Slepian-Wolf の定理

— 関連のある情報源の分散符号化

The Slepian-Wolf Theorem
— Distributed Coding of Correlated Sources

村松 純 Jun MURAMATSU

アブストラクト D. Slepian と J. K. Wolf が 1973 年に発表した関連のある情報源の分散符号化問題に関する定理とその後の発展について、順定理の証明手法（符号の構成）という視点から解説する。

キーワード 情報理論, 情報圧縮, 多端子情報源符号化, 分散符号化, Slepian-Wolf の定理

Abstract In 1973, D. Slepian and J. K. Wolf proved a theorem on the coding problem of correlated sources. The history of this theorem is reviewed from the viewpoint of achievability proofs (code constructions).

Key words Information Theory, Data Compression, Multiterminal Source Coding, Distributed Source Coding, Slepian-Wolf Theorem

1. はじめに

1973 年に D. Slepian と J. K. Wolf は多端子情報理論^(注1)に関する二つの論文を発表した。一つは、相関^(注2)を有する二つの情報源の分散符号化に関する論文⁽⁵⁾である。もう一つは、二つの符号器が私的なメッセージに加えて共通のメッセージを有しているときのマルチプルアクセス通信路の符号化に関する論文⁽⁶⁾である。本稿では、1975 年の IEEE Information Theory Society Paper Award を受賞した前者の論文とその後の発展について、順定理の証明手法（符号の構成）という視点から解説を試みたいと思う^(注3)。

情報理論研究者でなければ「Slepian-Wolf の定理」と聞いてもピンと来ない方がほとんどのような気がする。実際、この定理の完全な証明が書かれている日本語で書かれた情報理論の教科書は少ない^(注4)。本稿では、この定理を初めて知る読者にも分かるように、数列の極限、確率、有限体上の線形代数とこれから紹介する幾つかの補題を認めて頂いた上で、順定理の証明を直観的に説明したい^(注5)。

ここで、あらかじめ約束しておきたいことをまとめておく。特に断らない限り、ここで扱う情報源や通信路は全て有限集合上で定義されたもので、定常無記憶性を持っているとする。確率変数 X のとり得る値全体からなる集合^(注6)を $\mathcal{X}$ と記す。 $\mathcal{X}$ の要素 (X の実現値の一つ) を x と記し、 $\mathcal{X}^n$ の要素 (X^n の実現値の一つ) を x^n と記す。ここで、 X^n や x^n がベクトルであ

るときは全て列ベクトルであるとし、転置記号を省略する。確率変数 X に対応する確率分布を p_X と記す。また、 X^n に対応する確率分布も p_X と記す^(注7)。 Y などのほかの確率変数についても同様の記法を用いるが、関数や行列、そしてこれらに対応する確率変数をどちらも A などと表記する場合がある。 n 次元の零ベクトル (n 個の 0 を並べた系列) を 0^n と記す。有限体及び有限体上のベクトル空間の加法、減法をそれぞれ $+$, $-$ と表記する。最後に、演算の優先順位を $[\cdot]$ で示し、 $(\cdot)$ は関数の引数を表現するために用いていることを注意しておく。ただし、 $[0, 1]$ は閉区間を表しており、自然言語で定義を与えるときも $[\cdot]$ を用いている。 $(\cdot)$ は行列、ベクトルを表現するときにも用いる。 $|\cdot|$ は絶対値あるいは集合の要素数を表す。

2. Slepian-Wolf の定理

本稿で解説する Slepian-Wolf の定理は、相関のある二つの情報源の出力 X^n, Y^n を他方の出力を観測せずに個別に符号化（圧縮）し、二つの符号語 U^{nR_X}, V^{nR_Y} (R_X, R_Y は正

村松 純 正員 日本電信電話株式会社 NTT コミュニケーション科学基礎研究所
E-mail muramatsu.jun@lab.ntt.co.jp
Jun MURAMATSU, Member (NTT Communication Science Laboratories, Nippon Telegraph and Telephone Corporation, Kyoto-fu 619-0237 Japan).

電子情報通信学会 基礎・境界ソサイエティ
Fundamentals Review Vol.7 No.3 pp.227-241 2014 年 1 月
©電子情報通信学会 2014

(注1): 複数の入力端子と出力端子（入力端子と出力端子の少なくともどちらかは二つ以上）を持つ通信路に関する符号化の理論。情報源符号化問題は無雑音の通信路を仮定して 2 個以上の情報源の圧縮レートを議論し、通信路符号化問題は雑音のある通信路を仮定して 2 個以上のメッセージの伝送レートを議論する。

(注2): 数学的には、 X と Y に相関があるとは、 X と Y が独立ではない場合を指す。

(注3): 本稿では、歴史的経緯の把握を容易にするために論文の参照番号を時系列順とした。ただし、本論文以前に発表された会議論文が存在する場合もあるので、時系列は必ずしも厳密ではない。

(注4): 筆者が調べた範囲では、文献 (12) (18) (19) (51) がぐらいいく見当たらなかった。

(注5): 要点だけを簡潔に知りたい場合は本稿の基になった予稿⁽⁵⁷⁾を御覧いただきたい。

(注6): アルファベットと呼ばれる。

(注7): 実際、 X^n が定常無記憶のときには X^n の分布は X の分布 p_X により定まる。

図 1 Slepian-Wolf 情報源符号化

図 2 情報源符号化

の実数)を受信した復号器が X^n, Y^n の両方を 0 に限りなく近い誤り確率で復号する場合(図 1)を論じたものである。以後、このような符号を Slepian-Wolf 符号と呼ぶことにする。相関のある情報源の例として、

- 離れている複数のセンサが持つ情報^(注8)
- ステレオ音声の右音声と左音声
- 静止画像の隣接するピクセル情報
- 動画の連続するフレーム情報

などを挙げることができる。これらはいずれも、一方の情報から他方の情報が推測しやすい。このような複数の情報源の持つ相関を利用するように設計された符号が Slepian-Wolf 符号である。複数の情報源の出力を個別に符号化するために符号器の実装が簡単になるという特徴から、最近は上記のような実データに対する Slepian-Wolf 符号を実装するという研究も行われている⁽⁵⁵⁾。また Slepian-Wolf 符号は「相関乱数からの秘密鍵共有」と呼ばれるセキュリティ技術にも応用できることが知られている^{(30) (37) (56)}。

本章では、最初に Shannon の情報源符号化定理を復習し、続いて相関のある情報源の簡単な例を用いて Slepian-Wolf 符号を説明し、最後に Slepian-Wolf の定理を形式的に述べる。

2.1 情報源符号化定理

Slepian-Wolf の定理を説明する前に、Shannon が証明した情報源符号化定理⁽¹⁾を簡単に復習させて頂きたい。ここでは、一つの情報源の出力を符号(圧縮)して符号語 U^{nR} を出力し、復号器が受信した U^{nR} を復号化して X^n を 0 に限りなく近い復号誤り確率で再生する場合(図 2)を考える。

符号器は関数 $\phi_n: \mathcal{X}^n \rightarrow \{0, 1\}^{nR}$ と表現することができる^(注9)。ここで、 $R \geq 0$ は符号化レートと呼ばれる。復号器は関数 $\psi_n: \{0, 1\}^{nR} \rightarrow \mathcal{X}^n$ と表現したとき、復号誤り確率は

$$\text{Prob}(\psi_n(\phi_n(X^n)) \neq X^n)$$

となる。

Shannon は情報理論に関する最初の論文⁽¹⁾で次の定理を証明した。情報源 X のエントロピー $H(X)$ を以下のように定義

(注8): 複数のセンサが適切な距離を保たないとほとんど独立になってしまうだろう。
(注9): nR が整数でない場合は切り上げる必要があるが、 $n \rightarrow \infty$ とともに符号化レートへの影響を無視することができるので、 nR が整数であるかのような表記をする。以後同様の表記をする。

する。

$$H(X) \equiv \sum_{x \in \mathcal{X}} p_X(x) \log_2 \frac{1}{p_X(x)} \quad (1)$$

定理 1 (順定理). 符号化レート R が $R > H(X)$ を満たすとき、復号誤り確率が $n \rightarrow \infty$ とともに 0 に収束するような符号^(注10) $\{(\phi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する。

定理 2 (逆定理). 復号誤り確率が $n \rightarrow \infty$ とともに 0 に収束するような全ての符号 $\{(\phi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は $R \geq H(X)$ を満たしている。

ここで、順定理では、 $n \rightarrow \infty, R \rightarrow H(X)$ とすることにより $H(X)$ に限りなく近い符号化レートを持つ符号が存在するとみなしてもよい。以上の二つの定理から、情報源 X のエントロピー $H(X)$ が X を符号化(圧縮)するときのレートの限界であると結論付けることができる^(注11)。

ここで、順定理の証明を簡単に説明したい。これは Slepian-Wolf の証明を理解する上で重要になる。今から紹介する証明は Shannon の最初の論文の証明に沿ったものである。

まず、典型集合と呼ばれる以下で定義された $\mathcal{X}^n$ の部分集合 $\mathcal{T}_{X,\varepsilon}^n$ を導入する。

$$\mathcal{T}_{X,\varepsilon}^n \equiv \left\{ x^n : \left| \frac{1}{n} \log_2 \frac{1}{p_X(x^n)} - H(X) \right| \leq \varepsilon \right\} \quad (2)$$

Shannon は定常無記憶情報源 X に対して次の補題を証明した⁽¹⁾。

補題 1. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $n \rightarrow \infty$ とともに

$$\text{Prob}(X^n \in \mathcal{T}_{X,\varepsilon}^n) \rightarrow 1$$

となる。

この補題を認めて頂ければ、順定理の証明は簡単である。まず、集合 $\mathcal{T}_{X,\varepsilon}^n$ の要素数 $|\mathcal{T}_{X,\varepsilon}^n|$ を評価する。

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_{X,\varepsilon}^n| &= \sum_{x^n \in \mathcal{T}_{X,\varepsilon}^n} 1 \\ &\leq \sum_{x^n \in \mathcal{T}_{X,\varepsilon}^n} p_X(x^n) 2^{n[H(X)+\varepsilon]} \\ &\leq 2^{n[H(X)+\varepsilon]} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、最初の不等式では任意の $x^n \in \mathcal{T}_{X,\varepsilon}^n$ で

$$\frac{1}{n} \log_2 \frac{1}{p_X(x^n)} \leq H(X) + \varepsilon$$

が成り立つことを、その次の不等式では $2^{n[H(X)+\varepsilon]}$ を $\sum$ の外に出した上で確率の総和が 1 以下であることを用いた。式 (3) は、 $\mathcal{T}_{X,\varepsilon}^n$ の要素を $n[H(X)+\varepsilon]$ ビットで表されるインデックスにより一意に特定できることを意味する。符号を次のように

(注10): 本稿では符号器と復号器の組の列のことを符号と呼ぶ。

(注11): 情報理論になじみのない読者のために補足させて頂くと、 $H(X)$ の定義には符号 $\{(\phi_n, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は現れず、 X の確率分布だけで求められる量であることが重要である。一般に Shannon 理論では、通信をはじめとする情報処理のある種の限界を、あらかじめ仮定した情報源や通信路の性質(確率分布)だけを用いて記述することを目標とする。

表 1 相関のある情報源の同時分布の例

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$	$X = 5$
$Y = 1$	1/12	1/12	1/12	0	0	0
$Y = 2$	0	1/12	1/12	1/12	0	0
$Y = 3$	0	0	1/12	1/12	1/12	0
$Y = 4$	0	0	0	1/12	1/12	1/12

構成する。

• 符号器は、もしも情報源の出力 x^n が $\mathcal{T}_{X,\varepsilon}^n$ の要素であれば、これを $n[H(X) + \varepsilon]$ ビットで符号化する。もしも x^n が $\mathcal{T}_{X,\varepsilon}^n$ の要素でなければ $n[H(X) + \varepsilon]$ 個の 0 を符号語とする。すなわち、符号器 ϕ_n は以下ようになる。

$$\phi_n(x^n) \equiv \begin{cases} [n[H(X) + \varepsilon] \text{ ビットの符号語}], & x^n \in \mathcal{T}_{X,\varepsilon}^n \text{ のとき} \\ 0^{n[H(X) + \varepsilon]}, & x^n \notin \mathcal{T}_{X,\varepsilon}^n \text{ のとき} \end{cases}$$

符号化レートは $R = H(X) + \varepsilon$ となる。

• 復号器は、受信した符号語 u^{nR} から唯一定まる $\mathcal{T}_{X,\varepsilon}^n$ の要素を再生する。復号器 ψ_n は以下ようになる。

$$\psi_n(u^{nR}) \equiv [\text{符号語 } u^{nR} \text{ と対応する } x^n \in \mathcal{T}_{X,\varepsilon}^n]$$

ここで、復号誤りが生じるのは $x^n \notin \mathcal{T}_{X,\varepsilon}^n$ であったときのみであることに注目すると、復号誤り確率は $[1 - \text{Prob}(X^n \in \mathcal{T}_{X,\varepsilon}^n)]$ となる。したがって、補題 2 より復号誤り確率は $n \rightarrow \infty$ とともに 0 に収束する。 $\varepsilon > 0$ は任意であったので、 $R > H(X)$ を満たせば復号誤り確率が $n \rightarrow \infty$ とともに 0 に収束するような符号が存在することが分かった。

後の理解のために覚えておいて頂きたいのは、要素数が高々 $2^{n[H(X) + \varepsilon]}$ であり、かつ確率が 1 に近い集合 $\mathcal{T}_{X,\varepsilon}^n$ が存在することである。この集合にある要素を特定できれば、情報源出力 X^n を 0 に近い復号誤り確率で符号化できることになる。

2.2 相関のある情報源の符号化

ここでは、表 1 のような同時分布を持つ二つの情報源 X と Y を考えてみよう。この例^(注12)では、 Y の値を観測すれば、 X は $|X - Y| \leq 1$ を満たす範囲の整数値しかとらないことが推測できるので、相関を有していることが分かる。

まず最初に、相関を利用せずに情報源 X と Y を個別に符号化（圧縮）してみよう。 X の周辺分布^(注13)は $(1/12, 1/6, 1/4, 1/4, 1/6, 1/12)$ となる。これは、表 1 で各列の確率の総和を求めることにより計算できる。同様に、表 1 の各行の確率の総和によって Y の周辺分布を求めると、それぞれの確率が $1/4$ の一様分布であることが分かる。したがって、前節の情報源符号化定理から、 X をレート $H(X) = \frac{1}{6} \log_2 12 + \frac{1}{3} \log_2 6 + \frac{1}{2} \log_2 4$ で符号化^(注14)して、 Y

をレート $H(Y) = \log_2 4$ で符号化すれば、復号器は (X, Y) を誤りなく再生することができる^(注15)。 X, Y の符号化レートの和は $H(X) + H(Y) = \frac{1}{6} \log_2 12 + \frac{1}{3} \log_2 6 + \frac{3}{2} \log_2 4 \approx 4.459$ となる。

続いて、符号器は情報源 X と Y の両方を観測して、その相関を利用して符号化してみよう。 X と Y の両方が観測できるときは、直積集合 $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ の値を持つ一つの確率変数 (X, Y) とみなすことができるので、前節の情報源符号化定理によれば、以下で定義される (X, Y) の同時エントロピー

$$H(X, Y) = \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} p_{XY}(x, y) \log_2 \frac{1}{p_{XY}(x, y)}$$

まで (X, Y) の符号化レートを小さくできるはずである。実際に、これを表 1 で与えられた同時分布 p_{XY} に適用すると、 $H(X, Y) = \log_2 12 \approx 3.585$ となり、最初の例より (X, Y) の符号化レートが小さくなっている（より圧縮できている）ことが分かる^(注16)。

続いて、二つの符号器が情報源 X と Y のそれぞれ一方だけを観測して、個別に符号化を行うことを考えよう。 X, Y を次のように個別に符号化する。以下では X^n, Y^n, Z^n の i 番目の確率変数をそれぞれ X_i, Y_i, Z_i とする。

• X_i を 3 で割った余り、すなわち $Z_i \equiv X_i \pmod{3}$ を求め、これを繰り返して Z^n を求める。そして Z^n をレート $\log_2 3$ で符号化する^(注17)。これを X^n の符号語とする。

• Y^n の出力は最初の方法と同じようにレート $\log_2 4$ で符号化する。

X^n と Y^n の符号語を受信した復号器は次のように復号する。

• X^n, Y^n の符号語からそれぞれ Z^n, Y^n を再生する^(注18)。

• 各 i に対して、 $|X_i - Y_i| \leq 1$ と $Z_i = X_i \pmod{3}$ を同時に満たす X_i が Y_i と Z_i の値から唯一定まることから、 X_i を誤りなく特定できる。これを繰り返して X^n を再生する。以上の符号において、 (X, Y) の符号化レートは $\log_2 4 + \log_2 3 = \log_2 12$ となる。

驚くべきことに、最後の方法では二つの符号器が情報源 X と Y のそれぞれ一方だけを観測して個別に符号化を行ったにもかかわらず、情報源 X と Y の両方を見て符号化を行った二番目の方法と同じ性能を持つことが分かった。このようなことができる理由は、 X と Y が $|X - Y| \leq 1$ を満たすというある種の相関を復号器が利用できたことにある。これを一般化すれば、 X と Y の同時分布 p_{XY} を復号器が利用できれば、 X と Y の相関を利用した符号化が可能ということになる。果してこのようなことは常に（任意の同時分布 p_{XY} に対して）可能であろう

(注15): X と Y の周辺分布のエントロピーを定義式 (1) に当てはめて計算してみよう。なお、この場合は Y の出力 1 文字は $\log_2 4 = 2$ ビットで表現できることが分かるが、 X の出力 1 文字の符号化に必要なビット数には端数が出る。しかしながら、直積集合 $\mathcal{X}^n$ で符号化を考えることにより端数を無視できるようになる。

(注16): 実際、表 1 の例で正の確率を持つ場合は 12 通りしかないで、 (X, Y) を $\log_2 12$ ビットで表現できるというのは自然であろう。

(注17): Z_i は等確率分布になるので、 $H(Z_i) = \log_2 3$ となる。

(注18): X^n の符号語は Z^n を符号化したものであることに注意。なお、 Y は 4 通りの値しかとらず、 Z は 3 通りの値しかとらないことから、常に正しく再生できる方法があることが分かる。

図 3 相関のある情報源符号化

か？言い替えれば，Slepian-Wolf 符号が存在するための符号化レートの条件はどのようなものだろうか？これを明らかにしたのが Slepian-Wolf の定理である．

2.3 Slepian-Wolf の定理

Slepian-Wolf の論文⁽⁵⁾では，二つの相関のある情報源の符号化（図 3）について，スイッチ S_1, S_2, S_3, S_4 のそれぞれが オン と オフ の合計 16 通りの場合を考察している．現在 Slepian-Wolf の定理として知られている図 1 の設定は，図 3 において S_1, S_2 が オフ， S_3, S_4 が オン の場合である^(注19)．前節で解説したとおり，この定理の本質的なところは， X^n と Y^n をそれぞれ別々の符号器を用いて個別に符号化を行うところと，復号器が X^n と Y^n の相関（同時分布）を利用するところとあり，具体的な符号の構成は Shannon の情報源符号化定理（定理 1）から直ちに思いつくものではなさそうだ．

以下に Slepian-Wolf の定理⁽⁵⁾を紹介する．相関のある定常無記憶情報源 (X, Y) に対して，ブロック長 n の出力系列 X^n, Y^n の符号化レートをそれぞれ R_X, R_Y とする． X の符号器を $\phi_{X,n} : \mathcal{X}^n \rightarrow \{0, 1\}^{nR_X}$ ， Y の符号器を $\phi_{Y,n} : \mathcal{Y}^n \rightarrow \{0, 1\}^{nR_Y}$ ，復号器を $\psi_n : \{0, 1\}^{nR_X} \times \{0, 1\}^{nR_Y} \rightarrow \mathcal{X}^n \times \mathcal{Y}^n$ とする．復号誤り確率は

$$\text{Prob}(\psi_n(\phi_{X,n}(X^n), \phi_{Y,n}(Y^n)) \neq (X^n, Y^n))$$

となる．同時分布 p_{XY} が与えられたとき，条件付確率分布 $p_{X|Y}$ は

$$p_{X|Y}(x|y) \equiv \frac{p_{XY}(x, y)}{\sum_{x \in \mathcal{X}} p_{XY}(x, y)}$$

となる．条件付エントロピー $H(X|Y)$ を以下のように定義する．

$$H(X|Y) \equiv \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} p_{XY}(x, y) \log_2 \frac{1}{p_{X|Y}(x|y)}$$

同様に条件付確率分布 $p_{Y|X}$ と条件付エントロピー $H(Y|X)$ も定義できる．

定理 3 (順定理)． 相関のある定常無記憶情報源 (X, Y) に対して，レート対 (R_X, R_Y) が

$$R_X > H(X|Y) \quad (4)$$

$$R_Y > H(Y|X) \quad (5)$$

(注 19) : S_3, S_4 が オン の場合であることから，図 1 では現在の慣例にならい復号器を一つにまとめている．

図 4 達成可能レート領域

$$R_X + R_Y > H(X, Y) \quad (6)$$

を満たせば^(注20)，復号誤り確率が $n \rightarrow \infty$ とともに 0 に収束するような符号 $\{(\phi_{X,n}, \phi_{Y,n}, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する．

定理 4 (逆定理)． 相関のある定常無記憶情報源 (X, Y) に対して，復号誤り確率が $n \rightarrow \infty$ とともに 0 に収束するような符号 $\{(\phi_{X,n}, \phi_{Y,n}, \psi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ のレート対 (R_X, R_Y) は

$$R_X \geq H(X|Y) \quad (7)$$

$$R_Y \geq H(Y|X) \quad (8)$$

$$R_X + R_Y \geq H(X, Y) \quad (9)$$

を満たしている．

図 4 の塗りつぶされた領域は (7) ~ (9) の不等式を満たす (R_X, R_Y) の全体からなる集合である．ここで，順定理では $n \rightarrow \infty$ として (R_X, R_Y) をこの領域の境界に限りなく近い符号化レートを持つ符号が存在するとみなしてもよい．以下では，この集合を（達成可能）レート領域と呼ぶ．なお，これまでは復号誤り確率が限りなく小さい符号を導入したが，復号誤り確率が真に 0 となるような符号に関しては Slepian-Wolf の定理が一般には成立しないことが示されている⁽⁹⁾．これは，情報源が一つの場合は可変長符号^(注21)を考えることにより復号誤り確率が真に 0 となるような符号を構成できる点と大きく異なる点である^(注22)．

(注 20) : 本稿の基になった解説論文⁽⁵⁷⁾では，条件式 (7) ~ (9) を必要十分条件として紹介してしまっているが，これは厳密ではない．必要十分条件を述べたい場合は「条件 (7) ~ (9) を満たす (R_X, R_Y) に限りなく近い符号化レート対を持つ符号が存在する」とすべきであった．

(注 21) : 符号語の長さが圧縮対象の系列に依存して異なっていることを許す符号．

(注 22) : 一般に成立しないとは，式 (7) ~ (9) で定まる領域の全てで復号誤り確率が真に 0 の Slepian-Wolf 符号が存在するとは限らないことを意味する．例えばそれぞれの符号器が (X, Y) の両方を見ることができれば，Huffman 符号や算術符号などの復号誤りが全く起こらないように設計された符号を用いて，トータルレートが $H(X, Y)$ となる可変長符号を構成できる．しかしながら，Slepian-Wolf 符号では一方の情報源の符号器が他方の情報源の出力を観測できないので，この方法は認められない．

図 5 通信路符号化

3. 通信路符号から Slepian-Wolf 符号へ

ここから順定理の証明手法の変遷を追いかけてみたいと思う。Slepian-Wolf の論文⁽⁵⁾にある証明は通信路容量を達成する通信路符号を利用したものである。そこでまず、通信路符号の復習をしたい。

3.1 通信路符号化定理

通信路に X^n を入力したとき、雑音加わった出力 Y^n が得られる。これを X^n から Y^n に遷移する確率（条件付確率） $p_{Y|X}$ で特徴付ける。通信路符号化では、符号器はメッセージ M^{nR} を符号化した符号語 X^n を通信路入力とし、復号器は通信路出力 Y^n から元のメッセージを復号して 0 に近い復号誤り確率で再生することを試みる（図 5）。ここで、 $R > 0$ は通信路の単位入力長に対して何ビットのメッセージを正しく送ることができるかを示す量で符号化レートと呼ばれている。 R が大きいほど性能の良い符号ということになる。形式的には、符号器は関数 $\phi_n: \{0, 1\}^{nR} \rightarrow \mathcal{X}^n$ 、復号器は関数 $\psi_n: \mathcal{Y}^n \rightarrow \{0, 1\}^{nR}$ と表現することができる^(注23)。復号誤り確率は

$$\text{Prob}(\psi_n(Y^n) \neq M^{nR})$$

となる^(注24)。

Shannon は情報理論に関する最初の論文⁽¹⁾で次の定理を証明した。 C を次のように定義する^(注25)。

$$C \equiv \max_X [H(X) - H(X|Y)]$$

定理 5 (順定理). 符号化レート R が $R < C$ を満たすとき、復号誤り確率が $n \rightarrow \infty$ とともに 0 に収束するような符号 $\{(\phi_n, \psi_n)\}_{n=1}^\infty$ が存在する。

定理 6 (逆定理). 復号誤り確率が $n \rightarrow \infty$ とともに 0 に収束するような全ての符号 $\{(\phi_n, \psi_n)\}_{n=1}^\infty$ は $R \leq C$ を満たしている。

ここで、通信路の条件付確率から定まる量 C は通信路容量と呼ばれている。なお、現在の標準的な教科書では相互情報量 $I(X; Y) \equiv H(X) - H(X|Y)$ を定義^(注26)して通信路容量を

(注23): nR が整数でない場合は切り捨てが必要であるが、 $n \rightarrow \infty$ とともに符号化レートへの影響を無視することができる。

(注24): ϕ_n や X^n が登場しないことを奇妙に思うかも知れないが、 X^n が M^{nR} と ϕ_n に依存し、 Y^n が X^n に依存していることに注意してほしい。

(注25): $\max_X$ は入力分布 p_X を動かしたときの最大値を表す。条件付き確率と入力分布が与えられれば、 (X, Y) の同時確率が定まるので $[H(X) - H(X|Y)]$ が計算できる。通信路入力は $\max_X$ で最適化されるので、 $\max_X [H(X) - H(X|Y)]$ は条件付き確率だけで定まる量である。

(注26): 相互情報量を導入したのは Fano であることを Princeton 大学の Verdú 先生から教えて頂いた。

表 2 メッセージと符号語の対応: $n = 4, nR = 2$ の場合。右欄は p_X に従って独立かつランダムに生成する。

メッセージ	符号語 (通信路入力)
00	1010
01	0110
10	1001
11	0101

$\max_X I(X; Y)$ と書くことが多い。ここでは Shannon の最初の論文⁽¹⁾にならい $\max_X [H(X) - H(X|Y)]$ と書いた。あえてこう表記したのは後の説明の伏線になっている。

最初の定理では、 $n \rightarrow \infty, R \rightarrow \max_X [H(X) - H(X|Y)]$ とすることにより、通信路容量に限りなく近い符号化レートを持つ符号が存在するとみなしてもよい。以上の定理から、通信路容量が符号化レートの限界であると結論付けることができた。

ここで、通信路符号化定理の順定理の証明の要点も復習させて頂きたい。Slepian-Wolf の証明を理解するためには、これも欠かすことができない。まず、符号器の設計のために、確率 p_X で独立に発生させた長さ n の系列 ($\mathcal{X}^n$ の要素) を 2^{nR} 個用意する。これらと 2^{nR} 個のメッセージを 1 対 1 対応させたテーブル (表 2) を用意し、これを符号器と復号器で共有しておく。メッセージと対応させた $\mathcal{X}^n$ の要素 (表 2 の右欄に書かれた系列) が符号語になる。同時典型集合 $\mathcal{T}_{XY, \epsilon}^{nR} \subset \mathcal{X}^n \times \mathcal{Y}^n$ を次のように定義する。

$$\mathcal{T}_{XY, \epsilon}^{nR} \equiv \left\{ (x^n, y^n) : \begin{cases} \left| \frac{1}{n} \log_2 \frac{1}{p_{XY}(x^n, y^n)} - H(X, Y) \right| \leq \epsilon \\ \left| \frac{1}{n} \log_2 \frac{1}{p_{X|Y}(x^n | y^n)} - H(X|Y) \right| \leq \epsilon \\ \left| \frac{1}{n} \log_2 \frac{1}{p_{Y|X}(y^n | x^n)} - H(Y|X) \right| \leq \epsilon \end{cases} \right\} \quad (10)$$

符号器と復号器の構成は以下のとおり。

- 符号器はテーブルを参照してメッセージ m^{nR} と対応する符号語を通信路に入力する。符号器 ϕ_n は以下ようになる。

$$\phi_n(m^{nR}) \equiv [m^{nR} \text{ と対応する符号語}]$$

- 復号器は受信した Y^n から、 $(\hat{x}^n, Y^n)$ が同時典型集合に属しているような $\hat{x}^n$ を符号語をテーブルから探し、対応するメッセージを再生する。復号器 ψ_n は以下ようになる。

$$\psi_n(y^n) \equiv \left[\begin{array}{l} \text{受信した } y^n \text{ に対して,} \\ (\hat{x}^n, y^n) \in \mathcal{T}_{XY, \epsilon}^{nR} \text{ となる } \hat{x}^n \text{ を符号語集合から探し,} \\ \text{これと対応するメッセージを再生する.} \\ \text{そのような } \hat{x}^n \text{ が存在しない,} \\ \text{あるいは二つ以上存在するときは復号誤りとする.} \end{array} \right]$$

このような復号法は典型集合復号と呼ばれている。

証明の詳細は情報理論の標準的な教科書^{(51)(注27)}に譲りたいが、 $R < H(X) - H(X|Y)$ を満たせば、すなわち $\varepsilon > 0$ に対してテーブルとして用意した符号語の数が $2^{n[H(X) - H(X|Y) - \varepsilon]}$ 以下であれば、復号誤り確率が 0 に収束するようにテーブルを作ることができる。ここで、 $\max_X [H(X) - H(X|Y)]$ を達成する X を取ることで、構成した符号は通信路容量を達成する。Slepian-Wolf の証明のために覚えておいて頂きたいのは、 X^n の要素を p_X に従って $2^{n[H(X) - H(X|Y) - \varepsilon]}$ 個発生させたテーブルを用意することにより、復号誤り確率が 0 に近づく通信路符号を構成できることである。

3.2 Slepian-Wolf の証明

いよいよここから Slepian-Wolf による順定理の証明⁽⁵⁾を解説する。

彼らの論文では、最初に Y^n をレート $H(Y)$ 付近で符号化したときに X^n をレート $H(X|Y)$ 付近で符号化できることを示した。これは、図 4 において $(H(X|Y), H(Y))$ 付近のレート対を達成する符号を構成することと対応する。続いて、時分割原理と呼ばれている方法を用いてレート領域にある全てのレート対を達成できることを示した。

ここで、時分割原理について簡単に説明しておこう。 $(H(X|Y), H(Y))$ 付近のレート対を達成する符号を構成できれば、同様に $(H(X), H(Y|Y))$ 付近のレート対を達成する符号を構成できる^(注28)。符号化では、最初に長さ N のブロックを長さ n のサブブロックに分割する。そして幾つかのサブブロックは $(H(X|Y), H(Y))$ 付近のレート対で、残りのサブブロックは $(H(X), H(Y|Y))$ 付近のレート対で符号化する。長さ N のブロックの復号では、サブブロックごとに対応する復号器を用いれば誤り確率が 0 に近い復号ができるはずである^(注29)。どちらの符号器を使うかの混合比を $\theta \in [0, 1]$ とすれば、長さ N のブロックのレート対は $(\theta H(X|Y) + [1 - \theta]H(X), \theta H(Y) + [1 - \theta]H(Y|Y))$ となる。すなわち、図 4 において $(H(X|Y), H(Y))$ と $(H(X), H(Y|Y))$ の任意の内分点（斜線の境界線上）のレート対を持つ符号が構成できることになる。図 4 のほかの領域内にあるほかのレート対を持つ符号の存在については、わざと冗長に符号化すればよいので自明であり、これで Slepian-Wolf の順定理が証明できたことになる。

それでは $(H(X|Y), H(Y))$ 付近のレート対を達成する符号を構成する。情報源符号化定理（定理 1）から、 Y^n はレート $[H(Y) + \varepsilon]$ の符号を用いれば 0 に近い復号誤り確率で復号できるので、復号器は Y^n を直接観測できると考えても差し支えない（図 6）。この場合、 Y^n は X^n を再生するための補助情報と呼ばれるものになる。Slepian-Wolf の論文では、 $(H(X|Y), H(Y))$

図 6 補助情報 Y^n を伴う情報源 X^n の符号化

図 7 通信路符号を改造してみる

付近のレート対を達成する符号を構成するために、相関のある情報源 (X^n, Y^n) を入力 X^n 出力 Y^n の通信路とみなして、この通信路に対する符号を考えた。

図 7 において、図 5 の復号器 ψ_n の後に図 5 の符号器 ϕ_n を連結した合成関数 $\phi_n \circ \psi_n$ は、補助情報 Y^n から情報源 X^n を再生しているように見える。この合成関数を図 6 の復号器 ψ_n の構成に利用しよう。ここで、通信路符号化定理より、 Y^n から誤りなく再生できる X^n は高々 $2^{n[H(X) - H(X|Y) - \varepsilon]}$ 個であったことを思い出してほしい。一方で 2.1 の情報源符号化定理の順定理の証明で説明したように、 X^n を 0 に近い復号誤り確率で復号するためには $2^{n[H(X) + \varepsilon]}$ 個の要素から成る典型集合を 0 に近い復号誤り確率で復号できるようにしたい。どうすればよいだろうか？

Slepian-Wolf の論文では、 $2^{n[H(X) - H(X|Y) - \varepsilon]}$ 個の符号語集合を持つ通信路符号を、符号語集合が互いに素になるように $2^{n[H(X|Y) + 2\varepsilon]}$ 個用意した。これにより 1 に近い確率を持つ高々 $2^{n[H(X|Y) + 2\varepsilon]} 2^{n[H(X) - H(X|Y) - \varepsilon]} = 2^{n[H(X) + \varepsilon]}$ 個の X^n の部分集合を、用意した符号語全体でカバーできる。用意した符号語集合には $nR_X \equiv n[H(X|Y) + 2\varepsilon]$ ビットのインデックスを付与しておく。符号器は、 X^n が属する符号語集合があればそのインデックスを符号語とする。なければ 0^{nR_X} を符号語とする。符号化レートは $R_X = H(X|Y) + 2\varepsilon$ になる。一方で、良い通信路符号はうまく選んだ $2^{n[H(X) - H(X|Y) - \varepsilon]}$ 個の X^n の出力系列を Y^n から誤りなく復元できるので、復号器はレート $R_X = H(X|Y) + 2\varepsilon$ のインデックスにより符号語集合を定め、 Y^n からこの符号語集合の要素の一つを特定することにより X^n を誤りなく復号できる。以上によりレート $R_X = H(X|Y) + 2\varepsilon$ を持つ符号が構成できることが分かった。 $\varepsilon \rightarrow 0$ とすることにより、 $(H(X|Y), H(Y))$ に限りなく近いレート対を持つ Slepian-Wolf 符号の存在が示される。

ここで、Slepian-Wolf の証明にある $(H(X|Y), H(Y))$ 付近のレート対を達成する符号の構成をまとめておく。 u^{nR_X} , v^{nR_Y} をそれぞれ x^n の符号語、 y^n の符号語とする。

X^n の符号器:

$$\phi_{X,n}(x^n) \equiv \begin{cases} [x^n \text{ を含む符号語集合のインデックス}] \\ 0^{nR_X} \text{ (} x^n \text{ を含む符号語集合がないとき)} \end{cases}$$

(注 27): 同時典型集合の定義が教科書⁽⁵¹⁾のものと異なっているが、本質的な違いとはならない。

(注 28): X^n をレート $H(X)$ 付近で符号化した時に Y^n をレート $H(Y|X)$ 付近で符号化する。

(注 29): もちろん、サブブロックをどちらの符号器で符号化したかを事前に復号器に知らせておく必要がある。

Y^n の符号器:

$$\phi_{Y,n}(y^n) \equiv \left[\begin{array}{l} \text{レート } H(Y) \text{ 付近の情報源符号を用いて} \\ y^n \text{ を符号化} \end{array} \right]$$

復号器:

$$\psi_n(u^{nR_X}, v^{nR_Y}) \equiv \left[\begin{array}{l} \phi_{Y,n} \text{ と対応する復号器を用いて} \\ v^{nR_Y} \text{ から } \hat{y}^n \text{ を再生し,} \\ \text{インデックス } u^{nR_X} \text{ を持つ通信路符号を用いて} \\ \hat{y}^n \text{ から } \hat{x}^n \text{ を再生.} \end{array} \right]$$

以上が Slepian-Wolf の論文の証明の概略であるが、符号語集合が互いに素になるように複数の通信路符号を用意できるのか、更にそれらの和集合が確率 1 に近い集合を形成しているのかなど、証明を工夫し精密に議論しなければならないところが残されている。これらの詳細は Slepian-Wolf の論文を確認してほしい。なお、文献 (12) では、Slepian-Wolf と同様の典型集合の議論により、式 (4) ~ (6) を満たす任意の (R_X, R_Y) をレートに持つ Slepian-Wolf 符号を、時分割原理の議論を経ずに直接構成している。

3.3 Wyner の証明

後になって、 X が一様分布を持ち、 X, Y が二元対称通信路^(注30)の入出力となるような相関を有する情報源に限定すれば、一つの線形符号 (パリティ検査行列) を用いて前節の「互いに素な符号語集合を持つ複数の通信路符号」を実現することにより Slepian-Wolf 符号を構成できることが Wyner⁽⁷⁾によって示された^(注31)。

まず、線形符号について復習させて頂きたい。線形符号は、図 5 の通信路符号化において、符号語集合

$$\{\phi_n(m^{nR}) : m^{nR} \in \{0, 1\}^{nR}\}$$

が線形空間を成す符号である。一つの線形符号の符号語集合は $n[1-R] \times n$ パリティ検査行列 A を用いて次のように記述できる^(注32)。

$$\{x^n : Ax^n = 0^{n[1-R]}\}$$

このとき、符号器となる $n \times nR$ 生成行列 G が存在して、メッセージを表す nR 次元の列ベクトル m^{nR} の符号語 (通信路入力) は n 次元のベクトル Gm^{nR} となる。つまり、符号器を有限体上の線形写像で与えることができる。復号器では、符号語集合 $\{Ax^n = 0^{n[1-R]}\}$ を満たす x^n の中から受信系列 Y^n と

$$p_{X|Y}(x^n|y^n) \equiv \frac{p_{Y|X}(y^n|x^n)p_X(x^n)}{\sum_{x^n \in \mathcal{X}^n} p_{Y|X}(y^n|x^n)p_X(x^n)}$$

で定まる条件付確率^(注33)を最大にする X^n を再生して^(注34)、これより元のメッセージを再生する^(注35)。このように、ある条件下で確率を最大にする系列を求める復号法は最よう復号と呼ばれる。Elias は次の補題を証明した⁽²⁾。

補題 2. 通信路が二元対称通信路で、 X が一様分布を持つとき、 $R < 1 - H(X|Y)$ を満たせば、 $n[1-R] \times n$ パリティ検査行列 A が存在して、 A を用いた線形符号の復号誤り確率を 0 に十分近くできる。

X, Y が二元対称通信路の入出力であるとき、 X を一様分布の確率変数 (すなわち $H(X) = 1$) としたときに通信路容量 $1 - H(X|Y)$ を達成する。したがって、通信路が二元対称通信路のときは線形符号により通信路容量を達成できる。

ここで、パリティ検査行列 A が定めれば、集合 $\mathcal{X}^n$ はベクトル $c^{n[1-R]}$ によって定まるコセット

$$C_A(c^{n[1-R]}) \equiv \{x^n : Ax^n = c^{n[1-R]}\}$$

によって互いに素な $2^{n[1-R]}$ 個の集合に分割される^(注36)ことに注目しよう。コセットを定める $c^{n[1-R]}$ はシンδροームと呼ばれているものである。コセット $C_A(c^{n[1-R]})$ を符号語集合とする符号はコセット符号と呼ばれている。前述の線形符号は $C_A(0^{n[1-R]})$ と書けるのでコセット符号の一つである。

Wyner の証明では、通信路符号のレートを $R = 1 - H(X|Y) - \varepsilon$ と置き、 $n[H(X|Y) + \varepsilon] \times n$ パリティ検査行列 A を用いて Slepian-Wolf 符号を構成する。具体的には、系列 X^n にパリティ検査行列を作用させたシンδροーム AX^n をその符号語とすることによって、 $(H(X|Y), H(Y))$ 付近のレート対を達成する符号を構成する。異なるシンδροームと対応するコセットは互いに素になるという性質があったので、Slepian-Wolf の証明と同じ議論ができることになる。ここで、線形符号の説明の途中で X^n を小さい復号誤り確率で再生できると書いたが、 X^n の再生と同時に差分^(注37) $Z^n \equiv Y^n - X^n$ も小さい復号誤り確率で再生できていることに注目しよう。Slepian-Wolf 符号の復号器は符号語 AX^n と Y^n を受信することにより

$$AZ^n = A[Y^n - X^n] = AY^n - AX^n$$

を用いて Z^n のシンδροームを得る。これから Z^n を 0 に近い復号誤り確率で再生することができる^(注38)。したがって、再生

(注33): 通信路の条件付確率 $p_{Y|X}$ と入力分布 p_X だけがあらかじめ与えられていることに注意しよう。

(注34): 反転確率が $1/2$ 未満の場合は、 Y^n とのハミング距離 (シンボルが異なる成分の数) が最も小さい符号語を求めることと同じである。これは最小距離復号と呼ばれる。Elias の論文⁽²⁾では補題 2 の証明において最小距離復号を採用していた。

(注35): x^n から元のメッセージを再生することは線形操作 (行列を作用させること) で実現できる。

(注36): 行列 A がフルランクの行列でない場合はコセットの数は少なくなるのだが、以降の議論では A はフルランクになっていると仮定する。

(注37): X^n と Y^n が通信路の入出力の場合は雑音とも呼ばれる。

(注38): $AX^n \neq 0^{n[1-R]}$ の場合にもこの事実が正しいことは自明ではないと思うが、通信路の対称性より全てのコセット符号の復号誤り確率が等しいことが言えるので、 $AX^n = 0^{n[1-R]}$ の場合に復号誤り確率が 0 に近ければ、 $AX^n \neq 0^{n[1-R]}$ の場合にも復号誤り確率が 0 に近くなる。これについては 4.5 でも補足する。

(注30): $X = 0$ が $Y = 1$ となる確率と $X = 1$ が $Y = 0$ となる確率が等しい通信路。入力 X とは独立な雑音 $Z \in \{0, 1\}$ を用いて $Y = X + Z$ と書けるので、二元加法的通信路とも呼ばれる。

(注31): 電気通信大学の森田先生のお話では、Cornell 大学の Berger 先生も同様の考えを持っていたようである。

(注32): 符号理論の標準的な教科書ではパリティ検査行列として H が用いられることが多いが、エントロピーの H と混同しないために、 A と表記した。

した Z^n から $X^n = Y^n - Z^n$ によって X^n を再生できることになる。

ここで、Wyner の証明にある符号の構成をまとめておく。

X^n の符号器: $\phi_{X,n}(x^n) \equiv Ax^n$.

Y^n の符号器:

$$\phi_{Y,n}(y^n) \equiv \left[\begin{array}{l} \text{レート } H(Y) \text{ 付近の情報源符号を用いて} \\ y^n \text{ を符号化.} \end{array} \right]$$

復号器:

$$\psi_n(u^{nR_X}, v^{nR_Y}) \equiv \left[\begin{array}{l} \phi_{Y,n} \text{ と対応する復号器を用いて} \\ v^{nR_Y} \text{ から } \hat{y}^n \text{ を再生し,} \\ \text{シンドローム } [A\hat{y}^n - u^{nR_X}] \text{ から雑音 } \hat{z}^n \text{ を再生する.} \\ \text{そして } \hat{x}^n \equiv \hat{y}^n - \hat{z}^n \text{ とする.} \end{array} \right]$$

Wyner のアイデアを実現するには、通信路容量に近いレートを持つ線形符号を必要とする。そのような符号は実現が困難であると考えられていたのだが、ターボ符号⁽¹⁷⁾、LDPC (Low Density Parity Check) 符号⁽³⁾、ポーラ符号⁽⁴³⁾など、通信路容量に近いレートを持つ線形符号で復号処理が実用的な時間で実行可能なものが 1990 年以降になって見つかった^(注39)。Wyner のアイデアとこれらのアイデアを組み合わせた Slepian-Wolf 符号の構成が文献(23) (27) (28) (42)で提案されている。

ここで、このように提案された符号はいずれも、 X が一様分布を持ち、 X, Y が二元対称通信路の入出力となるような相関を有する情報源に限定することにより、 $(H(X|Y), H(Y))$ 付近のレート対を達成したことを強調しておきたい。

4. Random Binning

Slepian-Wolf による証明は通信路符号を利用したものであり、回りくどく複雑であった。1975 年に Cover⁽⁸⁾は、random binning と呼ばれる手法を用いて時分割原理の議論を用いずにレート領域にある全てのレート対を達成できる符号を構成し、Slepian-Wolf の定理を相関のある定常エルゴード情報源の場合に拡張した。更に Cover はこの方法を用いて、相関のある情報源が 3 個以上ある場合のレート領域を決定している。このアイデアによって、Slepian-Wolf の定理の証明が見通しの良いものとなり、多端子情報理論の重要なツールとなっている。

4.1 Random Binning とは

Cover の random binning では、 $\mathcal{X}^n$ の系列を納めるために 2^{nR_X} 個の箱 (bin) を用意して、各系列をいずれかの箱に独立かつ等確率でランダムに入れてゆく。そして、箱とインデックス

表 3 符号語と箱の中身: $n = 4, nR_X = 2$ の場合。
 $\mathcal{X}^n$ の各要素を独立かつ等確率でいずれかの箱に入れる。

符号語	箱の中身
00	0000,0101,1010,1111
01	0010,0111,1000,1101
10	0001,0100,1011,1110
11	0011,0110,1001,1100

の対応を定めたテーブル (表 3^(注40)) をあらかじめ符号器と復号器で共有しておく。 $\mathcal{Y}^n$ についても同様に 2^{nR_Y} 個の箱とインデックスの対応を定めた表を符号器と復号器で共有しておく。

X^n の符号器は、テーブルを参照して X^n を含む箱のインデックスを符号語とする。テーブルを関数 $A: \mathcal{X}^n \rightarrow \{0, 1\}^{nR_X}$ と表せば、符号語は Ax^n となる^(注41)。同様に、 Y^n の符号器は、テーブルを参照して Y^n を含む箱のインデックスを符号語とする。テーブルを関数 $B: \mathcal{Y}^n \rightarrow \{0, 1\}^{nR_Y}$ と表せば、符号語は By^n となる。

一方で、二つの符号語 u^{nR_X}, v^{nR_Y} を受信した復号器は、 $X^n \in \{x^n: Ax^n = u^{nR_X}\}, Y^n \in \{y^n: By^n = v^{nR_Y}\}$ であることが分かる。ここから (X^n, Y^n) を再生するために、典型集合復号を行う。すなわち、 $(\hat{x}^n, \hat{y}^n) \in \mathcal{T}_{X,Y,\varepsilon}^n, A\hat{x}^n = u^{nR_X}, B\hat{y}^n = v^{nR_Y}$ を同時に満たすペア $(\hat{x}^n, \hat{y}^n)$ を求めて再生語とする。ここで、 $\mathcal{T}_{X,Y,\varepsilon}^n$ は式 (10) で定義した同時典型集合である。

ここで、random binning による符号の構成をまとめておく。

X^n の符号器: $\phi_{X,n}(x^n) \equiv Ax^n$.

Y^n の符号器: $\phi_{Y,n}(y^n) \equiv By^n$.

復号器:

$$\psi_n(u^{nR_X}, v^{nR_Y}) \equiv \left[\begin{array}{l} (\hat{x}^n, \hat{y}^n) \in \mathcal{T}_{X,Y,\varepsilon}^n, A\hat{x}^n = u^{nR_X}, B\hat{y}^n = v^{nR_Y} \\ \text{を同時に満たす } (\hat{x}^n, \hat{y}^n) \text{ を再生する.} \\ \text{そのような } (\hat{x}^n, \hat{y}^n) \text{ が存在しない,} \\ \text{あるいは二つ以上存在するときは復号誤りとする.} \end{array} \right]$$

Cover は $\mathcal{X}^n$ の全ての要素をいずれかの箱に独立かつ等確率でランダムに入れてゆくという方法で random binning を構成した。random binning の方法はユニバーサル符号^(注42)の解析の際に用いられた⁽¹⁵⁾。またこの方法は相関のある一般情報源^(注43)への拡張にも利用された^{(16) (18)}。なおこの方法を利用して示された Han の補題⁽¹⁸⁾が、Slepian-Wolf 符号の有有限長解析^(注44)で用いられている^{(49) (50) (54)}。

(注40): 全ての箱の中身が同じ個数になるような表になっているが、ここでは同じ個数にならない場合もある。

(注41): A は線形写像とは限らないが、線形の場合も含めて統一的に結果を述べるために Ax^n と記すことにする。

(注42): 固定されたレート対 (R_X, R_Y) を持つ符号で、式 (4) ~ (6) を満たす任意の (X, Y) で誤り確率が 0 に収束するもの。

(注43): 確率分布の定常性や独立性を一切仮定しない情報源。

(注44): n が比較的小さいときに、レートの限界にどこまで近い符号長を達成できるかを求めること。

(注39): ターボ符号を線形符号とみなすことができることは文献(20)で言及されている。また LDPC 符号は Gallager が提案したものが 1990 年代に再発見された⁽²⁰⁾。

これで Slepian-Wolf の順定理が証明できることは、Csiszár⁽¹⁴⁾による線形写像を用いた方法を説明した後に述べたい。

4.2 線形写像による Random Binning

Cover の random binning は、 $\mathcal{X}^n$ から $\{0, 1\}^{nR_X}$ への全ての写像の集合から一つの写像を等確率でランダムに選択することに対応する。Csiszár⁽¹⁴⁾は線形写像全体から一つの写像を等確率でランダムに一つ選択することを考えた。そして、線形写像による定常無記憶情報源に対する固定長ユニバーサル符号の存在を証明した。

今、説明を簡単にするために、 $\mathcal{X} \equiv \{0, 1\}$ として、 $\{0, 1\}^n$ から $\{0, 1\}^{nR_X}$ への線形写像を考える^(注45)。これは、 $nR_X \times n$ 行列で表現できるので、表 3 のようなテーブルを共有する代わりに、 $n^2 R_X$ 個の 0, 1 で表現された行列を共有するだけで十分となる。また符号化の計算複雑度も $O(n^2)$ にできる。

箱 (bin) と対応する符号語は、系列に行列を作用させた値 (シンドローム) と対応する。すなわち、系列は行列とシンドロームより定まる箱 (コセット) のいずれかに収納されていると解釈できる。実は、表 3 は

$$A \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を用いて Ax^n によって x^n を入れる箱 (符号語) を決定したときのテーブルと一致していた。典型集合復号を採用することにより、関数 A, B が線形性を持つこと以外は前節で説明した構成と全く同じにすることもできるが、ここでは最ゆう復号を用いた符号の構成を与えておく^(注46)。

X^n の符号器: $\phi_{X,n}(x^n) \equiv Ax^n$ 。

Y^n の符号器: $\phi_{Y,n}(y^n) \equiv By^n$ 。

復号器: $\psi_n(u^{nR_X}, v^{nR_Y}) \equiv \arg \max_{\substack{(\hat{x}^n, \hat{y}^n): \\ A\hat{x}^n = u^{nR_X} \\ B\hat{y}^n = v^{nR_Y}}} p_{XY}(\hat{x}^n, \hat{y}^n)$ 。

Csiszár⁽¹⁴⁾は写像を有限体上の線形写像全体から選択していたが、行列として疎行列 (LDPC 行列) を用いてもレート領域内の全てのレート対で Slepian-Wolf 符号を構成できることが示されている^{(36) (47)}。また LDPC 行列を用いた Slepian-Wolf 符号の統計力学的な解析が文献 (26) によってなされている。疎行列を用いることにより、符号化の計算複雑度を $O(tn)$ (t は行列の行重み) にすることができる。また一般の線形写像では典型集合復号や最ゆう復号が困難であるが、疎行列と確率伝搬法 (Belief-Propagation, Sum-Product アルゴリズム)^{(21) (22)}を組み合わせることにより、復号にかかる計算複雑度を小さくす

ることができる。実は確率伝搬法が典型集合復号や最ゆう復号そのものを実現しているわけではない^(注47)のだが、数値実験では情報源が定常無記憶の場合に良い復号性能が確認されている。なお、確率伝搬法は情報源が無記憶の場合でないと良い性能を発揮できそうにない^(注48)。一方で、疎行列による符号化と最ゆう復号は一般の情報源に対しても良い Slepian-Wolf 符号になることが証明されている^{(36) (47)}ので、記憶のある情報源でも良い復号法を見付けることが今後の課題であろう。最後に、有限体上の線形写像を用いる代わりに、実数体上の線形写像と量子化写像を用いて Slepian-Wolf 符号を構成する試みがある⁽⁴¹⁾ことを紹介しておく。

4.3 ハッシュ性

ここから、Cover と Csiszár による random binning を用いた順定理の証明を解説する。彼らの証明では明示的には導入されなかったのだが、いずれの証明でもアンサンプルのハッシュ性と呼ばれる性質が成り立つことを用いていた。

アンサンプルは、関数族 (関数の集合) $\mathcal{A}_n$ と $\mathcal{A}_n$ 上の確率分布 p_A の対 $(\mathcal{A}_n, p_A)$ で与えられる。Cover の場合には $\mathcal{A}_n$ は $\mathcal{X}^n$ から $\{0, 1\}^{nR_X}$ への関数全体、Csiszár の場合には $\mathcal{A}_n$ は $\{0, 1\}^n$ から $\{0, 1\}^{nR_X}$ への線形写像全体であり、 p_A はともに $\mathcal{A}_n$ 上の一様分布である。アンサンプルのハッシュ性とは、任意の $x^n \neq \hat{x}^n$ に対して以下の不等式を満たすことである。

$$p_A(\{A : Ax^n = A\hat{x}^n\}) \leq \frac{1}{|\text{Im}\mathcal{A}_n|} \quad (11)$$

ここで、 $|\text{Im}\mathcal{A}_n|$ は関数 A の値域の大きさを表す。Cover と Csiszár のアンサンプルがこの性質を持つ^(注49)ことは容易に確認できる。Cartar-Wegman はこの条件を満たす関数族^(注50)を 2-ユニヴァーサルハッシュ関数族と呼んで明示的に導入した⁽¹⁰⁾。これはメッセージ認証や秘密増幅などのセキュリティ分野や計算アルゴリズムにおいて重要な概念となっている。また文献 (31) (39)ではこのハッシュ関数族と単一の情報源符号化問題 (図 2) との関係が議論されている。なお、疎行列 (LDPC 行列) のアンサンプルは (11) を満たすとは限らないので、文献 (46) (47)では、疎行列のアンサンプルを含むようにハッシュ性の概念が拡張されている^(注51)。

順定理の証明には、ハッシュ性という概念から導かれる衝突回避原理⁽⁴⁶⁾という性質が重要である。ハッシュ関数は、関数の値をでたために決定するものであるが、条件 (11) を見ると、衝突確率、すなわち異なる二つの系列 $x^n, \hat{x}^n$ が同じ箱に入る確率が、小さくなるように設定されている。この「衝突を避ける」という性質から次の補題が証明できる。

補題 3. $(\mathcal{A}_n, p_A)$ が (11) を満たせば、与えられた $\mathcal{X}^n$ の部分集合 $\mathcal{G}_n$ に対して

(注 45): $\mathcal{X}$ 及び符号語のアルファベット $\{0, 1\}$ が同一の有限体 (要素数 > 2) になるように拡張することは容易である。

(注 46): Csiszár の論文⁽¹⁴⁾では、 α -復号器というものを導入していた。これは、最ゆう復号や確率分布を既知とすることを仮定しない最大エントロピー復号 (系列の経験分布より定まるエントロピーの最大化によって再生語を求める復号法) を含む概念である。

(注 47): 小さな n では、線形計画復号法を用いた最ゆう復号法⁽³³⁾が有効である。

(注 48): 対応するファクターグラフが多くのループを持ってしまうため。

(注 49): 等号が成立している。

(注 50): 一様分布で関数を選択することを暗に仮定する。

(注 51): この拡張は、文献 (25) (32) が導出していた式を一般化して明示したものである。

図 8 衝突回避原理 注目する $\mathcal{G}$ の要素のみを点で表すが、実際は $\mathcal{X}^n$ の要素の全てがどこかの箱に入っている (a) では、点の数が箱の数より少ないので、異なる箱に入れることができる (b) では、点の数が箱の数より多いので、衝突が避けられない。

$$E_A \left[p_X \left(\left\{ \begin{array}{l} x^n \in \mathcal{G}_n \text{ and} \\ x^n : \exists \hat{x}^n \in \mathcal{G}_n \text{ s.t.} \\ x^n \neq \hat{x}^n, Ax^n = A\hat{x}^n \end{array} \right\} \right) \right] \leq \frac{|\mathcal{G}_n|}{|\text{Im}\mathcal{A}_n|}$$

を満たす。ここで E_A は p_A に関する平均を表す。

この補題より、 $\mathcal{X}^n$ の部分集合 $\mathcal{G}_n$ に対して、 $\frac{|\mathcal{G}_n|}{|\text{Im}\mathcal{A}_n|} \rightarrow 0$ となるように $|\text{Im}\mathcal{A}_n|$ をとれば^(注52)、十分大きな n と集合 $\mathcal{G}_n$ に対して、 $\mathcal{G}_n$ の要素を 1 に近い確率で違う箱に割り当てられるような関数 $A \in \mathcal{A}_n$ が存在することになる (図 8)。なぜなら、左辺は失敗する確率 ($\mathcal{G}_n$ の要素が同じ箱に割り当てられてしまう確率) のランダムな A の選択に関する平均を表すので、失敗する確率が $\frac{|\mathcal{G}_n|}{|\text{Im}\mathcal{A}_n|}$ 以下になる (つまり確率は 0 に収束する) ような A が必ず存在することになる^(注53)からだ。これは、「衝突を避ける」ように関数 A が選択されるという性質から、図 8(a) のような関数を自然に選択する仕組みがハッシュ性に備わっているということにほかならない。

この補題は次のように示すことができる。

$$\begin{aligned} & E_A \left[p_X \left(\left\{ \begin{array}{l} x^n \in \mathcal{G}_n \text{ and} \\ x^n : \exists \hat{x}^n \in \mathcal{G}_n \text{ s.t.} \\ x^n \neq \hat{x}^n, Ax^n = A\hat{x}^n \end{array} \right\} \right) \right] \\ &= \sum_{x^n \in \mathcal{G}_n} p_X(x^n) p_A \left(\left\{ A : \begin{array}{l} \exists \hat{x}^n \in \mathcal{G}_n \text{ s.t.} \\ x^n \neq \hat{x}^n, Ax^n = A\hat{x}^n \end{array} \right\} \right) \\ &\leq \sum_{x^n \in \mathcal{G}_n} p_X(x^n) \sum_{\hat{x}^n \in \mathcal{G}_n \setminus \{x^n\}} p_A(\{A : Ax^n = A\hat{x}^n\}) \\ &\leq \frac{|\mathcal{G}_n|}{|\text{Im}\mathcal{A}_n|} \end{aligned}$$

なお、上記式変形で等式は足し算の順序の交換、最初の不等式では union bound と呼ばれる評価を、その次の不等式では式 (11) を用いている。

冒頭で述べたとおり、Cover や Csiszár はハッシュ性を意識せずに式 (11) と補題 3 を経由して順定理を証明している。式 (11) と補題 3 にハッシュ性という意味付けをしなければ彼らの

(注52): すなわち、 $\mathcal{G}_n$ (注目する点) の要素数はシンドローム (箱のインデックス) の数に比べて圧倒的に小さくなる。

(注53): ランダムに関数を構成して平均を評価することにより、平均値以下を達成する関数の存在を保証する論法はランダム符号化論法と呼ばれ、Shannon は 3.1 で紹介した通信路符号化の順定理の証明においてこの論法を使った。

証明はもっと短く書けるだろう。しかしながら、ハッシュ性を經由することにより、彼らの証明を本質から統一的に論ずることができることと、もしも将来新たなアンサンブルが与えられたときでも、そのハッシュ性を確認するだけで順定理が自動的に証明されることを強調しておきたい。

4.4 Random Binning による順定理の証明

ここでは、 $nR_X \times n$ 行列のアンサンブル $(\mathcal{A}_n, p_A)$ と $nR_Y \times n$ 行列のアンサンブル $(\mathcal{B}_n, p_B)$ が共にハッシュ性を持つことを仮定して、補題 3 を用いた順定理の証明を解説する。

$\mathcal{T}_{XY,\varepsilon}^n$ を式 (10) で定義した同時典型集合とする。このとき、復号誤り確率は次の四つの事象の確率の和で上から押えることができる。

- (i) $(X^n, Y^n) \notin \mathcal{T}_{XY,\varepsilon}^n$.
- (ii) $(X^n, Y^n) \in \mathcal{T}_{XY,\varepsilon}^n$ であり、かつ $\hat{x}^n \neq X^n$, $A\hat{x}^n = AX^n$, $p_{XY}(X^n, Y^n) \leq p_{XY}(\hat{x}^n, Y^n)$ を満たす $\hat{x}^n \in \mathcal{X}^n$ が存在する。
- (iii) $(X^n, Y^n) \in \mathcal{T}_{XY,\varepsilon}^n$ であり、かつ $\hat{y}^n \neq Y^n$, $B\hat{y}^n = BY^n$, $p_{XY}(X^n, Y^n) \leq p_{XY}(X^n, \hat{y}^n)$ を満たす $\hat{y}^n \in \mathcal{Y}^n$ が存在する。
- (iv) $(X^n, Y^n) \in \mathcal{T}_{XY,\varepsilon}^n$ であり、かつ $\hat{x}^n \neq X^n$, $\hat{y}^n \neq Y^n$, $A\hat{x}^n = AX^n$, $B\hat{y}^n = BY^n$, $p_{XY}(X^n, Y^n) \leq p_{XY}(\hat{x}^n, \hat{y}^n)$ を満たす $(\hat{x}^n, \hat{y}^n) \in \mathcal{X}^n \times \mathcal{Y}^n$ が存在する。

ここで (ii) ~ (iv) は (X^n, Y^n) が典型集合の要素であるのにもかかわらず最ゆう復号が失敗する事象を表している。なお、ここでは最ゆう復号を仮定したが、典型集合復号の場合でも、上記の条件式 (ii) ~ (iv) に現れる不等式をそれぞれ $(\hat{x}^n, Y^n) \in \mathcal{T}_{XY,\varepsilon}^n$, $(X^n, \hat{y}^n) \in \mathcal{T}_{XY,\varepsilon}^n$, $(\hat{x}^n, \hat{y}^n) \in \mathcal{T}_{XY,\varepsilon}^n$ と置き換えることにより同様に証明できる。

最初に事象 (ii) ~ (iv) の確率を評価する。事象 (ii) の確率を評価するために、

$$\mathcal{G}_n(y^n) \equiv \left\{ x^n : p_{X|Y}(x^n|y^n) \geq 2^{-n[H(X|Y)+\varepsilon]} \right\}$$

とする (3) と同様の導出により、 $|\mathcal{G}_n(y^n)| \leq 2^{n[H(X|Y)+\varepsilon]}$ であることが分かる。一方で、 $(X^n, Y^n) \in \mathcal{T}_{XY,\varepsilon}^n$ であることと $(\hat{x}^n, Y^n)$ が満たしている性質 $p_{XY}(\hat{x}^n, Y^n) \geq p_{XY}(X^n, Y^n)$ より、

$$p_{X|Y}(\hat{x}^n|Y^n) \geq p_{X|Y}(X^n|Y^n) \geq 2^{-n[H(X|Y)+\varepsilon]}$$

が成立する。すなわち (X^n, Y^n) と $(\hat{x}^n, Y^n)$ は共に $\mathcal{G}_n(y^n)$ の要素である。したがって、補題 3 の証明と同様にして

$$\begin{aligned} & E_A \left[p_{XY} \left(\left\{ \begin{array}{l} x^n \in \mathcal{G}_n(y^n) \text{ and} \\ (x^n, y^n) : \exists \hat{x}^n \in \mathcal{G}_n(y^n) \text{ s.t.} \\ x^n \neq \hat{x}^n, Ax^n = A\hat{x}^n \end{array} \right\} \right) \right] \\ &\leq \sum_{y^n \in \mathcal{Y}^n} \frac{p_Y(y^n) |\mathcal{G}_n(y^n)|}{|\text{Im}\mathcal{A}_n|} \\ &\leq 2^{-n[R_X - H(X|Y) - \varepsilon]} \end{aligned}$$

が示される．ここで，最後の不等式では $|\mathcal{G}_n(y^n)|$ の評価と $|\text{Im}\mathcal{A}_n| = 2^{nR_X}$ であることを用いた．事象 (iii) の確率についても

$$\mathcal{G}_n(x^n) \equiv \left\{ y^n : p_{Y|X}(y^n|x^n) \geq 2^{-n[H(Y|X)+\varepsilon]} \right\}$$

を考えれば，同様にして

$$E_B \left[p_{XY} \left(\left\{ \begin{array}{l} y^n \in \mathcal{G}_n(x^n) \text{ and} \\ (x^n, y^n) : \exists \hat{y}^n \in \mathcal{G}_n(x^n) \text{ s.t.} \\ y^n \neq \hat{y}^n, B y^n = B \hat{y}^n \end{array} \right\} \right) \right] \leq 2^{-n[R_Y - H(Y|X) - \varepsilon]}$$

を得る．事象 (iv) の確率についても集合

$$\mathcal{G}_n \equiv \left\{ (x^n, y^n) : p_{XY}(x^n, y^n) \geq 2^{-n[H(X,Y)+\varepsilon]} \right\}$$

を考えれば，同様にして

$$E_{AB} \left[p_{XY} \left(\left\{ \begin{array}{l} (x^n, y^n) \in \mathcal{G}_n \text{ and} \\ \exists (\hat{x}^n, \hat{y}^n) \in \mathcal{G}_n \text{ s.t.} \\ x^n \neq \hat{x}^n, A x^n = A \hat{x}^n \\ y^n \neq \hat{y}^n, B y^n = B \hat{y}^n \end{array} \right\} \right) \right] \leq 2^{-n[R_X + R_Y - H(X,Y) - \varepsilon]}$$

を得る．以上のことから，ランダム符号化論法により，任意の n である関数 A, B が存在して，復号誤り確率が

$$\begin{aligned} & \text{Prob}((X^n, Y^n) \notin \mathcal{T}_{XY, \varepsilon}^n) + 2^{-n[R_X - H(X|Y) - \varepsilon]} \\ & + 2^{-n[R_Y - H(Y|X) - \varepsilon]} + 2^{-n[R_X + R_Y - H(X,Y) - \varepsilon]} \end{aligned}$$

以下になっている．ここで，補題 1 と同様に $n \rightarrow \infty$ とともに $\text{Prob}((X^n, Y^n) \in \mathcal{T}_{XY, \varepsilon}^n) \rightarrow 1$ となるので，初項の事象 (i) の確率は 0 に収束する．一方で，条件 (4) ~ (6) を満たしていれば適切な $\varepsilon > 0$ をとることにより第 2~4 項が 0 に収束することが分かる．以上より，条件 (4) ~ (6) を満たすレート対 (R_X, R_Y) を持ち，復号誤り確率が 0 に収束する符号（関数 A, B の列）の存在が証明された．

4.5 Wyner の証明と Csiszár の証明についての補足

Wyner は差分 $Z^n \equiv Y^n - X^n$ のシンδροーム AZ^n が Y^n のシンδροーム AY^n と X^n 符号語となるシンδροーム AX^n から得られることを利用して， $(H(X|Y), H(Y))$ 付近のレートを達成する符号を構成した．Wyner はコセット符号を用いたので， $AX^n \neq 0^{nR_X}$ の場合にも復号誤り確率が 0 になることは自明ではないと思うのであるが， $AX^n \neq 0^{nR_X}$ の場合にも復号誤り確率が 0 に収束するということを証明抜きで主張している．恐らく Wyner はこの主張を示すために，通信路の対称性より全てのコセット符号が同じ誤り確率を持つこと^(注54)を用い

(注54)：この事実は文献(4)で示されている．

たと思われる．

一方で Csiszár の証明を一つの情報源という特殊な場合（図 2）に適用することにより，任意の情報源 Z^n のシンδροーム AZ^n から Z^n が 0 に近い復号誤り確率で復号できるような行列 A の存在を示すことができる^(注55)．そして $Z^n \equiv Y^n - X^n$ と置くことにより Wyner の主張を得る．なお，Csiszár の証明では通信路の概念は登場しない．実は補題 2 も Csiszár の方針で証明することができるが，Elias⁽²⁾の証明にはこのことが明示的に現れていない．

5. Slepian-Wolf 符号から通信路符号へ

前章の最後で説明したように，Csiszár⁽¹⁴⁾によって，Wyner⁽⁷⁾によるパリティ検査行列の方法と random binning の方法が結び付いた．ここで，Csiszár の証明は Wyner の証明とは異なり，一般の（非対称な）相関を有する情報源に対して成立することを強調しておきたい．この事実は，通信路の対称性を仮定して証明されていたパリティ検査行列による通信路符号（図 5）の存在定理（補題 2）を，対称性を仮定せずに証明できる可能性を示唆している．この章では Slepian-Wolf の定理から少し脱線して，対称性を仮定しない一般の通信路に対する符号を，パリティ検査行列による Slepian-Wolf 符号（図 6 の補助情報を伴う情報源符号）から構成してみたい．

パリティ検査行列による Slepian-Wolf 符号から通信路符号を構成する方法は典型集合を用いる方法⁽³⁶⁾と二つのパリティ検査行列を用いる方法⁽⁴⁴⁾⁽⁴⁶⁾⁽⁵³⁾があるが，ここでは，直観的な証明が容易な典型集合を用いた方法を紹介する．

X^n, Y^n をそれぞれ対称性を仮定しない一般の定常無記憶通信路^(注56)の入力，出力とする．そして以下では (X^n, Y^n) を相関のある情報源とみなす．循環論法を避けるために，ハッシュ性を持つアンサンブル $(\mathcal{A}_n, p_A)$ の存在だけを仮定する^(注57)．あらかじめ，関数 $A \in \mathcal{A}_n$ とベクトル $c^{nr} \in \text{Im}\mathcal{A}_n$ (r は後で定める) を符号器と復号器で共有しておく．メッセージの集合を $\{0, 1\}^{nR}$ (R は後で決まる) として，全単射 $f_A(\cdot|c^{nr}) : \{0, 1\}^{nR} \rightarrow \mathcal{T}_{X, \varepsilon}^n \cap \mathcal{C}_A(c^{nr})$ を用意し，これも符号器と復号器で共有しておく．ここで， $\mathcal{T}_{X, \varepsilon}^n$ は式(2)で定義した典型集合， $\mathcal{C}_A(c^{nr})$ は c^{nr} より定まるコセット $\mathcal{C}_A(c^{nr}) \equiv \{x^n : Ax^n = c^{nr}\}$ である．

通信路符号は以下のような構成になる（図 9）．ここで， g_A はシンδροーム c^{nr} と補助情報 Y^n から X^n を再生する Slepian-Wolf 復号器（最よう復号器）である．すなわち， g_A は以下で定義される．

$$g_A(c^{nr}|y^n) \equiv \arg \max_{\hat{x}^n : A\hat{x}^n = c^{nr}} p_{XY}(\hat{x}^n, y^n)$$

- 符号器はメッセージ $M^{nR} \in \{0, 1\}^{nR}$ に対して，全単射 $f_A(\cdot|c^{nr})$ を用いて符号語 X^n を求める．符号器は以下のよう

(注55)：これは定理 1 の符号が線形写像の符号器と最よう復号器で構成できることを意味する．

(注56)：定常無記憶性を仮定しない一般の通信路の場合は文献(53)で扱われている．

(注57)：関数の線形性を仮定する必要はないが，以後，シンδροームやコセットなど，線形符号の用語を用いて説明する．

になる．

$$\phi_n(m^{nR}) \equiv f_A(m^{nR}|c^{nr})$$

• 復号器は g_A を用いて $\hat{X}^n$ を再生し^(注58)， $f_A(\cdot|c^{nr})$ の逆写像 $f_A^{-1}(\cdot|c^{nr})$ を用いてメッセージ $\hat{M}^{nR} \equiv f_A^{-1}(\hat{X}^n|c^{nr})$ を再生する．復号器は以下ようになる．

$$\psi_n(y^n) \equiv f_A^{-1}\left(\arg \max_{\hat{x}^n: A\hat{x}^n=c^{nr}} p_{XY}(\hat{x}^n, y^n) \middle| c^{nr}\right)$$

4.4 にある証明から， $(X^n, Y^n) \in \mathcal{T}_{XY, \varepsilon}^n$ であり，かつ $r = H(X|Y) + \varepsilon$ を満たしていれば， $\hat{X}^n \neq X^n$ となる確率が 0 に収束するような関数 A の存在を示すことができる^(注59)．したがって， $f_A(\cdot|c^{nr})$ が全単射であることから， $M^{nR} \neq \hat{M}^{nR}$ となる復号誤り確率は 0 に近いはずである．以上の議論は c^{nr} がどんな値であっても成立することを注意しておく．

さて，このように構成した符号でメッセージ集合 $\{0, 1\}^{nR}$ の要素数をどのくらいまで大きくできるであろうか？ $f_A(\cdot|c^{nr})$ が全単射であることから， $|\{0, 1\}^{nR}| = |\mathcal{T}_{X, \varepsilon}^n \cap \mathcal{C}_A(c^{nr})|$ を満たしている．一方で，

$$\begin{aligned} \max_{c^{nr} \in \text{Im } \mathcal{A}_n} |\mathcal{T}_{X, \varepsilon}^n \cap \mathcal{C}_A(c^{nr})| &\geq \sum_{c^{nr} \in \text{Im } \mathcal{A}_n} \frac{|\mathcal{T}_{X, \varepsilon}^n \cap \mathcal{C}_A(c^{nr})|}{|\text{Im } \mathcal{A}_n|} \\ &= \frac{|\mathcal{T}_{X, \varepsilon}^n|}{|\text{Im } \mathcal{A}_n|} \\ &\geq \frac{2^{n[H(X) - \varepsilon]}}{2^{n[H(X|Y) + \varepsilon]}} \\ &= 2^{n[H(X) - H(X|Y) - 2\varepsilon]} \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，最初の等式ではコセットが $\mathcal{X}^n$ を互いに素な集合に分割していることを，二番目の不等式では典型集合の大きさの評価式 $|\mathcal{T}_{X, \varepsilon}^n| \geq 2^{n[H(X) - \varepsilon]}$ と関係式 $r = H(X|Y) + \varepsilon$ を用いた．したがって，

$$|\{0, 1\}^{nR}| = |\mathcal{T}_{X, \varepsilon}^n \cap \mathcal{C}_A(c^{nr})| \geq 2^{n[H(X) - H(X|Y) - 2\varepsilon]}$$

を満たす $c^{nr} \in \text{Im } \mathcal{A}_n$ を選ぶことにより符号化レートを $[H(X) - H(X|Y) - 2\varepsilon]$ 以上にできることが分かった．通信路容量 $\max_X [H(X) - H(X|Y)]$ を達成する X をとり， $n \rightarrow \infty$ ， $\varepsilon \rightarrow 0$ とすることにより，Slepian-Wolf 復号器を用いて構成した通信路符号で通信路容量を達成できることが分かる．

ここで，提案した通信路符号と通常の線形符号の違いを補足しておく．通常の線形符号（コセット符号）では $\mathcal{C}_A(c^{nr})$ を符号語集合としていた． X が等確率分布を持てば， $\mathcal{C}_A(c^{nr})$ の全てが典型系列（ $\mathcal{T}_{X, \varepsilon}^n$ の要素）となり，復号誤り確率は 0 に収束する．そして二元対称通信路では X が等確率分布を持つときに通信路容量を達成するので，通常の線形符号により通信路容量 $[1 - H(X|Y)]$ を達成できた．このように線形符号は X が等確率分布を持つように設計されているはずなので，通信路容量 $\max_X [H(X) - H(X|Y)]$ を達成する X が等確率分布を持たないときは最適であるとは限らない．一方で，提案した通信路符号では符号語集合を $\mathcal{T}_{X, \varepsilon}^n \cap \mathcal{C}_A(c^{nr})$ に制限することにより，

図 9 通信路符号の構成

入力系列が全て典型系列になるように工夫されている．これによって， X が等確率分布を持たないときに通信路容量を達成する場合でも，符号化レートが通信路容量を達成しながら，同時に復号誤り確率が 0 に収束することを保証することができた．

なお，提案した方法は通常の線形符号と異なり，符号器はもはや線形写像にはならない可能性がある．したがって，提案方法では全単射 $f_A(\cdot|c^{nr})$ を用意するのが困難かも知れない．この欠点を補うために，疎行列と確率伝搬法を利用した実装方法が文献(53)で提案されている．また，提案方法にある最ゆう復号も計算が困難であるが，これも疎行列と確率伝搬法を用いた復号と置き換えて実装すれば実行可能となり，それでも良い性能が得られることが期待される．確率伝搬法を用いた構成の理論解析については今後の課題である．

このように，Slepian-Wolf 符号と通信路符号には双対性^(注60)があることが分かった．ここで， X と Y が対称通信路の入出力となっているような相関を有する場合において，Slepian-Wolf 符号と通信路符号の双対性が文献(38) (45)で考察されていることを紹介しておく．

6. 明示的な符号の構成

以上の証明では，ランダム（非決定的）に符号を構成してその中に良い符号の存在を示すというランダム符号化論法を用いていた．一方で，決定的に構成された Slepian-Wolf 符号を与えているものとして文献(24) (34) (35)がある．これらの論文では，長さ N のブロックを複数の小さなサブブロックに分割してそれぞれを異なる符号を用いて符号化することにより，全体のブロックの復号シンボル誤り率^(注61)が 0 に近い符号を構成している．文献(24)は代数的符号のクラスを用いており，文献(34) (35)ではそれぞれ Cover の random binning と Csiszár の線形写像による random binning を用いている^(注62)．サブブロックの大きさを $n \equiv O(\log N)$ とすることにより，それぞれのサブブロックの復号時間を $O(N)$ にできる．トータルの復号時間は

(注60)：一方の符号があれば他方の符号が構成できることを指す．

(注61)： x^N の中で復号誤りとなったシンボルの個数を N で割った値．

(注62)：文献(24)ではサブブロックの符号の更新順序は固定されているが，文献(34) (35)では情報源出力のランダムネスを利用して符号の更新を行っている．

(注58)： $AX^n = c^{nr}$ を満たしていることに注意

(注59)：図 6 の設定を考えながら 4.4 にある事象 (ii) の評価を確認してほしい．

$O(N^2/\log N)$ になる．ここで，

$$\begin{aligned} [\text{シンボル誤り率}] &\leq \frac{1}{N} \cdot [\text{サブブロックの個数}] \\ &\quad \cdot [\text{復号に失敗するサブブロックの割合}] \\ &\quad \cdot [\text{サブブロックの長さ}] \\ &= [\text{復号に失敗するサブブロックの割合}] \end{aligned}$$

から，シンボル誤り率はサブブロックの復号に失敗する割合以下になる．サブブロックの復号に失敗する割合とは，長さ n のブロックの復号誤り確率にほかならない．そして，ランダム符号化論法と同じ評価により，ブロック長 n の符号の選択に関する平均復号誤り確率は $n \rightarrow \infty$ とともに 0 に収束することが分かる．これより，シンボル誤り率も 0 に収束する．

文献 (24) (34) では更に，シンボル誤りを訂正するための冗長な情報をほんの少し付加する（冗長部分の符号化レートは 0）ことにより，長さ N のブロックの誤り率を 0 に近づける符号を構成している．なお，この補正のために必要な復号計算複雑度は N の多項式オーダーである．最後に，復号シンボル誤り率が 0 に近い符号を構成したものとして文献 (29) を紹介しておく．

7. おわりに

くしくも Slepian-Wolf の定理の発表からちょうど 40 年^(注63)である．実装不可能とされていたのか，それともニーズがないとみなされていたのか，実装に関する研究の多くは今世紀に入ってからであった．これには 1990 年代のターボ符号の発明や LDPC 符号の再発見など，通信路容量を達成する符号の開発が進んだことが影響したのは間違いないだろう．また，動画像やセンサネットワークなど，Slepian-Wolf 符号が適用できそうな情報源が身近になったことも実装研究が進んだ理由の一つだろう．

一方で，Slepian-Wolf の定理は理論面において様々なバリエーションを生んだ．Slepian-Wolf の定理から発展した（復号時に生じるひずみを許す符号化を含む）多端子情報源符号化のバリエーションについては文献 (11) (13) (40) が詳しい．

Slepian と Wolf による最初の発想は Shannon の二つの符号化定理⁽¹⁾を応用した大変素朴なものであった．今では Cover による単純明解な証明があるので，彼らの証明が取り上げられることは滅多にないかもしれない．しかしながら，素朴なアイデアから出た結論は当時の研究者たちを驚かせたに違いない^(注64)，その驚きを少しでも感じとって頂ければ本望である．Shannon の最初の論文がそうであったように，素朴なアイデアから意外な結論を導くというのが情報理論の面白さの一つかなと小生は考えている．例えば 5. で紹介した考え方を応用すれば，情報理論のあらゆる順定理が証明できそうである^{(46)-(48) (52) (53)}．これが真実なら Slepian-Wolf の定理は情報理論の基本原則であるといえるのではないだろうか．また何かの折に，このことについてお話しする機会があればと申し上げて，本稿のおわりとさせていただきます．

(注63)：本稿の執筆時．

(注64)：文献 (12) でも言及されているが，Shannon の最初の論文⁽¹⁾から Slepian-Wolf の論文⁽⁵⁾の間に 25 年もたっていることが驚きである．

謝辞 本稿は，2013 年 3 月に岐阜大学で行われた電子情報通信学会総合大会において，故 J. K. Wolf 先生を追悼するチュートリアル講演でお話した内容を基にしました．チュートリアル講演でお世話になった岐阜大学の鎌部浩先生，本誌編集委員としてお世話になった電気通信大学の八木秀樹先生，東京大学の國廣昇先生に感謝申し上げます．また，執筆にあたり情報を頂いた，電気通信大学の森田啓義先生，東京工業大学の植松友彦先生，Princeton 大学の S. Verdú 先生，NTT 未来ねっと研究所の仲地孝之主任研究員に感謝申し上げます．最後に，本稿の原稿を丁寧に読んで頂き，様々な助言をして頂いた読者お二人の先生方，福井大学の岩田賢一先生，NTT 未来ねっと研究所の三宅茂樹主任研究員，NTT コミュニケーション科学基礎研究所の新井賢一主任研究員に感謝申し上げます．

文 献

- (1) C. E. Shannon, "A mathematical theory of communication," Bell Syst. Tech. J., vol. 27, pp. 379–423, 623–656, 1948.
- (2) P. Elias, "Coding for noisy channels," IRE Convention Record, Part 4, pp. 37–46, 1955.
- (3) R. G. Gallager, "Low density parity check codes," IRE Trans. Inform. Theory, vol. IT-8, pp. 21–28, Jan. 1962.
- (4) R. G. Gallager, Information Theory and Reliable Communication, John Wiley & Sons, Inc., 1968.
- (5) D. Slepian and J. K. Wolf, "Noiseless coding of correlated information sources," IEEE Trans. Inf. Theory, vol. IT-19, no. 4, pp. 471–480, July 1973.
- (6) D. Slepian and J. K. Wolf, "A coding theorem for multiple access channels with correlated sources," Bell Syst. Tech. J., vol. 52, no. 7, pp. 1037–1076, Sept. 1973.
- (7) A. D. Wyner, "Recent results in the Shannon theory," IEEE Trans. Inf. Theory, vol. IT-20, no. 1, pp. 2–10, Jan. 1974.
- (8) T. M. Cover, "A proof of the data compression theorem of Slepian and Wolf for ergodic sources," IEEE Trans. Inf. Theory, vol. IT-21, no. 2, pp. 226–228, March 1975.
- (9) H. S. Witsenhausen, "The zero-error side information problem and chromatic numbers," IEEE Trans. Inf. Theory, vol. IT-22, pp. 592–593, Sept. 1976.
- (10) J. L. Carter and M. N. Wegman, "Universal classes of hash functions," J. Comput. Syst. Sci., vol. 18, pp. 143–154, 1979.
- (11) 韓 太舜, "多元情報源に対する符号化定理," 数理科学, no. 202, pp. 34–41, April 1980.
- (12) 有本 卓, 確率・情報・エントロピー, 森北出版, 東京, 1980.
- (13) I. Csiszár and J. Körner, Information Theory: Coding Theorems for Discrete Memoryless Systems, Academic Press, 1981. (2nd Ed.: Cambridge University Press, 2011.)
- (14) I. Csiszár, "Linear codes for sources and source networks: Error exponents, universal coding," IEEE Trans. Inf. Theory, vol. IT-28, no. 4, pp. 585–592, July 1982.
- (15) Y. Oohama and T. S. Han, "Universal coding for Slepian-Wolf data compression system and the strong converse theorem," IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 40, no. 6, pp. 1908–1919, Nov. 1994.
- (16) S. Miyake and F. Kanaya, "Coding theorems on correlated general sources," IEICE Trans. Fundamentals, vol. E78-A, no. 9, pp. 1063–1070, Sept. 1995.
- (17) C. Berrou and A. Glavieux, "Near optimum error-correcting coding and decoding: Turbo codes," IEEE Trans. Commun., vol. 44, no. 10, pp. 1261–1271, 1996.
- (18) 韓 太舜, 情報理論における情報スペクトル的方法, 培風館,

1998. (英語版: T. S. Han, Information-Spectrum Methods in Information Theory, Springer, 2003.)
- (19) 情報源符号化—無歪みデータ圧縮, 情報理論とその応用学会(編), 培風館, 1998.
- (20) D. J. C. MacKay, “Good error-correcting codes based on very sparse matrices,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. IT-45, no. 2, pp. 399–431, March 1999.
- (21) S. M. Aji and R. J. McEliece, “The generalized distributive law,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 46, no. 2, pp. 325–343, March 2000.
- (22) F. R. Kschischang, B. J. Frey, and H. A. Loeliger, “Factor graphs and the sum-product algorithm,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 47, no. 2, pp. 498–519, Feb. 2001.
- (23) J. Garcia-Frias and Y. Zhao, “Compression of correlated binary memoryless sources using turbo codes,” *IEEE Commun. Lett.*, vol. 5, no. 10, pp. 417–419, Oct. 2001.
- (24) T. Uyematsu, “An algebraic construction of codes for Slepian-Wolf source networks,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. IT-47, no. 7, pp. 3082–3088, Nov. 2001.
- (25) G. Miller and D. Burshtein, “Bounds on the maximum-likelihood decoding error probability of low-density parity-check codes,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. IT-47, no. 7, pp. 2696–2710, Nov. 2001.
- (26) T. Murayama, “Statistical mechanics of data compression theorem,” *J. Phys. A, Math. Gen.*, vol. 35, L95L100, March 2002.
- (27) A. D. Liveris, Z. Xiong, and C. N. Georgiades, “Compression of binary sources with side information at the decoder using LDPC codes,” *IEEE Commun. Lett.*, vol. 6, no. 10, pp. 440–442, Oct. 2002.
- (28) D. Schonberg, S. S. Pradhan, and K. Ramchandran, “LDPC codes can approach the Slepian Wolf bound for general binary sources,” 40th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing, Allerton House, Monticello, Illinois, Oct. 2002.
- (29) Q. Zhao and M. Effros, “Lossless and near-lossless source coding for multiple access networks,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. IT-49, no. 1, pp. 112–128, Jan. 2003.
- (30) 村松 純, “相関のある情報源の符号化とその応用,” *信学技報*, IT2003-53, pp. 25–30, Dec. 2003.
- (31) D. J. C. MacKay, *Information Theory, Inference, and Learning Algorithms*, Cambridge University Press, 2003.
- (32) A. Bennatan and D. Burshtein, “On the application of LDPC codes to arbitrary discrete-memoryless channels,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. IT-50, no. 3, pp. 417–438, March 2004.
- (33) J. Feldman, M. J. Wainwright, and D. R. Karger, “Using linear programming to decode binary linear codes,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. IT-51, no. 3, pp. 954–972, March 2005.
- (34) J. Muramatsu, “Source coding algorithms using the randomness of a past sequence,” *IEICE Trans. Fundamentals*, vol. E88-A, no. 4, pp. 1063–1083, April 2005.
- (35) J. Muramatsu and T. Mukouchi, “Simulated random coding algorithm for Correlated Sources with Ensemble of Linear Matrices,” *IEICE Trans. Fundamentals*, vol. E88-A, no. 9, pp. 2475–2480, Sept. 2005.
- (36) J. Muramatsu, T. Uyematsu, and T. Wadayama, “Low density parity check matrices for coding of correlated sources,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. IT-51, no. 10, pp. 3645–3653, Oct. 2005.
- (37) J. Muramatsu, “Secret key agreement from correlated source outputs using low density parity check matrices,” *IEICE Trans. Fundamentals*, vol. E89-A, no. 7, pp. 2036–2046, July 2006.
- (38) D.-k. He and E.-h. Yang, “On the duality between Slepian-Wolf coding and channel coding,” *Proc. 2006 IEEE Int. Symp. Inf. Theory*, Seattle, pp. 2546–2550, USA, July 2006.
- (39) H. Koga, “Source coding using families of universal hash functions,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 53, no. 9, pp. 3226–3233, Sept. 2007.
- (40) 大濱靖匡, “多端子情報源符号化の研究と未解決問題,” *IEICE Fundamentals Review*, vol. 2, no. 2, pp. 40–52, Oct. 2008.
- (41) S. Shenvi, B. K. Dey, S. Jaggi, and M. Langberg, “Real ‘Slepian-Wolf codes,’” *Proc. IEEE Int. Symp. Inf. Theory*, pp. 1423–1427, Seoul, Korea, June–July 2009.
- (42) N. Hussami, S. B. Korada, and R. Urbanke, “Performance of polar codes for channel and source coding,” *Proc. 2009 IEEE Int. Symp. Inf. Theory*, pp. 1488–1492, Seoul, Korea, June–July 2009.
- (43) E. Arıkan, “Channel polarization: A method for constructing capacity-achieving codes for symmetric binary-input memoryless channels,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 55, no. 7, pp. 3051–3073, July 2009.
- (44) S. Miyake and J. Muramatsu, “A construction of channel code, JSCC and universal code for Arbitrary Stationary memoryless channels using sparse matrices,” *IEICE Trans. Fundamentals*, vol. E92-A, no. 9, pp. 2333–2344, Sept. 2009.
- (45) J. Chen, D.-k. He, A. Jagmohan, L. A. Lastras-Montaño, and E.-h. Yang, “On the linear codebook-level duality between Slepian-Wolf coding and channel coding,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. IT-55, no. 12, pp. 5575–5590, Dec. 2009.
- (46) J. Muramatsu and S. Miyake, “Hash property and coding theorems for sparse matrices and maximal-likelihood coding,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. IT-56, no. 5, pp. 2143–2167, May 2010. (Corrections: vol. IT-56, no. 9, p. 4762, Sept. 2010, vol. IT-59, no. 10, pp. 6952–6953, Oct. 2013.)
- (47) J. Muramatsu and S. Miyake, “Construction of Slepian-Wolf source code and broadcast channel code based on hash property,” available at [arXiv:1006.5271\[cs.IT\]](https://arxiv.org/abs/1006.5271), 2010.
- (48) J. Muramatsu and S. Miyake, “Construction of multiple access channel codes based on hash property,” available at [arXiv:1006.6719\[cs.IT\]](https://arxiv.org/abs/1006.6719), 2010.
- (49) R. Nomura and T. Matsushima, “An analysis of Slepian-Wolf coding problem based on the asymptotic normality,” *IEICE Trans. Fundamentals*, vol. E94-A, no. 11, pp. 2220–2225, Nov. 2011.
- (50) V. Y.F. Tan and O. Kosut, “The dispersion of Slepian-Wolf coding,” *Proc. 2012 IEEE Int. Symp. Inform. Theory*, pp. 920–924, Boston, USA, July 2012.
- (51) T. M. Cover, J. A. Thomas, *情報理論—基礎と広がり, 共立出版*, 2012. (原著: T. M. Cover and J. A. Thomas, *Elements of Information Theory* 2nd. Ed., John Wiley & Sons, Inc., 2006.)
- (52) J. Muramatsu and S. Miyake, “Construction of codes for wiretap channel and secret key agreement from correlated source outputs based on hash property,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. IT-58, no. 2, pp. 671–692, Feb. 2012.
- (53) J. Muramatsu, “Constructions of codes for general channel and lossy code for general source,” *Proc. Symp. Inform. Theory and its Applicat.*, pp. 184–189, Beppu, Oita, Japan, Dec. 2012.
- (54) R. Nomura and T. S. Han, “Second-order Slepian-Wolf source coding theorems,” *Proc. Symp. Inform. Theory and its Applicat.*, pp. 356–361, Beppu, Oita, Japan, Dec. 2012.
- (55) 仲地孝之, “分散情報源定理とメディア処理への応用,” *信学技報*, vol. IT2012-100, pp. 241–246, March 2013.
- (56) 渡辺 峻, “情報理論的に安全な秘密鍵共有と周辺話題—データ圧縮と乱数生成のコラボレーション,” *IEICE Fundamentals Review*, vol. 7, no. 1, pp. 38–50, July 2013.
- (57) 村松 純, “Slepian-Wolf の定理,” 2013 信学総大, no. AT-3-2, March 2013.

(IT 研究会提案,平成 25 年 9 月 24 日受付
10 月 29 日最終受付)

村松 純 (正員)

1990 名大・理・数学卒. 1992 名大大学院理学研究科数学専攻博士前期課程了. 1992 日本電信電話株式会社入社. 1998 名大大学院人間情報学研究科論文博士 (学術). 情報理論の研究に従事. 平 19 第 63 回本会論文賞受賞.