狭帯域信号の到来方向推定

Direction-of-Arrival Estimation of Narrowband Waves

林 和則 Kazunori HAYASHI

アブストラクト 空間に配置された複数のセンサにおける受信信号を用いて狭帯域信号の到来方向を推定する問題は、アレー信号処理の最も基本的かつ古典的な問題の一つである。本稿では、空間領域の受信信号モデルや MUSIC (Multiple Signal Classification) 法などの到来方向推定の基礎について復習した後、Khatri-Rao (KR) 積拡張アレー処理を用いた MUSIC 法や、圧縮センシングの問題の一つである MMV (Multiple Measurement Vector) 問題を利用した MUSIC 法など、最近の到来方向推定法について概説する。

キーワード アレー信号処理, 到来方向推定, MUSIC 法, Khatri-Rao 積, 擬定常信号, 圧縮センシング, MMV 問題

Abstract Direction-of-Arrival (DOA) estimation of incoming narrowband waves using signals spatially sampled by spatially distributed sensors is one of the fundamental and classical problems of array signal processing. In this article, we review the fundamentals of DOA estimation, including signal modeling and the Multiple Signal Classification (MUSIC) algorithm, and introduce some recent topics, such as the MUSIC algorithm via the Khatri-Rao (KR) product subspace and the MUSIC algorithm using the idea of a multiple measurement vector (MMV) problem in the context of compressed sensing.

Key words Array signal processing, DOA estimation, MUSIC algorithm, Khatri-Rao product, Quasi-stationary signal, Compressed sensing, MMV problem

1. はじめに

空間に配置された複数のセンサで観測される信号を用いて、狭帯域信号の到来方向（到来角）を推定する問題は、雑音が付加された複素正弦波の複数の時間サンプルからその周波数を推定する時間領域の信号処理の問題と等価であり、アレー信号処理の最も基本的かつ古典的な問題の一つである⁽¹⁾。これまでに様々な到来方向推定法が提案されているが⁽²⁾、中でも受信信号の相関行列の固有値分解を利用した部分空間法⁽³⁾に基づく MUSIC (Multiple Signal Classification) 法⁽⁴⁾や ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques) 法⁽⁵⁾はレイリー限界を超える高い推定精度で知られている。

従来の古典的な到来方向推定法では、到来波数がセンサ素子数より少ない場合にしか到来角を推定することができなかったが、近年、Khatri-Rao (KR) 積を用いたアレー拡張処理を用いることで、 N 素子の等間隔直線アレーの場合には $2N - 2$ 個までの到来波を、配置が最適化された N 素子アレーでは最大

$N(N - 1)$ 個の到来波を推定可能な手法が提案された⁽⁶⁾⁻⁽⁸⁾ことから、到来方向推定の研究が再注目されている⁽⁹⁾⁻⁽¹¹⁾。これまでもセンサ素子数以上の到来波の到来角を推定する手法として、拡張相関行列を用いる方法や四次の統計量を用いる方法等が提案されているが、二次の統計量を利用してこれだけの自由度の拡張を実現している手法は筆者の知る限りほかにはない。

一方、劣決定系の文脈では、圧縮センシングに代表されるスパース信号処理が注目されているが⁽¹²⁾、共通の台を持つ複数のスパース信号（ベクトル）に対する複数の線形観測から元の信号を推定する問題、すなわち MMV (Multiple Measurement Vector) 問題は、観測に雑音が含まれない場合の到来方向推定と本質的に同じ問題であり、これに MUSIC 法を応用することで貪欲法や凸緩和などの標準的な圧縮センシングのアルゴリズムに比べて良好な復元精度の保証を与えられることが示されている⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾。到来方向推定はこのような圧縮センシングとの関係からも近年改めて注目されている。

本稿では、空間領域の受信信号モデルや MUSIC 法などの到来方向推定の基礎について簡単に復習した後、KR 積拡張アレー処理を用いた到来方向推定法や、MMV 問題のための MUSIC 法などの到来方向推定に関連する最近の話題について解説する。更に、KR 積拡張アレー処理と、圧縮センシングに基づいた MUSIC 法の両方のアイデアを用いることで、到来波数より少ないフレーム時間（統計的性質が同一とみなせる時間）分の観測によって得られた擬定常の受信信号からセンサ素子数以上の

林 和則 正員 京都大学大学院情報学研究所
E-mail kazunori@i.kyoto-u.ac.jp
Kazunori HAYASHI, Member (Graduate School of Informatics, Kyoto University, Kyoto-shi, 606-8501 Japan).
電子情報通信学会 基礎・境界ソサイエティ
Fundamentals Review Vol.8 No.3 pp.143-150 2015 年 1 月
©電子情報通信学会 2015

到来波の到来方向推定が可能な筆者らのグループの提案法⁽¹⁵⁾を紹介する。

2. 空間領域の信号モデル

アレー信号処理における空間領域の信号モデルについて説明し、そのモデルを時間領域の信号処理におけるそれと比較することで、到来方向推定の問題が、時間領域における付加雑音に埋もれた複素正弦波の周波数推定問題と等価である⁽¹⁾ことを示す。

まず、時間領域の信号処理として、角周波数及び複素振幅がそれぞれ $\omega_0, \dots, \omega_{L-1}$ と $s_0, \dots, s_{L-1}$ である L 個の複素正弦波の重ね合わせから成る信号のサンプル

$$r(n) = \sum_{l=0}^{L-1} s_l e^{j\omega_l n} + v(n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1)$$

を考える。ここで $v(n)$ は白色付加雑音であり、 N ($N > L$) はサンプル数である。 $\omega_0, \dots, \omega_{L-1}$ を確定的な未知のパラメータ、 $s_0, \dots, s_{L-1}$ を確率変数としたときに、 $r(n)$ から $\omega_0, \dots, \omega_{L-1}$ を推定する問題が、時間領域における典型的な複素正弦波の周波数推定問題である。

次に、図1に示すような、 N 個のセンサを直線上に配置したセンサアレーを用いた空間信号処理について考える。各センサは無指向性とし、 L ($L < N$) 個のインコヒーレントな波源からの波がそれぞれ異なる方向 θ_l ($-\pi/2 \leq \theta_l \leq \pi/2$, $l = 0, \dots, L-1$) から到来している（図1では到来角 θ から到来する一波のみを図示している）。ここで、各波源はセンサアレーから遠方に存在し、各到来波は同一の搬送波周波数 f_0 で特徴付けられる狭帯域信号であるものとする^(注1)。この仮定は、到来波がセンサアレー上を伝搬する間にその包絡線が大きく変化せず、センサアレー付近での等位相面が（球面ではなく）平面で近似されることを意味する。このとき、0 番目のセンサと n 番目のセンサにおける l 番目の到来波の受信信号の相違は、付加雑音を除いて、行路差 $d_n \sin \theta_l$ に起因する位相差

$$\phi_l(n) = 2\pi \frac{d_n \sin \theta_l}{\lambda} \quad (2)$$

のみとなる。ここで、 λ は波長であり、波の速度を c として $\lambda = c/f_0$ である。これから、 n 番目のセンサでの時刻 k における受信信号は

$$r(n, k) = \sum_{l=0}^{L-1} s_l(k) e^{j\phi_l(n)} + v(n, k) \quad (3)$$

と表される。ただし、 $s_l(k)$ は l 番目の到来波の時刻 k における 0 番目のセンサでの複素振幅であり、 $v(n, k)$ は時空間的に白色な付加雑音である。

センサが等間隔 d で配置されている場合、

$$\phi_l = 2\pi \frac{d \sin \theta_l}{\lambda} \quad (4)$$

と定義すると $\phi_l(n) = \phi_l n$ となることから、(3) は

(注1): 広帯域信号を対象にした到来方向推定の研究も多く行われている。興味のある読者は、例えば文献(16)などを参照されたい。

図1 直線センサアレー

$$r(n, k) = \sum_{l=0}^{L-1} s_l(k) e^{j\phi_l n} + v(n, k) \quad (5)$$

となる。ここで、(1) と (5) を比較すると、時系列 $r(n)$, $n = 0, \dots, N-1$ から周波数 ω_l を推定する問題と、空間軸の系列 $r(n, k)$, $n = 0, \dots, N-1$ から ϕ_l を推定する問題は本質的に同じであることが分かる。 ϕ_l から到来角 θ_l を求めるために ϕ_l と θ_l が一対一対応である必要があるが、 $-\pi/2 \leq \theta_l \leq \pi/2$ から ϕ_l は区間 $(-2\pi d/\lambda, 2\pi d/\lambda)$ 内に存在することから、センサ間隔 d を $\lambda/2$ 以下に設定することで ϕ_l から θ_l をユニークに決定できる。このことは、時間領域での信号処理におけるサンプリング定理、すなわちサンプリング周期を T としたとき、サンプリング前のアナログ信号が角周波数 $(-\pi/T, \pi/T)$ に帯域制限されていれば元の信号が復元できることに対応している。

3. 古典的な到来方向推定法

ここでは、代表的な到来方向推定法として MUSIC 法について簡単に説明する。アルゴリズムの詳細やその他の古典的な到来方向推定アルゴリズムについては、文献(2)(17)などの名著を参照されたい。また、MUSIC 法の特長については、文献(18)が詳しい。

ステアリングベクトル

$$\mathbf{a}(\theta) = \left[e^{j2\pi \frac{d_0 \sin \theta}{\lambda}}, e^{j2\pi \frac{d_1 \sin \theta}{\lambda}}, \dots, e^{j2\pi \frac{d_{N-1} \sin \theta}{\lambda}} \right]^T \quad (6)$$

を導入することで、(3) の時刻 k における各センサでの受信信号をまとめたベクトルは

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(k) &= [r(0, k), \dots, r(N-1, k)]^T \\ &= \sum_{l=0}^{L-1} s_l(k) \mathbf{a}(\theta_l) + \mathbf{v}(k) \\ &= \mathbf{A} \mathbf{s}(k) + \mathbf{v}(k) \end{aligned} \quad (7)$$

と書ける。ただし、

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(k) &= [v(0, k), \dots, v(N-1, k)]^T, \\ \mathbf{A} &= [\mathbf{a}(\theta_0), \dots, \mathbf{a}(\theta_{L-1})], \\ \mathbf{s}(k) &= [s_0(k), \dots, s_{L-1}(k)]^T \end{aligned}$$

である。更に、 $\mathbf{r}(k)$ の相関行列は

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= E[\mathbf{r}(k) \mathbf{r}^H(k)] \\ &= \mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{A}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_N \end{aligned} \quad (8)$$

となる．ここで， $\mathbf{s}(k)$ と $\mathbf{v}(k)$ は無相関であり， $E[\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^H(k)] = \sigma^2 \mathbf{I}_N$ ， $\mathbf{D} = E[\mathbf{s}(k)\mathbf{s}^H(k)]$ としている．ただし， $\mathbf{I}_N$ は $N \times N$ の単位行列である．

$\mathbf{R}$ の N 個の固有値をその大きさにより $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{N-1}$ とし， $\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}^H$ の N 個の固有値を同様に $\nu_0 \geq \nu_1 \geq \dots \geq \nu_{N-1}$ とする． $\mathbf{R}$ はエルミート行列なので N 個の互いに直交する固有ベクトルを持ち，固有値 λ_n に対応する正規化固有ベクトルを $\mathbf{q}_n$ とすると

$$\begin{aligned}\lambda_n \mathbf{q}_n &= \mathbf{R}\mathbf{q}_n \\ &= (\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_N)\mathbf{q}_n \\ &= (\nu_n + \sigma^2)\mathbf{q}_n\end{aligned}$$

となる．よって λ_n と ν_n の間には

$$\lambda_n = \nu_n + \sigma^2, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (9)$$

なる関係がある．ここで， L 個の到来波は異なる到来角 θ_l を持つことから，ファンデルモンド行列の性質により， $N \times L$ ($N > L$) の行列 $\mathbf{A}$ はフルランク $\text{rank } \mathbf{A} = L$ となる． $\mathbf{D}$ がフルランク，すなわち $\text{rank } \mathbf{D} = L$ であると仮定すると， $\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}^H$ の固有値は小さい方から $N-L$ 個が全てその値が 0 となる．よって，(9) は更に

$$\lambda_n = \begin{cases} \nu_n + \sigma^2, & n = 0, \dots, L-1 \\ \sigma^2, & n = L, \dots, N-1 \end{cases} \quad (10)$$

となる．実際， $\text{rank } \mathbf{A}^H = L$ より， $\mathbf{A}^H$ のカーネル空間 $\mathcal{N}(\mathbf{A}^H)$ の次元は $N-L$ であり， $\mathbf{q} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^H)$ に対しては $\mathbf{R}\mathbf{q} = \sigma^2 \mathbf{q}$ となる．すなわち， $\mathbf{q}$ は固有値 σ^2 に対応する固有ベクトルであり，このカーネル空間の次元は $N-L$ なので，(10) のように重複度は $N-L$ である．よって， $\mathbf{q}_L, \dots, \mathbf{q}_{N-1}$ は $\mathcal{N}(\mathbf{A}^H)$ の基底であり，

$$\mathbf{q}_n^H \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad n = L, \dots, N-1 \quad (11)$$

となる．ここで， $\mathbf{Q}_S = [\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_{L-1}]$ ， $\mathbf{Q}_N = [\mathbf{q}_L, \dots, \mathbf{q}_{N-1}]$ と定義すると， $\mathcal{R}(\mathbf{Q}_S)$ は信号部分空間， $\mathcal{R}(\mathbf{Q}_N)$ は雑音部分空間と呼ばれる⁽³⁾ ($\mathcal{R}(\cdot)$ は行列の列空間)．これは，(11) より $\mathcal{R}(\mathbf{Q}_N) = \mathcal{N}(\mathbf{A}^H)$ であり，また $\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_{N-1}$ は正規直交基底であることから $\mathcal{R}(\mathbf{Q}_S) = \mathcal{R}(\mathbf{Q}_N)^\perp$ であるが ($^\perp$ は直交補空間を表す)，一般に $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{N}(\mathbf{A}^H)^\perp$ であることから， $\mathcal{R}(\mathbf{Q}_S) = \mathcal{R}(\mathbf{A})$ 及び $\mathcal{R}(\mathbf{Q}_N) = \mathcal{R}(\mathbf{A})^\perp$ が成立するからである．

MUSIC アルゴリズムは，信号の到来角に対応するステアリングベクトルと，相関行列の最小の固有値に対応した固有ベクトルが直交するという性質 ($\mathcal{R}(\mathbf{Q}_N) = \mathcal{R}(\mathbf{A})^\perp$) を利用したアルゴリズムである^(注2)．具体的には， $\mathbf{Q}_N$ を用いて

$$S(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{Q}_N \mathbf{Q}_N^H \mathbf{a}(\theta)} \quad (12)$$

(注2): このような手法は一般に部分空間法 (subspace method) と呼ばれる．到来方向推定以外への応用例としては，既知信号を用いずにインパルス応答を推定するブラインド同定法⁽¹⁹⁾ (20)がある．

で定義される MUSIC スペクトルを計算する．(12) で θ を変化させると，到来波に対応した到来角 $\theta = \theta_l$ ($l = 0, \dots, L-1$) のところで分母が 0 となり，そのグラフに鋭いピークができるため，これにより信号の到来角を推定することが可能となる．ただし，MUSIC 法では雑音部分空間を構成する固有ベクトルが最低一つ必要なため，到来波数がセンサ素子数 N 以上の場合には到来方向推定を行うことができないことに注意する．

MUSIC 法は受信信号ベクトルの相関行列 $\mathbf{R}$ に基づく手法であるが，通常，真の $\mathbf{R}$ は未知であり，十分な数のスナップショット $\mathbf{r}(k)$ を用いた時間平均によるサンプル相関行列で近似される．このため，到来方向に対応する θ_l に対しても (12) の分母は厳密に 0 にはならず，(12) の値が発散する心配はない．ここで，特に雑音のない場合を考えると，受信信号のサンプル相関行列は

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{R}} &= \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{r}(k) \mathbf{r}^H(k) \\ &= \mathbf{A} \left(\frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{s}(k) \mathbf{s}^H(k) \right) \mathbf{A}^H \\ &= \mathbf{A} \hat{\mathbf{D}} \mathbf{A}\end{aligned} \quad (13)$$

で与えられる．ただし， K はサンプル相関行列の計算に用いられるスナップショット数であり，

$$\hat{\mathbf{D}} = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{s}(k) \mathbf{s}^H(k) \quad (14)$$

である．これより， $\hat{\mathbf{D}}$ がフルランクであれば，サンプル相関行列 $\hat{\mathbf{R}}$ の固有値 0 に対応する固有ベクトルは雑音部分空間を張ることが分かる．到来信号がインコヒーレントの場合，スナップショット数 $K \geq L$ ならば $\hat{\mathbf{D}}$ はフルランクとなるため，雑音のない場合には，到来波数と同数以上のスナップショットがあれば到来方向推定が可能となる．

4. KR 積拡張アレー処理

KR 積とそれに関連する演算について復習した後，KR 積拡張アレー処理について説明する．更に，到来波の擬定常性を仮定することで，KR 積拡張アレー処理後の信号に MUSIC 法を適用する手法 (KR-MUSIC 法) を紹介する．ここで紹介するアルゴリズムのほかに，KR 積拡張アレー処理後に ESPRIT 法を適用する手法⁽²¹⁾なども提案されている．

4.1 KR 積とクロネッカー積，ベクトル化

行列 $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k] \in \mathbb{C}^{n \times k}$ と $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k] \in \mathbb{C}^{m \times k}$ の KR 積は

$$\mathbf{X} \odot \mathbf{Y} = [\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{y}_1 \quad \dots \quad \mathbf{x}_k \otimes \mathbf{y}_k] \quad (15)$$

で定義される．ただし， $\otimes$ はクロネッカー積であり，ベクトル $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{C}^n$ ， $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_m]^T \in \mathbb{C}^m$ に対して

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} x_1 \mathbf{y} \\ \vdots \\ x_n \mathbf{y} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 y_1 & \cdots & x_1 y_m & \cdots & x_n y_1 & \cdots & x_n y_m \end{bmatrix}^T\end{aligned}\quad (16)$$

である．ここで，

$$\mathbf{y} \mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 y_1 & \cdots & x_n y_1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_1 y_m & \cdots & x_n y_m \end{bmatrix}\quad (17)$$

であることから，

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = \text{vec}[\mathbf{y} \mathbf{x}^T]\quad (18)$$

となることが分かる．ただし， $\text{vec}[\cdot]$ は行列のベクトル化の操作を表し，

$$\text{vec}[\mathbf{X}] = [\mathbf{x}_1^T \cdots \mathbf{x}_k^T]^T \in \mathbb{C}^{nk}\quad (19)$$

である．

4.2 KR 積拡張アレー処理

到来信号が互いに無相関の場合^(注3)，(8) の $\mathbf{D}$ は，

$$\mathbf{D} = \text{diag}[d_0, d_1, \dots, d_{L-1}]\quad (20)$$

となる．ここで， $\text{diag}[\cdot]$ は対角行列を表し， $d_l = E[|s_l(k)|^2]$ ($l = 0, \dots, L-1$) である．このとき，相関行列 $\mathbf{R}$ は

$$\mathbf{R} = \sum_{l=0}^{L-1} d_l \mathbf{a}(\theta_l) \mathbf{a}^H(\theta_l) + \sigma^2 \mathbf{I}_N\quad (21)$$

となる．したがって， $\mathbf{R}$ をベクトル化すると，

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &\equiv \text{vec}[\mathbf{R}] \\ &= \text{vec}\left[\sum_{l=0}^{L-1} d_l \mathbf{a}(\theta_l) \mathbf{a}^H(\theta_l)\right] + \text{vec}[\sigma^2 \mathbf{I}_N] \\ &= \sum_{l=0}^{L-1} d_l \text{vec}[\mathbf{a}(\theta_l) \mathbf{a}^H(\theta_l)] + \sigma^2 \tilde{\mathbf{I}}_N \\ &= \sum_{l=0}^{L-1} d_l \mathbf{a}^*(\theta_l) \otimes \mathbf{a}(\theta_l) + \sigma^2 \tilde{\mathbf{I}}_N \\ &= (\mathbf{A}^* \odot \mathbf{A}) \mathbf{d} + \sigma^2 \tilde{\mathbf{I}}_N\end{aligned}\quad (22)$$

を得る．ただし， $\tilde{\mathbf{I}}_N = \text{vec}[\mathbf{I}_N]$ ， $\mathbf{d} = [d_0, d_1, \dots, d_{L-1}]^T$ である．

(22) を (7) と比較し， $\mathbf{A}^* \odot \mathbf{A}$ を (7) の $\mathbf{A}$ に対応する行列， $\mathbf{d}$ を送信信号ベクトル， $\sigma^2 \tilde{\mathbf{I}}_N$ を雑音ベクトルと見ることによって， $\mathbf{y}$ を新たな受信信号ベクトル（以下，KR 積拡張受信信号と呼ぶ）と見なすことができる．ここで重要なことは， $\mathbf{r}(k) \in \mathbb{C}^N$ に対して， $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{N^2}$ となっており，センサ素子数，すなわち，ア

レーの自由度が N から N^2 に増加したように見えることである． $\mathbf{A}$ の n 番目 ($n = 0, \dots, N-1$) の行ベクトルが

$$\left[e^{j2\pi \frac{d_n \sin \theta_0}{\lambda}} \quad \cdots \quad e^{j2\pi \frac{d_n \sin \theta_{L-1}}{\lambda}} \right]\quad (23)$$

であるのに対し， $\mathbf{A}^* \odot \mathbf{A}$ の $iN+j$ 番目 ($i, j = 0, \dots, N-1$) の行ベクトルは

$$\left[e^{j2\pi \frac{(d_j - d_i) \sin \theta_0}{\lambda}} \quad \cdots \quad e^{j2\pi \frac{(d_j - d_i) \sin \theta_{L-1}}{\lambda}} \right]\quad (24)$$

となり，KR 積拡張受信信号におけるアレーの自由度が実際に幾つになるかは， $d_j - d_i$ ($i, j = 0, \dots, N-1$) が幾つの異なる値を取るかに依存する．ここで，センサ素子の位置が d_n ($n = 0, \dots, N-1$) で与えられる元のアレーに対し，センサの位置が $d_j - d_i$ ($i, j = 0, \dots, N-1$) の相異なる値によって定まるアレーは差分アレー (difference co-array) と呼ばれている．差分アレーの自由度は元のアレーの素子配置に依存し，様々な配置が検討されているが，達成可能な最大自由度は $N(N-1)+1$ であることが知られている⁽⁸⁾．また，元のアレーが等間隔直線アレーの場合は差分アレーの自由度が $2N-1$ ，2 レベルの入れ子形アレー (nested array) の場合は， N が偶数のときは $(N^2-2)/2+N$ ，奇数のときは $(N^2-1)/2+N$ である．このように，相関行列のベクトル化操作によって得られる KR 積拡張受信信号を用いることで，実際のセンサ素子数以上のアレーの自由度を得ることが可能となり，したがって，センサ素子数以上の到来波の推定が可能となる．

4.3 KR-MUSIC 法⁽⁶⁾ (7)

KR 積拡張受信信号 (22) は通常のアレーにおけるスナップショットに対応する．MUSIC 法では複数のスナップショットを用いて時間平均によるサンプル相関行列を評価するが，(22) によるスナップショットは到来信号が定常の場合には時間的に変化しないため，MUSIC 法を適用することができない．そこで，到来信号の電力がフレームと呼ばれる時間区間ごとに变化すること，すなわち，擬定常という性質が仮定される．

m 番目 ($m = 0, \dots, M-1$) のフレームにおける相関行列を $\mathbf{R}_m$ とし，それぞれ KR 積拡張処理を行って得られたベクトルを並べることでデータ行列

$$\begin{aligned}\mathbf{Y} &\equiv [\text{vec}(\mathbf{R}_0), \text{vec}(\mathbf{R}_1), \dots, \text{vec}(\mathbf{R}_{M-1})] \\ &= (\mathbf{A}^* \odot \mathbf{A}) \Phi + \sigma^2 \tilde{\mathbf{I}}_N \mathbf{1}_M^T\end{aligned}\quad (25)$$

を得る．ここで， $\Phi = [d_0, \dots, d_{M-1}]$ ， $\mathbf{1}_M = [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^M$ である．ただし， d_m ($m = 0, \dots, M-1$) は m 番目のフレームにおける各信号の電力ベクトルである．(25) の右辺第 2 項は雑音に起因する成分であるが， $\mathbf{1}_M$ の直交補空間への射影行列 $\mathbf{P}_{\mathbf{1}_M}^\perp = \mathbf{I}_M - \frac{1}{M} \mathbf{1}_M \mathbf{1}_M^T$ を (25) の両辺に右からかけることで，雑音のないデータ行列

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{Y}} &\equiv \mathbf{Y} \mathbf{P}_{\mathbf{1}_M}^\perp \\ &= (\mathbf{A}^* \odot \mathbf{A}) \Phi \mathbf{P}_{\mathbf{1}_M}^\perp\end{aligned}\quad (26)$$

(注3)：相関のある到来信号の場合への拡張が文献 [10] で提案されている．

が得られる．ここで， $[\Phi^T, \mathbf{1}_M] \in \mathbb{R}^{M \times (L+1)}$ がフル列ランクであれば， $\text{rank}(\Phi P_{\mathbf{1}_M}^\perp) = \text{rank}(\Phi) = L$ となり，雑音除去によってランクの条件が劣化することはない⁽⁶⁾．このとき， $M > L$ であることに注意する．

$\tilde{Y}$ の各列は雑音がないときのスナップショットに対応するため， $\tilde{Y}\tilde{Y}^H$ の固有値分解を行うことで MUSIC 法により到来角が推定できる．あるいは， $\tilde{Y}$ の特異値分解を行うことで

$$\tilde{Y} = \begin{bmatrix} U_S & U_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_S & \mathbf{0}_{L \times (N^2-L)} \\ \mathbf{0}_{(N^2-L) \times L} & \mathbf{0}_{(N^2-L) \times (N^2-L)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_S^H \\ \mathbf{V}_N^H \end{bmatrix}$$

を得て，特異値 0 に対応する左特異ベクトルから成る行列 $U_N \in \mathbb{C}^{N^2 \times (N^2-L)}$ と KR 積拡張受信信号におけるステアリングベクトルを用いて計算される MUSIC スペクトル

$$S_{\text{kr}}(\theta) = \frac{1}{(\mathbf{a}^*(\theta) \otimes \mathbf{a}(\theta))^H U_N U_N^H (\mathbf{a}^*(\theta) \otimes \mathbf{a}(\theta))}$$

を評価することで到来角を推定できる．

コヒーレントな波源からの信号の到来方向推定を行うために提案された空間平滑化処理⁽²²⁾を応用することで，信号の擬定常性を仮定することなく推定可能な手法も提案されている⁽⁸⁾．ただし，空間平滑化は等間隔直線アレーに対して有効な手法であるため，差分アレーが等間隔直線アレーとなるように入れ子形アレーなどを用いる必要がある．また，空間平滑化を利用することで，推定可能な到来波数が擬定常信号を仮定する KR-MUSIC 法の半分になってしまうという欠点がある．

5. 圧縮センシングと到来方向推定

5.1 MMV 問題と到来方向推定

未知のスパースベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ に対してセンシング行列 $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ($m < n$) を用いて線形観測を行うことで観測ベクトル $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^m$ を得たときに， $\mathbf{W}$ と $\mathbf{z}$ から $\mathbf{x}$ を求める問題，すなわち

$$\text{minimize} \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{subject to } \mathbf{z} = \mathbf{W}\mathbf{x} \quad (27)$$

は，圧縮センシングの最も基本的な問題である．ただし， $\|\mathbf{x}\|_0$ は $\mathbf{x}$ の非ゼロ要素の個数を表す．これは，一つの観測ベクトルに基づいた問題であるため，SMV (Single Measurement Vector) 問題と呼ばれており，完全再構成の条件は

$$\|\mathbf{x}\|_0 < \frac{\text{spark}(\mathbf{W})}{2} \quad (28)$$

で与えられる⁽²³⁾．ここで， $\text{spark}(\mathbf{W})$ は一次従属となる $\mathbf{W}$ の最小列数である．

一方，MMV 問題は，共通の台を持つ複数のスパースベクトルに対して，それぞれ同一のセンシング行列を用いて線形観測を行ったときに得られる複数の観測ベクトルから，元の複数のスパースベクトルを復元する問題である．すなわち， $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{r-1} \in \mathbb{C}^n$ を共通の台を持つ r 個のスパースベクトルとし，センシング行列 $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ($m < n$) を用いて線形観測を行ったときに対

応する観測ベクトルをそれぞれ $\mathbf{z}_0, \dots, \mathbf{z}_{r-1} \in \mathbb{C}^m$ とすると，MMV 問題は

$$\text{minimize} \|\mathbf{X}\|_0 \quad \text{subject to } \mathbf{Z} = \mathbf{W}\mathbf{X} \quad (29)$$

で与えられる．ここで， $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{r-1}]$ ， $\mathbf{Z} = [\mathbf{z}_0, \dots, \mathbf{z}_{r-1}]$ であり， $\|\mathbf{X}\|_0 = |\text{supp} \mathbf{X}|$ ，ただし， $\text{supp} \mathbf{X}$ は $\mathbf{X}$ の $\mathbf{0}_{1 \times r}$ でない行ベクトルのインデックス集合である．MMV 問題 (29) は

$$\|\mathbf{X}\|_0 < \frac{\text{spark}(\mathbf{W}) + \text{rank}(\mathbf{Z}) - 1}{2} \quad (30)$$

のとき，またそのときに限りユニークな解 $\mathbf{X}$ を持つことが知られている⁽¹⁴⁾⁽²⁴⁾⁽²⁵⁾．SMV 問題では $\text{rank}(\mathbf{Z}) = 1$ であることを考慮すると，MMV 問題の場合には観測数の増加によって再構成の条件が緩和されていることに注意する．

到来方向推定と圧縮センシングの関連は， $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ の範囲を所望の分解能 δ で分割し， $-\pi/2$ から数えて n 番目のグリッドの到来角を $\theta_n^\delta = -\pi/2 + n\delta$ ($n = 0, \dots, \pi/\delta$) としたとき，雑音がないときの (7) がステアリング行列 $\bar{\mathbf{A}} = [\mathbf{a}(\theta_0^\delta), \mathbf{a}(\theta_1^\delta), \dots, \mathbf{a}(\theta_{\pi/\delta}^\delta)]$ を用いて，

$$\mathbf{r}(k) = \mathbf{A}\mathbf{s}(k) = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{s}}(k) \quad (31)$$

と書かれることから理解される．すなわち， $\bar{\mathbf{s}}(k) \in \mathbb{C}^{\pi/\delta+1}$ は到来波に対応する L 個の成分のみが非ゼロのスパースベクトルであり，その台を推定することは対応する $\bar{\mathbf{A}}$ の列ベクトルを指定すること，つまり到来角の推定に対応するからである．(31) 自体は SMV 問題であるが，通常，到来方向推定は複数のスナップショットを用いて行われるため，MMV 問題に帰着される．

実際には，(29) を直接解くことは計算量的に困難であるため，貪欲法を用いた S-OMP (Simultaneous Orthogonal Matching Pursuit)⁽²⁴⁾ や凸緩和を用いた混合ノルムアプローチ⁽²⁶⁾ など様々な現実的な解法が提案されているが，中でも MUSIC 法を用いることで $r = k$ のときに，(30) の ℓ_0 限界を達成することが知られている．ただし，MUSIC 法には， $r < k$ のときに全く推定ができないという問題がある．

5.2 圧縮 MUSIC 法⁽¹³⁾

スナップショット数 (観測数) K が到来波数 (非ゼロ要素の個数) L よりも少ない場合，MUSIC 法だけでは到来角の推定ができないため，まず，貪欲法や凸緩和などに基づく圧縮センシングのアルゴリズムを用いて $L - K$ 個の到来角の推定値を求め，その情報を用いて修正版の MUSIC スペクトルを評価することが圧縮 MUSIC の基本的なアイデアである．

具体的には， K 個のスナップショットを並べたデータ行列 $[\mathbf{r}(0), \dots, \mathbf{r}(K-1)]$ を構成し，特異値分解を行うことで，特異値 0 に対応する左特異ベクトルから成る行列 $\mathbf{Q}$ を得る． $K < L$ の場合には $\mathbf{Q}$ の列ベクトルと $\mathbf{a}(\theta_l)$ ($l = 1, \dots, L$) が直交しないため，データ行列に対して任意の圧縮センシングのアルゴリズムを適用することで， $L - M$ 個の到来角の推定値を求めてそれらの集合を $\mathcal{C}$ とする．更に，この $L - K$ 個の推定値を用い

て、次の修正版の MUSIC スペクトルを評価する．

$$S_{cs}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}(\theta)^H \mathbf{Q} \left\{ \mathbf{I} - \mathbf{Q}^H \mathbf{A}_C (\mathbf{A}_C^H \mathbf{Q} \mathbf{Q}^H \mathbf{A}_C)^{-1} \mathbf{A}_C^H \mathbf{Q} \right\} \mathbf{Q}^H \mathbf{a}(\theta)} \quad (32)$$

ここで、 $\mathbf{A}_C$ は $\mathcal{C}$ に含まれる $L - K$ 個の到来角に対応するステアリングベクトルで構成された $N \times (L - K)$ の行列である．(32) は一般化 MUSIC スペクトルと呼ばれている．このような圧縮センシングと MUSIC 法のアイデアを組み合わせたハイブリッドの処理によって、スナップショット数が到来波数より少ない場合でも到来角を推定することができる⁽¹³⁾．ただし、圧縮 MUSIC 法は受信信号に付加雑音がないことが前提となっており、更に到来波数がセンサ素子数以上の場合には到来方向推定を行うことができない．

6. 新しい到来方向推定法と数値例

KR-MUSIC 法では、フレーム数 M が少ないほうがより高速な推定が可能であるが、 $M < L$ の場合には $\Psi \mathbf{P}_{\mathbf{I}_M}^\perp$ がフルランクにならず到来角を推定できない．そこで、KR 積拡張受信信号におけるフレーム数は通常のアレーのスナップショット数に対応し、また、KR 積拡張受信信号では雑音の成分が完全に除去できることを考慮して、KR 積拡張アレー処理後の信号に圧縮 MUSIC 法を適用することで到来波数がセンサ素子数とフレーム数のいずれよりも多い場合にも適用可能な到来方向推定法 (KR-圧縮 MUSIC 法と呼ぶ) について紹介する⁽¹⁵⁾．

M 個のフレームにおいてそれぞれサンプル相関行列 $\hat{\mathbf{R}}_m$ ($m = 0, \dots, M-1$) を計算し、KR 積拡張アレー処理により得られた KR 積拡張受信信号を並べ、更に右から $\mathbf{P}_{\mathbf{I}_M}^\perp$ をかけることでデータ行列

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Y}} &= [\text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_0), \dots, \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_{M-1})] \mathbf{P}_{\mathbf{I}_M}^\perp \\ &= (\mathbf{A}^* \odot \mathbf{A}) \Psi \mathbf{P}_{\mathbf{I}_M}^\perp \end{aligned} \quad (33)$$

を得る．ここで、 $\Psi = [\hat{\mathbf{d}}_0, \dots, \hat{\mathbf{d}}_{M-1}]$ であり、 $\hat{\mathbf{d}}_{M-1}$ は m 番目のフレームにおける $s(k)$ のサンプル相関行列の対角成分から成るベクトルである．ただし、 $s(k)$ のサンプル相関行列が対角行列であることを仮定している．データ行列 $\hat{\mathbf{Y}}$ の特異値分解を行なうことで、特異値 0 に対応する左特異ベクトルから成る行列 $\hat{\mathbf{Q}}$ が得られるが、 $M < L$ の場合には $\hat{\mathbf{Q}}$ の列ベクトルと $\mathbf{a}^*(\theta_l) \otimes \mathbf{a}(\theta_l)$ ($l = 1, \dots, L$) が直交しない．そこで、データ行列 (33) に対して S-OMP⁽¹³⁾ などの圧縮センシングのアルゴリズムを適用することで、 $L - M$ 個の到来角の推定値を求めてそれらの集合を $\mathcal{C}$ とし、次の一般化 MUSIC スペクトルを計算する．

$$S_{krms}(\theta) = \frac{1}{\{\mathbf{a}^*(\theta) \otimes \mathbf{a}(\theta)\}^H \Gamma \{\mathbf{a}^*(\theta) \otimes \mathbf{a}(\theta)\}}$$

ただし、

$$\Gamma = \hat{\mathbf{Q}} \left\{ \mathbf{I} - \hat{\mathbf{Q}}^H (\mathbf{A}^* \odot \mathbf{A})_C \right\}$$

図2 KR-圧縮 MUSIC 法と KR-MUSIC 法のスペクトルの例

$$\left[(\mathbf{A}^* \odot \mathbf{A})_C^H \hat{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{Q}}^H (\mathbf{A}^* \odot \mathbf{A})_C \right]^{-1} (\mathbf{A}^* \odot \mathbf{A})_C^H \hat{\mathbf{Q}} \left\{ \hat{\mathbf{Q}}^H \right\}$$

であり、 $(\mathbf{A}^* \odot \mathbf{A})_C$ は推定到来角集合 $\mathcal{C}$ に含まれる到来角に対応する KR 拡張ステアリングベクトルで構成される行列である．

図2に、レベル2の入れ子形アレーを用い、センサ素子数 $N = 6$ 、到来波数 $L = 12$ 、フレーム数 $M = 8$ としたときの KR-圧縮 MUSIC 法と KR-MUSIC 法の MUSIC スペクトルの例を示す．図中、矢印は各到来波の到来角を表しており、“KR-CS-MUSIC”は KR-圧縮 MUSIC 法を意味する．このセンサ素子数 N と到来波数 L は、従来の古典的な MUSIC 法だけでなく、空間平滑化を用いた KR-MUSIC 法でも到来方向推定ができない値に設定されていることに注意されたい．フレーム数 $M <$ 到来波数 L であるため、KR-MUSIC 法では幾つかの到来波を見落としがあるのに対し、KR-圧縮 MUSIC 法では全ての到来波をそのピークの位置によって検出できている．

図3に、提案法でフレーム数を変化させたときの到来角の推定値の RMSE (Root Mean-Square-Error) 特性を示す．また、KR-MUSIC 法及び圧縮センシング (S-OMP) による特性も同図に示す．ここで、フレーム数以外のパラメータは図2と同様である．各フレーム数における RMSE は 1,000 回の数値実験の

図3 KR-圧縮 MUSIC 法と KR-MUSIC 法、圧縮センシング (S-OMP) の推定誤差特性

試行の平均によって求めた．フレーム数が少ない領域 ($M < 10$) では圧縮センシングのみを用いた手法の特性が最も良好であるのに対し，ある程度以上のフレーム数があるときは MUSIC 法を用いた手法の特性が良くなっている．また，KR-MUSIC 法と KR-圧縮 MUSIC 法の特性を比べると，フレーム数が十分にある領域 ($M > 14$) ではほぼ同一であるものの，それ以下の領域では KR-圧縮 MUSIC 法の特性が良いことが確認できる．

7. む す び

本稿では，狭帯域信号の到来方向推定について概説した．空間領域の信号モデルから始めて，最も基本的な到来方向推定法である MUSIC 法について説明し，最近の話題である KR 積拡張アレー処理や圧縮センシングを用いた MUSIC 法について紹介した．更にこれらのアイデアを用いることで，センサ素子数と擬定常信号のフレーム数のいずれもが到来波数よりも少ない場合にも動作可能な新しい到来方向推定法について述べた．

到来方向推定は古典的な問題であるが，圧縮センシング等の新しい理論的な枠組みで捉え直すことにより，新たな展開を見せている．本稿が，この新しい到来方向推定の世界の面白さをお伝えする一助になれば幸いである．

謝辞 計算機実験に協力してくれた京都大学大学院情報学研究科の椋本博学君に感謝します．

文 献

- (1) S. Haykin, *Adaptive Filter Theory, Second Edition*, Prentice Hall, 1991.
- (2) H.L. Van Trees, *Optimum Array Processing*, Wiley-Interscience, 2002.
- (3) 酒井英昭, “主成分分析と独立成分分析,” システム / 制御 / 情報, vol. 43, no. 4, pp. 188-195, 1999.
- (4) R. O. Schmidt, “Multiple emitter location and signal parameter estimation,” *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. AP-34, no. 3, pp. 276-280, 1986.
- (5) R. Roy and T. Kailath, “Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques,” *IEEE Trans. Acoust., Speech Signal Process.*, vol. 37, no. 7, pp. 984-995, 1989.
- (6) W.-K. Ma, T.-H. Hsieh, and C.-Y. Chi, “DOA estimation of quasi-stationary signals via Khatri-Rao subspace,” in *Proc. Int. Conf. Acoust., Speech Signal Process. (ICASSP)*, pp.2165-2168, 2009.
- (7) W.-K. Ma, T.-H. Hsieh, and C.-Y. Chi, “DOA estimation of quasi-stationary signals with less sensors than sources and unknown spatial noise covariance: a Khatri-Rao subspace approach,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 58, no. 4, pp.2168-2218, 2010.
- (8) P. Pal and P. P. Vaidyanathan, “Nested arrays: a novel approach to array processing with enhanced degrees of freedom,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol.58, no.8, pp.4167-4181, 2010.
- (9) M. Tsuji, K. Umebayashi, and Y. Suzuki, “Detection of the number of signals with fewer sensors than sources,” *IEICE Trans. Commun.*, vol.E96-B, no.9, pp.2235-2243, Sept. 2013.
- (10) S. Shirai, H. Yamada and Y. Yamaguchi, “A novel DOA estimation error reduction preprocessing scheme of correlated waves for Khatri-Rao product extended-array,” *IEICE Trans. Commun.*, vol.E96-B, no.10, pp.2475-2482, Oct. 2013.
- (11) 白井智士, 山田寛喜, 西村寿彦, 小川恭孝, 大鐘武雄, 山口芳雄, “Khatri-Rao 変換を用いた広帯域 DOA 推定法の誤差軽減,” 2014 信学総大, B-1-228, p. 228, March 2014.
- (12) K. Hayashi, M. Nagahara, and T. Tanaka, “A user’s guide to compressed sensing for communications systems,” *IEICE Trans. Commun.*, vol. E96-B, no. 03, pp.685-712, March 2013
- (13) J. M. Kim, O. K. Lee, and J. C. Ye, “Compressive MUSIC: revisiting the link between compressive sensing and array signal processing,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol.58, no.1, pp.278-301, Jan. 2012.
- (14) P. Feng, *Universal Minimum-Rate Sampling and Spectrum-Blind Reconstruction for Multiband Signals*, Ph.D. dissertation, Univ. of Illinois, Urbana-Champaign, 1997
- (15) 椋本博学, 林 和則, 金子めぐみ, “Khatri-Rao 積拡張アレーを用いた圧縮センシングによる到来角推定法,” 信学技報, RCC2014-11, MICT2014-11, pp.51-56, May 2014.
- (16) G. Xu and T. Kailath, “Direction-of-arrival estimation via exploitation of cyclostationarity -a combination of temporal and spatial processing,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 40, no. 7, pp. 1775-1786, July 1992.
- (17) 菊間信良, *アダプティブアンテナ技術*, オーム社, 東京, 2003.
- (18) P. Stoica and A. Nehorai, “MUSIC, maximum likelihood, and Cramer-Rao bound,” *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.* vol. 37, no. 5, pp. 720-741, May 1989.
- (19) E. Moulines, P. Duhamel, J.-F. Cardoso, and S. Mayrargue, “Subspace methods for the blind identification of multichannel FIR filters,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 43, no. 2, pp. 516 - 525, Feb. 1995.
- (20) K. Hayashi, H. Matsushima, H. Sakai, E. Carvalho, and P. Popovski, “Subspace based blind sparse channel estimation,” in *Proc. Asia-Pacific Signal & Information Processing Association Annual Summit and Conference (APSIPA ASC)*, pp.1-6, Dec. 2012.
- (21) W.-T. Zhang and S.-T. Lou, “Search free algorithms for DOA estimation of quasi-stationary signals,” in *Proc. IEEE Int. Workshop on Machine Learning for Signal Process. (MLSP)*, pp. 1-5, Sept. 2011.
- (22) T.-J. Shan, M. Wax, and T. Kailath, “On spatial smoothing for direction-of-arrival estimation of coherent signals,” *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.*, vol. 33, no. 4, pp. 806-811, 1985.
- (23) M. Elad, *Sparse and Redundant Representations*, Springer, 2010.
- (24) J. Chen and X. Huo, “Theoretical results on sparse representations of multiple measurement vectors,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 54, no. 12, pp. 4634-4643, 2006.
- (25) M.E. Davies and Y. C. Eldar, “Rank awareness in joint sparse recovery,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 58, no. 2, pp. 1135-1146, Feb. 2012.
- (26) J. A. Tropp, “Algorithms for simultaneous sparse approximation. Part II: Convex relaxation,” *Signal Process.*, vol. 86, no. 3, pp. 589-602, 2006.

(RCC 研究会提案, 平成 24 年 9 月 24 日受付
10 月 25 日最終受付)

林 和則 (正員)

1997 阪大・工・通信・卒. 2002 同大学院電子情報エネルギー工学専攻博士後期課程了. 同年京大大学院情報学研究所システム科学専攻助手. 2009 同准教授. 無線通信, 統計的信号処理の研究に従事. 2009 国際コミュニケーション基金優秀研究賞, 2009 IEEE Globecom Best Paper Award, 2011 本会通信ソサイエティ Best Paper Award, 2011 WPMC

Best Paper Award , 2012 電気通信普及財団テレコムシステム技術賞 ,
2014 本会通信ソサイエティBest Tutorial Paper Award 各受賞 . IEEE,
APSIPA, ISCIE 各会員.