (B)、数値実験で求めた極小値が安定状態であるパラメータを “ ”、振動状態に陥るものを “ + ”、必ず正解が出現するものを “ ” で示しており、両者はよく一致している。

図6 8-queen 問題におけるパラメータ解析結果と数値実験結果⁽⁷⁾

第2のタイプの問題については β_S が十分大きい場合について同様な議論ができています。この場合 ID ユニットのヒステリシスユニットと等価となりアクティブパラメータ K はヒステリシスの重なり幅と直接的な関係を持つ。ネットワークとしての基本的特性はヒステリシスがあるかないかに依存するが、重なり幅の大きさにはさほど依存しない。このため最適解のみの静止出力を与える設定にはこの場合はエネルギー関数に含まれる任意パラメータのみが関係する。参考文献(23)はこれを解析的に議論したものでやはりその結果を数値実験により検証している。この解析結果においても第1のタイプと同様にエネルギー関数に含まれる任意パラメータ A, B, C 間の関係が重要な役割を果たす。解として安定となる状態が示すコスト $d(\vec{x})$ と制約条件を示す項にかかる係数 A と B 、コストを示す項にかかる係数 C の

間には、

$$d(\vec{x}) < \frac{B}{4C} \quad (83)$$

の関係があり、得られるコストの上限を設定することができる。

両タイプの問題ともパラメータの値により出力が静止せず持続的発振状態に陥る可能性は、シミュレーション上は非常に少ないとはいえ完全に排除できていないわけではない。N-queen 問題を例にとると、HF ネットワークの場合はユニット数が増加するにつれて正解率は0%へ向かって減少するが、当然振動状態に陥ることはない。一方 ID モデルをユニットとした回路では逆にユニット数が増加するにつれて正解率は100%となる。しかしユニット数が小さく対称性の高い配置において、持続的発振状態に陥るケースが出現し正解率を数%ではあるが低下させる。バースト ID モデルをユニットとした回路が予備的な結果ではあるがこの状態を改善し、正解率を100%にすることを N-queen 問題において数値解析し、更にそれを応用上は必須と考えられるハードウェア化を行った結果についても報告している⁽²⁴⁾。そこでは式(20)と(21)において $z_\infty(x) = \tanh\{p(x - q)\}$ 、 $u_\infty(x) = Wx$ としてバーストを発生させており、N-queen 問題の正解率がバーストの影響により ID モデルを上回って上昇する結果が得られている。この $z_\infty(x)$ の関数は HH システムの $m_\infty(v)$ の形を想定したものである。

最後にニューラルネットワークの学習についてはアクティブ化に関して二つの場合が想定される。一つ目はユニットはアクティブ化したものを採用して学習方程式は従来型をそのまま用いる場合であり、二つ目は学習方程式自体もアクティブ化する場合である。特に逆伝搬法の学習方程式は加速項を採用すると時間に関する1階微分項の係数に負の値を設定することによりアクティブ化が行える。これに関しては学習の高速化や極小値状態からの脱出可能性など予備的なシミュレーション結果が得られているが、詳細な検討は今後の課題である。

4. おわりに

人工ニューラルネットワークのアクティブ化により知的な情報処理を実現することを目指し、構成ユニットの解析並びに設計方法とそれを用いた全結合型ネットワークの情報処理能力の向上について解説した。生体に基礎を置く神経細胞のモデルは本来アクティブであるがそれを明示的にネットワークに取り込む議論は多くない。これは神経細胞モデルそのものの動作が複雑であり、その大域的動作特性を直感的に把握し、その単一ユニットの特性を情報処理に利用可能な形にする設計自体が簡単ではないことが一因と思われる。そのため前半部分では大域的動作特性の直感的理解を容易にする方法として各種モデルのポテンシャルとアクティブエリアを導出し、それに基づいて解析・設計する手法について述べた。これらのユニットを多数結合して構成したネットワークの動作解析は更に難しい問題であり、その設計までを可能にする方法は本稿で触れた一部を除き明確ではなく今後の進展が待たれる。しかし知的情報処理、つまり脳における情報処理原理の解明という魅力的研究テーマは、各方面からの探索努力によりブレークスルーへとつながることは遠

い将来のことではないと確信して本解説が少しでもそれに寄与することを願いたい。

文 献

- (1) J. J. Hopfield, "Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons," *Proc. Natl. Sci. USA*, vol.81, no.10, pp.3088–3092, 1984.
- (2) G. E. Hinton and T. J. Sejnowski, "Learning and re-learning in Boltzmann machines," *Parallel distributed processing*, 1, D. E. Rumelhart and J. L. McClelland eds., pp.282–317, MIT Press, 1986.
- (3) D. E. Rumelhart, G. E. Hinton, and Y. R. J. Williams, "Learning representations by back-propagating errors," *Nature*, vol.323, pp.533–536, 1986.
- (4) K. Nakajima and Y. Hayakawa, "Characteristics of inverse delayed model for neural computation," *Proc. NOLTA*, pp.861–864, 2002.
- (5) K. Nakajima and S. Suenaga, "Bursting characteristics of a neuron model based on a concept of potential with active areas," *CHAOS*, vol.18, 023120, pp.1–12, 2008.
- (6) K. Nakajima, S. Sato, and Y. Hayakawa, "Dynamic characteristics of a simple bursting neuron model," *NOLTA, IEICE*, vol.3, no.3, pp.436–456, July 2012.
- (7) Y. Hayakawa and K. Nakajima, "Design of the inverse function delayed neural network for solving combinatorial optimization problems," *IEEE Trans. Neural Netw.*, vol.21, no.2, pp.224–237, 2010.
- (8) E. A. Jackson, *Perspectives of nonlinear dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- (9) J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, New York, 2002.
- (10) R. FitzHugh, "Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane," *Biophys. J.*, vol.1, no.6, pp.445–466, 1961.
- (11) J. L. Hindmarsh and R. M. Rose, "A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations," *Proc. R. Soc. Lond., Ser. B*, vol.221, no.1222, pp.87–102, 1984.
- (12) E. M. Izhikevich, "Neural excitability, spiking and bursting," *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.*, vol.10, no.6, pp.1171–1266, 2000.
- (13) C. Morris and H. Lecar, "Voltage oscillations in the Barnacle giant muscle fiber," *Biophys. J.*, vol.35, no.1, pp.193–213, 1981.
- (14) E. N. Lorenz, "Deterministic non-periodic flows," *J. Atmos. Sci.*, vol.20, pp.130–141, 1963.
- (15) T. Matsumoto, L. O. Chua, and M. Komuro, "The double scroll," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol.CAS-32, no.8, pp.798–818, 1985.
- (16) A. L. Hodgkin and A. F. Huxley, "A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve," *J. Physiol., (London)* vol.117, no.4, pp.500–544, 1952.
- (17) H. Li, Y. Hayakawa, and K. Nakajima, "Retrieval property of associative memory based on inverse function delayed neural networks," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol.E88-A, no.8, pp.2192–2199, Aug. 2005.
- (18) J. Sveholm, Y. Hayakawa, and K. Nakajima, "Temporal sequences of patterns with an inverse function delayed neural network," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol.E89-A, no.10, pp.2818–2824, Oct. 2006.
- (19) Y. Hayakawa, A. Marumoto, and K. Sawada, "Effects of the chaotic noise on the performance of a neural-network model for optimization problems," *Phys. Rev. E*, vol.51, no.4, pp.2693–2696, 1995.
- (20) K. Aihara, "Chaos engineering and its application to parallel distributed processing with chaotic neural networks," *Proc. of the IEEE*, vol.90, no.5, pp.919–930, 2002.
- (21) 佐藤朱里, 早川吉弘, 中島康治, "Inverse Function Delayed モデルによる組合せ最適化問題正解率のパラメータ依存性," *信学論 (A)*, vol.J89-A, no.11, pp.960–972, Nov. 2006.
- (22) S. Matsuda, "'Optimal' neural representation of higher order for traveling salesman problems," *Electron. Commun. Jpn.*, 2 *Electron.*, vol.85, no.9, pp.32–42, 2002.
- (23) T. Sota, Y. Hayakawa, S. Sato, and K. Nakajima, "An application of higher order connection to inverse function delayed network," *NOLTA, IEICE*, vol.2, no.2, pp.180–197, April 2011.
- (24) S. Suenaga, Y. Hayakawa, and K. Nakajima, "Design of a neural network chip for the burst ID model with ability of burst firing," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol.E90-A, no.4, pp.715–723, April 2007.

(NLP 研究会提案, 平成 24 年 6 月 26 日受付)

7 月 18 日最終受付)

中島康治 (正員: フェロー)

1972 東北大・工・電気卒。1978 同大学院博士課程了。同年東北大電気通信研究所助手。1995 同教授。工博。ブレインコンピュータの研究に従事。

早川吉弘 (正員)

1998 東北大・工・電子卒。1990 同大学院博士課程前期 2 年の課程了。2001 東北大学院情報科学研究科にて博士 (情報科学) を取得。1990～1992 福島県福島工業試験場研究員。1992～2009 東北大学電気通信研究所助手。2009 から仙台高等専門学校准教授として現在に至る。現在は、神経回路網を用いた情報処理応用の研究に従事。