再考・適応アルゴリズム

Reconsideration of Adaptive Algorithm

藤井健作 Kensaku FUJII
棟安実治 Mitsuji MUNEYASU

アブストラクト 本稿は、適応アルゴリズムの原理が従来の説明では今一つ分からないと感じて始めた、ここ 20 数年の研究成果の中から関連すると思われるところを抜粋してまとめた要約になっている。その研究の成果に従えば、適応アルゴリズムは参照信号の自己相関行列の非対角項に対する近似処理の方法によって分類される。その中で最も粗い近似を行う適応アルゴリズムが算術平均法、次いで係数再利用法、低域フィルタ法（学習同定法）と個別正規化 LMS 法と続いて、最も高い近似を与える適応アルゴリズムが亜逐次最小二乗法である。一般に、適応アルゴリズムの解説はウィナー・ホッフの解、最小二乗法、最急降下法、LMS (Least Mean Square) 法、学習同定法の順で行われる。そのうち、最急降下法以降で逆行列演算が不要になる。本稿では、算定した係数の再利用が逆行列演算を不要とする原理になっていることを示す。また、その係数再利用法こそが最急降下法の原型とも言え、ここから様々なアルゴリズムが導かれる。本稿では最後に、学習同定法を構成するベクトル表現式を要素に展開し、そこから再急降下法型のアルゴリズムを構成する一つ一つの信号が持つ役割を明らかにする。

キーワード 算術平均法、係数再利用法、亜逐次最小二乗法、個別正規化 LMS 法、 $E\tilde{E}$ 法

Abstract This exposition summarizes our papers on adaptive algorithms published over about twenty years. According to the results presented in them, adaptive algorithms can be classified by the type of approximation method used for the non-diagonal elements of the autocorrelation matrix. Among these methods, the arithmetic mean method has the lowest degree of approximation, followed by the coefficient reuse method, the normalized least mean square (NLMS) algorithm, and the individually normalized least mean square (INLMS) algorithm, with the sub-recursive least square (sub-RLS) algorithm having the highest degree of approximation. The adaptive algorithms are generally introduced in the order of the Wiener-Hopf solution, the least square (LS) method, the steepest descent method, the LMS algorithm, and the NLMS algorithm where the first two require the operation of the inverse matrix. In this exposition, we show that the reuse of the estimated coefficients makes this operation unnecessary. This coefficient reuse method can be assumed to be the source of steepest descent method type adaptive algorithms, from which various algorithms can be derived. Finally, we clarify the role of each element composing, the NLMS algorithm.

Key words Arithmetic mean, Coefficient reuse method, Sub-recursive least square, Individually normalized LMS, $E\tilde{E}$ method

1. はじめに

本稿では、適応アルゴリズムの原理を誤差曲面から説き進める一般的な解説とは異なる角度からの説明を試みる。その説明に違和感を覚えられ読者も、中にはおられるかもしれない。そこを我慢して読み進めて頂ければ、本稿によって必ずや今後の応用に役立つ知見が得られると確信している。

本稿で述べる内容は、適応アルゴリズムの原理が固有値や固

有ベクトルを使った説明では分かった気がしない、それとは異なる、心底分かったと感じられる解釈による説明を、と望んで以来 20 数年、追究し続けて得られた成果の中から強く関連すると思われるところを抜粋してまとめた要約になっている。その要約に際して、式の誘導の多くは省略した。また、その研究成果の要約としての本稿の性格上、他書では必ず触れられる一般的な項目、例えば、LMS (Least Mean Square) 法や、その収束条件などについての説明は省略している。

適応アルゴリズムは、本稿の基礎となる研究の成果に従えば、参照信号が構成する自己相関行列の非対角項に対する近似処理の方法によって分類される。その中で最も粗い近似を行う適応アルゴリズムが算術平均法、次いで係数再利用法、低域フィルタ法（学習同定法⁽¹⁾）、個別正規化 LMS 法⁽²⁾⁽³⁾と続いて、最も高い近似を与える適応アルゴリズムが亜逐次最小二乗法⁽⁴⁾⁽⁵⁾である。これらのうち、学習同定法以外は、なじみのないアル

藤井健作 正員 コダウェイ研究所
E-mail kodawayfujii@gmail.com
棟安実治 正員：シニア会員 関西大学システム理工学部
E-mail muneyasu@eng.kansai-u.ac.jp
Kensaku FUJII, Member (Kodaway Laboratory, Hachioji-shi, 192-0361 Japan), Mitsuji MUNEYASU, Senior Member (Faculty of Engineering and Science, Kansai University, Suita-shi, 564-8680 Japan).
電子情報通信学会 基礎・境界サイエティ
Fundamentals Review Vol.8 No.4 pp.292-313 2015 年 4 月
©電子情報通信学会 2015

ゴリズムである。しかし、それらにはそれぞれに特長があって例えば、垂逐次最小二乗法では逆行列演算を不要としながらも簡易な計算で最小二乗法と同等の収束特性が得られ、個別正規化 LMS 法では固定小数点演算でもほとんど劣化のない収束特性が得られる。

適応アルゴリズムの解説は、一般にはウィーナー・ホッフの解、最小二乗法、最急降下法、LMS 法、学習同定法の順で行われる。そのうち、ウィーナー・ホッフの解と最小二乗法の二つで逆行列演算を必要とすることは容易に理解される。続いて、逆行列演算は効率が悪い、その効率向上に係数の逐次更新が有効、その逐次更新法として古くからある最急降下法が利用できる、という論理進行で解説は最急降下法の説明に移る。

そこに、最急降下法で逆行列演算が回避できる原理についての説明はない。その説明がないまま、勾配ベクトルの概念が導入され、その勾配ベクトルにステップサイズと呼ばれる定数を乗じて少しずつ係数を更新していくという説明が続いて、逆行列演算は完全に忘れ去られる。次いで、固有値や固有ベクトルを用いて係数の収束条件が導かれ、その条件を満たすようにステップサイズを与えれば逆行列演算を必要とせずに、係数は最終的にウィーナー・ホッフの解に収束すると説明される。

その際、どのような原理の下で逆行列演算が不要となったのか、その説明がないまま進む論理の進行に断絶を感じられたことはないだろうか。逆行列演算が不要な最急降下法でも、逆行列演算が必要なウィーナー・ホッフの解に係数を収束させることができるのであれば、逆行列演算に代わる何かはどこかにないとおかしい。逆行列演算はどこへ行ったのか。確かに、実用的には LMS 法で十分であって、ウィーナー・ホッフの解や最小二乗法は机上の議論と思えば、その間の説明に断絶があったとしても実害はない。その断絶が埋められたからといって、何かが変わるわけでもない。本稿では、それが今でも気になるという読者に、その断絶を埋める答えを示したいと考えている。

本稿では、フーリエ変換を利用する方法の適用の可否を考察するところから始めて、周波数領域上の処理で最も簡略化された演算構造を持つクロススペクトル法、それと同様の構造を時間領域処理において持つ算術平均法へと話を進める。次いで、その算術平均法で収束が遅くなる原因を指摘し、その原因となる成分を小さく抑えて収束を高速化する方法として、算定した係数の再利用が有効であることを示す。このアルゴリズムを本稿では係数再利用法と呼ぶ。

この係数再利用法は実は、本稿で紹介する最急降下法型のアルゴリズムの原形になっている。更に、その係数再利用法と最小二乗法の比較から、この係数の再利用が実は逆行列演算を回避する原理となっていること、その回避を可能とする原理が勾配ベクトルへとつながっていることを示す。当然ながら、この再利用は、算定した係数の循環を引き起こす。その循環による発散の防止に勾配ベクトルの正規化が重要な働きをすることになる。

この係数再利用法から、係数の収束をより高速化する三つの方法の存在が指摘される。それらを係数再利用法に適用することによって、そのそれぞれの方法から、垂逐次最小二乗法^{(4) (5)}、低域フィルタ法 (学習同定法)、個別正規化 LMS 法^{(2) (3)}が導

かれる。本稿では、この三つの適応アルゴリズムについて、その優れた収束特性を示しつつ、その原理を詳しく説明する。

この係数再利用法からは更に、最急降下法型の適応アルゴリズムにおいて指摘される、自己相関の強い参照信号に対して係数の収束速度が低下するという問題の改善法も見いだされる⁽⁶⁾。その改善法を発展させた EE' 法^{(7) (8)}や EE 法⁽⁹⁾を紹介し、簡易な方法で収束速度が改善されることを示す。また、その改善法に導かれる評価関数を明らかにし、その評価関数が、よく知られる出力誤差の二乗とは異なる構造を持つことを示す。

この評価関数の構造は、参照信号を未知の系に送出して得られる実際の出力誤差と、未知の系に実際には送出されない参照信号から得られる仮想的な出力誤差との積として表される。この事実から、係数の収束が保証される限りにおいて評価関数の構造に制約はないと考えることができ、その仮想的な出力誤差の生成に様々な形態の信号を利用する拡張が可能になる。本稿では更に、収束が保証されるときにだけ係数を更新する操作を加えれば、その保証が常には得られない構造の評価関数も利用が可能となることを示す。Signed Regressor アルゴリズムや Sign アルゴリズムもまた、このような仮想的な出力誤差との積を評価関数とする適応アルゴリズムとなっている。

また、その最も実用的と言える学習同定法の係数更新原理は通常、誤差曲面や勾配ベクトルを用いて説明される。その説明に、式で追えても分かった気がしない、頭では分かっても腑に落ちない、と感じるところがある。実際、どのような原理で未知の系のインパルス応答を算定できるのか。なぜ、勾配ベクトルの正規化が自己相関行列の対角項の和で行われるのか。その正規化の目的は何か。勾配ベクトルの何が係数更新を最適解の方向に向けさせるのか。最急降下法型のアルゴリズムを構成する信号の一つ一つが未知の系のインパルス応答の算定にどのような役割を担っているのか。本稿の基となった研究は、これらの疑問に答えを出そうとして始められた。本稿では、これらの疑問にも答える。最後に、学習同定法で行われる、自己相関行列の対角項の和による正規化が、係数再利用が引き起こす発散の防止に適さない例もあることも示す。

本稿では以上の内容を、できるだけ体系的に理解して頂けるようにまとめたつもりである。本稿を読まれた結果として適応アルゴリズムに関する知識が整理されたと感じていただけたら幸いである。紙数の関係から、本稿では適応フィルタの構造を例えば巡回型とした場合やラティス型とした場合⁽¹⁰⁾、マルチチャネル適応アルゴリズム^{(11)~(13)}、逆フィルタの生成時に避けられない非最小位相成分への対応法⁽¹⁴⁾などに関する研究の成果については触れていない。今後の機会に期待したい。

2. 本稿の原点となる疑問

実用システムに供される、最も一般的と言える適応アルゴリズムに学習同定法⁽¹⁾

$$\mathbf{H}_{t+1} = \mathbf{H}_t + \left(\frac{\mu}{\text{trace}[\mathbf{R}_t]} \right) \mathbf{x}_t \mathbf{e}_t \quad (1)$$

がある。この式と最小二乗法の逐次更新式

$$\mathbf{H}_{j+1} = \mathbf{H}_j + \mathbf{R}_j^{-1} \mathbf{x}_j e_j \quad (2)$$

の両右辺第2項を、まずは細かいところには目をつむって比較して頂きたい。両式には、自己相関行列の与え方として

$$\mathbf{R}_j = \sum_{t=0}^j \mathbf{R}_t \quad (3)$$

とする違いはあるものの、最小二乗法で実効される逆行列演算 $\mathbf{R}_j^{-1}$ が学習同定法では対角項の和 $\text{trace}[\mathbf{R}_t]$ による除算に置換えられている。LMS(Least Mean Square) 法

$$\mathbf{H}_{t+1} = \mathbf{H}_t + \lambda \mathbf{x}_t e_t \quad (4)$$

に至っては更に極端で、その逆行列演算は定数 λ による乗算に置き換えられている。ではなぜ、このような無茶とも思える置き換えが許されるのか。

その秘密は恐らく、逐次更新演算にあると思われる。しかし、その逐次更新演算の何が、どのような原理で逆行列演算を不要とするのか。式の構造から考えれば、その秘密は勾配ベクトル $\mathbf{x}_j e_j$ にあるとしか思えない。本稿では、その勾配ベクトルの何が逆行列演算を不要としたのか。その答えを、本稿では固有値や固有ベクトルを使わず、アルゴリズムを実際に構成する信号一つ一つの振舞いから分かるように示すつもりである。

これから行う本解説によって、必ずや、最急降下法型のアルゴリズムで逆行列演算が不要となる理由がはっきりとし、その結果として最小二乗法と最急降下法の間の断絶が埋められ、腑に落ちたと感じて頂けると確信している。そして、その適応アルゴリズムを構成する信号の一つ一つが、どのように未知の系のインパルス応答の算定に関わっているかを、実感して頂けると思う。しかし、その答えを示そうとする本稿は逆に、誤差曲面や勾配ベクトルを使った説明で十分に納得されている読者には混乱させるだけの、余計なお世話となるかもしれない。そのような読者にはあらかじめ、お詫びしておきたい。

3. フーリエ変換の利用

本稿は適応アルゴリズムとは関係がないと思われるフーリエ変換の利用から始められる。実際、適応アルゴリズムとは何かと考えたとき、その答えは、未知の系のインパルス応答を算定する技法ということができる。となれば、その算定は適応アルゴリズムでなくても行える。例えば、未知の系に印加される参照信号と出力信号のフーリエ変換を $x(\omega)$, $y(\omega)$ と計算して

$$h(\omega) = \frac{y(\omega)}{x(\omega)} = \frac{y(\omega)x^*(\omega)}{x(\omega)x^*(\omega)} \quad (5)$$

とおけば、この $h(\omega)$ の逆フーリエ変換として未知の系のインパルス応答は求められる。ここで $\{*\}$ は複素共役を表している。

この算定は、実システムで実行可能な離散フーリエ変換に置換えても同様に行える。未知の系のインパルス応答は

$$H(k) = \frac{\sum_M Y(k)X^*(k)}{\sum_M X(k)X^*(k)} \quad (6)$$

の逆離散フーリエ変換として得られる。この算定法をクロススペクトル法という。ここで、 $X(k)$ と $Y(k)$ は参照信号と出力信号の離散フーリエ変換の k 番目の要素、 M は加算項数である。このような方法があるのであれば、逆行列演算や、その近似が必要な適応アルゴリズムに出番はないように思われる。

実際、このクロススペクトル法は連立方程式法⁽¹⁵⁾を制御法とする能動騒音制御に適用されて加算項数 $M = 10$ として未知の系のインパルス応答が実用的に十分な精度で算定され、騒音低減が実現されている⁽¹⁶⁾。この例で加算項数が $M = 10$ と少なく済んでいる理由は、その応用例の構造が実質的にブロック実行型適応アルゴリズム⁽¹⁷⁾を構成している点にある。このような実例があっても現実問題として、このクロススペクトル法が適応アルゴリズムに代わって広く使われている様子はない。

その理由は、信号を周期信号とみなして実行される離散フーリエ変換で畳込みが円状となるところにある。一方の、時間領域で行われる畳込みは線状である。離散フーリエ変換を未知の系のインパルス応答の算定に利用するためには、その畳込みが周波数領域上でも線状となる操作を加える必要がある。しかし、その操作は異なる周波数成分間に相関を発生させる。クロススペクトル法に見られる累積加算は、その操作によって生じた相関を低減する目的で導入されている。この畳込みの影響に関する詳細は、本稿の最後の方で説明する。

4. 算術平均法

その利用の可否よりも、このクロススペクトル法は適応アルゴリズムの原理を考える上で重要なヒントを与えてくれている。実際、その原理は離散フーリエ変換で得られる、異なる周波数成分間で相関が低いことを利用して、それらを算術平均で低減するところにある。その原理に従えば、時間領域でも自己相関の低い参照信号を利用する場合に限定すれば、算術平均という単純な方法で未知の系のインパルス応答が算定できると期待される。このように、逆行列演算が不要になるという利点が得られるのであれば、その性能を確認しておく価値は十分にある。また、この逆行列演算を必要としない算術平均法を介して最小二乗法と最急降下法の間の断絶を埋める関係を示すことができれば、そこから最急降下法型のアルゴリズムで逆行列演算が回避できる秘密も明らかになると期待される。

この算術平均法はクロススペクトル法と同様、未知の系の出力信号を y_t 、未知の系と並列接続される適応フィルタの m 番目のタップ出力を $x_t(m)$ と置いて

$$H_{j+1}(m) = \frac{\sum_{t=0}^j y_t x_t(m)}{\sum_{t=0}^j x_t(m) x_t(m)} \quad (7)$$

と表すことができる。ここで、 t は時刻、 $H_{j+1}(m)$ は時刻 j において算定される適応フィルタの m 番目の係数である。実際、この方法でも参照信号 x_t が無相関と仮定できるならば、観測時間 j を十分に長く取ることによってインパルス応答の m 番目の標本値 $h(m)$ は、タップ数が I の適応フィルタの m 番目の係数

$$\begin{aligned}
H_{j+1}(m) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\sum_{t=0}^j y_t x_t(m)}{\sum_{t=0}^j x_t(m) x_t(m)} \\
&= h(m) + \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\sum_{t=0}^j \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq m}}^{I-1} h(i) x_t(i) x_t(m)}{\sum_{t=0}^j x_t(m) x_t(m)} = h(m) \quad (8)
\end{aligned}$$

として算定されることは明らかである。

この算術平均法の有効性及び正当性は、適応アルゴリズムの基本となる最小二乗法との比較によって確認することができる。この算術平均法が適応アルゴリズムの一つと言えるならば、最小二乗法と何らかの近似の関係で結び付いていると考えられる。その近似の関係をjを知るために、算術平均法を記述する式(7)を、読者になじみのベクトル表記で表せば

$$\mathbf{H}_{j+1} = \hat{\mathbf{R}}_j^{-1} \mathbf{p}_j \quad (9)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_j &= \sum_{t=0}^j y_t \mathbf{x}_t \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{t=0}^j y_t x_t(0) & \cdots & \sum_{t=0}^j y_t x_t(I-1) \end{bmatrix}^T \quad (10)
\end{aligned}$$

は相互相関ベクトル、 $\hat{\mathbf{R}}_j^{-1}$ は自己相関行列

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_j &= \sum_{t=0}^j \mathbf{x}_t \mathbf{x}_t^T \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{t=0}^j x_t(0)x_t(0) & \cdots & \sum_{t=0}^j x_t(0)x_t(I-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{t=0}^j x_t(I-1)x_t(0) & \cdots & \sum_{t=0}^j x_t(I-1)x_t(I-1) \end{bmatrix} \quad (11)
\end{aligned}$$

に対して非対角項が無視できるとして構成した対角行列

$$\hat{\mathbf{R}}_j = \text{diag} \left[\sum_{t=0}^j x_t(0)x_t(0) \cdots \sum_{t=0}^j x_t(I-1)x_t(I-1) \right] \quad (12)$$

の逆行列である。一方の最小二乗法は

$$\mathbf{H}_{j+1} = \mathbf{R}_j^{-1} \mathbf{p}_j \quad (13)$$

と表される。明らかに、算術平均法は参照信号の自己相関行列の非対角項が $j \rightarrow \infty$ において対角項と比較して無視できるとして $\mathbf{R}_j \approx \hat{\mathbf{R}}_j$ と近似し、それによって逆行列演算を回避する最小二乗法になっていると言える。

この「非対角項は無視できる」とする近似の強引さは、最小二乗法を要素で表現して比較すれば、更にはっきりとする。以上のベクトル表記された最小二乗法を

$$\mathbf{R}_j \mathbf{H}_{j+1} = \mathbf{p}_j \quad (14)$$

と書き換え、算術平均法と同じ m 番目の係数 $H_j(m)$ を更新す

図1 算術平均法の収束特性
(a) 学習同定法、(b) 算術平均法

る要素表記をすれば

$$\begin{aligned}
H_{j+1}(m) &= \frac{\sum_{t=0}^j x_t(m) x_t(m) + \sum_{t=0}^j \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq m}}^{I-1} H_{j+1}(i) x_t(i) x_t(m)}{\sum_{t=0}^j x_t(m) x_t(m)} \\
&= \sum_{t=0}^j y_t x_t(m) \quad (15)
\end{aligned}$$

となる。一方の算術平均法は式(7)の分母を払って

$$H_{j+1}(m) \sum_{t=0}^j x_t(m) x_t(m) = \sum_{t=0}^j y_t x_t(m) \quad (16)$$

と表される。明らかに、算術平均法には最小二乗法にある左辺第2項がない。この両者の比較から、各種ある適応アルゴリズムは算術平均法と最小二乗法の中間にあって、その違いは第2項の与え方にあると推測される。

このような、たとえ強引な近似ではあっても、結果さえ満足できるものが得られれば問題はない。図1は、その算術平均法が与える収束特性を示している。ただし、その収束特性は推定誤差

$$E_j = 10 \log_{10} \frac{(\mathbf{h} - \mathbf{H}_j)^T (\mathbf{h} - \mathbf{H}_j)}{\mathbf{h}^T \mathbf{h}} \quad (17)$$

の推移として示されている。ここで、

$$\mathbf{h} = [h(0) \ h(1) \ \cdots \ h(I-1)]^T \quad (18)$$

は要素数を I とする未知の系のインパルス応答ベクトル、

$$\mathbf{H}_j = [H_j(0) \ H_j(1) \ \cdots \ H_j(I-1)]^T \quad (19)$$

は時刻 j において適応フィルタに設定される係数ベクトルである。その他の条件は以下のとおりである。

- 未知の系のインパルス応答の標本値：指数減衰正規乱数
- 同未知の系のパワー利得：1
- 参照信号：白色雑音
- 外乱：白色雑音
- 参照信号對外乱のパワー比：40 dB
- 学習同定法に与えるステップサイズ： $\mu = 1.0$

この図1に示す結果によれば、その収束特性は適応アルゴリズムとして一般的な学習同定法と比較して大きく劣っている。推定誤差の減少も-20 dB程度にとどまっている。そうではあって

も、未知の系のインパルス応答は一応は推定されている．このように算術平均法でも適応アルゴリズムとしての要件は最低限満たされていると言える．しかし、収束は遅い．しかも参照信号に自己相関がある場合は使えない．

5. 係数再利用法

この算術平均法で収束が遅い原因は明白である．その原因は、式 (8) 右辺第 2 項を構成する自己相関行列の非対角項から成る成分の減少が遅いことにある．これを何らかの方法で速く、小さくすることができれば、収束速度は向上すると推測される．その方法として、算定した係数の再利用が考えられる．実際、算術平均法に対して適応フィルタのタップ出力を利用する以下の置換えが、実効性をもって可能である．

$$H_{j+1}(m) = \frac{\sum_{t=0}^j \left\{ y_t - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq m}}^{I-1} H_t(i) x_t(i) \right\} x_t(m)}{\sum_{t=0}^j x_t(m) x_t(m)} \\ = h(m) + \frac{\sum_{t=0}^j \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq m}}^{I-1} \Delta_t(i) x_t(i) x_t(m)}{\sum_{t=0}^j x_t(m) x_t(m)} \quad (20)$$

ここで、

$$\Delta_t(i) = h(i) - H_t(i) \quad (21)$$

と置いている．明らかに、この式 (20) と式 (8) の第 2 項の分子を構成する $\Delta_t(i)$ と $h(i)$ に対して

$$|\Delta_t(i)| \leq |h(i)| \quad (22)$$

なる関係が成り立つならば、この係数を再利用する方法 (以下、係数再利用法と呼ぶ) において第 2 項は算術平均法よりも小さくなる．実際、この関係の成立は係数の更新が進めば十分に期待できる．また、参照信号が自己相関を持つ場合も誤差の減少

$$|\Delta_t(i)| \leq |\Delta_{t-1}(i)| \quad (23)$$

が期待できるならば、係数は収束する．

問題は、このように係数を再利用する構造としたときに、再利用する係数に関して循環が生じることである．算定された係数は、次の時刻で隣接する係数の更新に利用され、更に続く時刻で元の係数の更新式に戻る．係数再利用法では、この循環によっても誤差としての第 2 項は増加しないことが求められる．この例において大まかに言えば、参照信号が無相関の場合、第 2 項の平均的な大きさは $(I-1)/j$ に減少することから、その循環によっても $j > (I-1)$ において増加することはない． $j \leq (I-1)$ については適応フィルタの係数の初期設定を 0 とすることなどで発散を防止することができる．この係数の循環によっても第 2 項が発散しない条件 (収束条件) については、固有値や固有ベクトルを使わない方法で詳しく後で説明する．

図 2 係数再利用法の収束特性
(a) 学習同定法、(c) 係数再利用法

次に、この係数再利用法の最小二乗法に対する近似の程度を確認する．その確認は算術平均法と同様、式 (20) の分母を払って同分子第 2 項を左辺に移し、

$$H_{j+1}(m) \sum_{t=0}^j x_t(m) x_t(m) + \sum_{t=0}^j \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq m}}^{I-1} H_t(i) x_t(i) x_t(m) \\ = \sum_{t=0}^j y_t x_t(m) \quad (24)$$

と書き換えることで行える．明らかに、算術平均法にはなかった第 2 項が係数の再利用によって左辺に追加されている．

この構造で重要なことは、追加された第 2 項が過去に算定した係数 $H_0(i)$, $H_j(1)$, $\dots$, $H_j(i)$ と自己相関行列の非対角項の積として与えられている点である．このように、過去に算定した係数を乗じて構成した第 2 項の右辺への移項は実効性をもって可能である．この第 2 項を右辺に移項できれば逆行列演算は回避される．一方、最小二乗法では、その第 2 項には現時刻で未算定の係数 $H_{j+1}(i)$ が使用される．当然ながら、この未算定の係数 $H_{j+1}(i)$ を含む第 2 項の右辺への移項に実効性はない．このような構造の更新式では係数の算定は逆行列演算を実行するしかない．ここから、最急降下法で逆行列演算が回避できる秘密は算定済み係数による未算定係数の置換え (係数の再利用)、それによる非対角項の右辺への移項の実現にあると推測される．

このように自己相関行列の非対角項を更新式に組み入れた係数再利用法では、最小二乗法に対する近似の度合いが算術平均法よりも高くなることから、それによる収束速度の向上が期待できる．図 2 は係数再利用法が与える収束特性を示している．シミュレーションの条件は図 1 と同じである．明らかに、係数再利用法の収束特性は算術平均法よりも改善されている．それでも、学習同定法と比較すれば収束速度は大きく劣っている．この係数再利用に関して、収束速度に対する改善の余地はまだほかにありそうである．

その改善法を見いだすために式 (20) の第 2 項を詳しく見れば、係数更新の初期の段階で生じる大きな $\Delta_t(i)$ が消えずに、そのまま累積加算内に残り続けていることに気付く．その残留は第 2 項減少の妨げとなる．ここから、その古くて大きい $\Delta_t(i)$ の残留が収束を遅らせる原因になっていると推測される．このことは逆に、この古くて大きい $\Delta_t(i)$ を累積加算内から素早く排

出すことができれば係数の収束は速められることを意味する．その推定誤差 $\Delta_t(i)$ の排出法として以下の三つが考えられる．

- (I) 最新の係数 $H_j(i)$ だけを再利用する．
 - (II) 古くて大きい $\Delta_t(i)$ を指数減衰させて排出する．
 - (III) 係数更新をブロック単位で実行して $\Delta_t(i)$ を排出する．
- この三つの排出法から亜逐次最小二乗法^{(4) (5)}、低域フィルタ法(学習同定法)、個別正規化 LMS 法^{(2) (3)}がそれぞれ導かれる．

6. 亜逐次最小二乗法

この排出法 (I) の、最新の係数だけを再利用する収束の高速化アルゴリズムは、第 2 項の $H_t(i)$ を $H_j(i)$ と置換えることで

$$\begin{aligned} H_{j+1}(m) &= \sum_{t=0}^j x_t(m)x_t(m) + \sum_{t=0}^j \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq m}}^{I-1} H_j(i)x_t(i)x_t(m) \\ &= \sum_{t=0}^j y_t x_t(m) \end{aligned} \quad (25)$$

と得られる．このアルゴリズムと最小二乗法の要素表現式 (15) と比較して、違いはこの左辺第 2 項に設定される係数が

$$H_{j+1}(i) \rightarrow H_j(i) \quad (26)$$

と置換えられているところだけである．当然ながら、この算定した係数から構成される左辺第 2 項は右辺に移項することができ、係数は逆行列演算を必要とすることなく、

$$H_{j+1}(m) = \frac{\sum_{t=0}^j y_t x_t(m) - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq m}}^{I-1} H_j(i) \sum_{t=0}^j x_t(i)x_t(m)}{\sum_{t=0}^j x_t(m)x_t(m)} \quad (27)$$

と更新することができる．この係数更新法を亜逐次最小二乗法、Sub-RLS(Recursive Least Square) 法と呼ぶ．これをベクトル表記した結果が

$$H_{j+1} = \hat{R}_j^{-1} (p_j - S_j H_j) \quad (28)$$

である．この式は右辺に $H_j - H_j$ を加えることで

$$H_{j+1} = H_j + \hat{R}_j^{-1} (p_j - R_j H_j) \quad (29)$$

と変形することもできる．ここで、

$$S_j = R_j - \text{diag}[R_j] = R_j - \hat{R}_j \quad (30)$$

は自己相関行列から対角項を除いた行列として与えられる．

この亜逐次最小二乗法と最小二乗法との関係を明らかにするために、式 (28) の両辺に対角行列 $\hat{R}_j$ を乗じて

$$\hat{R}_j H_{j+1} = p_j - S_j H_j \quad (31)$$

と置き、右辺第 2 項を左辺に移行して

$$\hat{R}_j H_{j+1} + S_j H_j = p_j \quad (32)$$

と変形する．一方、最小二乗法に対して自己相関行列を、対角項

から成る行列 $\hat{R}_j$ と非対角項から成る行列 S_j に分けて表せば

$$\hat{R}_j H_{j+1} + S_j H_{j+1} = p_j \quad (33)$$

が得られる．明らかに、違いは左辺第 2 項において $H_{j+1} \rightarrow H_j$ と置換えられているところだけである．

この両左辺第 2 項の比較からも、亜逐次最小二乗法とは自己相関行列の非対角項に乘じる未算定の H_{j+1} を、1 時刻前に得られた算定済みの H_j で近似することによって右辺への移項を可能にし、その移項によって逆行列演算を回避する最小二乗法と分かる．この近似に関する詳細な考察結果と収束条件については文献 5) を参照して頂きたい．

7. 亜逐次最小二乗法の収束特性

問題は収束特性である．図 3 は亜逐次最小二乗法と、最小二乗法の逐次更新型 (RLS と表示) について得られた収束特性の比較である．ここで、未知の系のインパルス応答の標本値は、指数減衰させない正規乱数で与え、適応フィルタのタップ数を 128、そのほかの条件を図 2 と同じとしている．また、図 4 は未知の系のインパルス応答の標本値として指数減衰する正規乱数を与えて得られた収束特性の比較である．両アルゴリズムの間にほとんど差がないことが分かる．この結果からも亜逐次最小二乗法において与えた近似

$$S_j H_{j+1} \approx S_j H_j \quad (34)$$

は無理な近似ではないと分かる．しかも、逆行列演算を

図 3 亜逐次最小二乗法の収束特性

図 4 亜逐次最小二乗法の収束特性 (未知の系のインパルス応答の標本値：指数減衰正規乱数)

図 5 忘却係数を導入した亜逐次最小二乗法の収束特性

$$\mathbf{R}_j^{-1} = \mathbf{R}_{j-1}^{-1} \mathbf{x}_j \left(1 + \mathbf{x}_j^T \mathbf{R}_{j-1}^{-1} \mathbf{x}_j \right)^{-1} \mathbf{x}_j^T \mathbf{R}_{j-1}^{-1} \quad (35)$$

と展開することで逆行列演算を実質的に回避する構造の逐次最小二乗 (RLS: Recursive Least Square) 法と比較しても、亜逐次最小二乗法を構成する式 (28) は簡素で単純である。

当然ながら、この亜逐次最小二乗法にも忘却係数を設定することができる。自己相関行列の各要素を係数

$$\alpha = 1 - \mu / I \quad (36)$$

の一次巡回型フィルタの出力として算定すればよい。ここで、 μ は学習同定法のステップサイズと同じと考えてよい。図 5 は忘却係数 α に対して $\mu = 1$ と与えて計算した亜逐次最小二乗法と逐次最小二乗法、学習同定法 (NLMS) の収束特性を示している。ただし、学習同定法に対してはステップサイズとして同じ $\mu = 1$ を与えている。そのほかの条件は図 3 と同じである。

この検証に際して設定した忘却係数は逐次最小二乗法に対して未知の系の特性変動への追従性の向上を目的として導入されている。その追従性の検証も兼ねて、この例では未知の系のインパルス応答の極性 (±) を $j = 512$ の時点で反転させ、系変動としている。この結果から、忘却係数を式 (36) のように与えれば、系変動後の特性は学習同定法と同等となることが分かる。ただし、この系変動後の特性が学習同定法と同等との結果は、式 (36) として与えた忘却係数の効果を確認するために参照信号を白色雑音とした場合の結果であることに注意が必要である。

図 6 と図 7 は忘却係数を変えて得られた亜逐次最小二乗法と逐次最小二乗法の収束特性を示している。この結果から両アルゴリズムは共に、 $\mu \geq 2$ とすれば収束特性は不安定性を増し、推定誤差も増加することが分かる。この二つの結果から、両アルゴリズムについて忘却係数は学習同定法と同様のステップサイズの範囲 $0 < \mu < 2$ 、できれば $0 < \mu \leq 1$ の範囲から選んで与えることが望ましいと言える。

もう一つ、自己相関の強い参照信号について得られた興味深い結果も示されている。その結果を図 8 に示す。この結果は、

$$G(z) = \frac{1}{1 - 2\gamma \cos \theta z^{-1} + \gamma^2 z^{-2}} \quad (37)$$

を伝達関数とする二次巡回型フィルタに白色雑音を印加して得ら

図 6 忘却係数を導入した亜逐次最小二乗法の収束特性
(1) $\mu = 0$ (2) $\mu = 1$ (3) $\mu = 2$ (4) $\mu = 6$ (5) $\mu = 8$

図 7 忘却係数を導入した逐次最小二乗法の収束特性
(1) $\mu = 0$ (2) $\mu = 1$ (3) $\mu = 2$ (4) $\mu = 8$ (5) $\mu = 12$

図 8 参照信号を擬似ジェットファン騒音としたときの亜逐次最小二乗法で得られる収束特性

れる擬似ジェットファン騒音を参照信号として計算されている。その他の条件は図 5 と同じである。ここで、 $\gamma = 0.9$ 、 $\theta = \pi/4$ としている。また、後者の $\theta = \pi/4$ は標準化周波数 8kHz で共振周波数 1kHz に相当する。

図9 低域フィルタの収束特性
(a) 学習同定法, (d) 低域フィルタ法

8. 低域フィルタ法 (学習同定法)

次に排出法 (II) として示された, $\Delta_t(i)$ を指数減衰させて排出する係数更新法を導くには, 式 (20) に定数 $\alpha < 1$ を導入して

$$H_{j+1}(m) = \frac{\sum_{t=0}^j \left\{ y_t - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq m}}^{I-1} H_t(i) x_t(i) \right\} x_t(m) \alpha^{j-t}}{\sum_{t=0}^j x_t(m) x_t(m) \alpha^{j-t}} \quad (38)$$

と書き換えればよい. この係数更新法を本稿では低域フィルタ法と呼ぶ. 明らかに, この右辺の分子において過去の係数が $H_0(m)\alpha^j, H_1(m)\alpha^{j-1}, \dots, H_j(m)$ と指数減衰されて加算されていることが分かる. これによって誤差の大きい古い係数が排出され, 係数再利用法よりも収束速度が向上すると期待される. この低域フィルタ法と最小二乗法の比較は, 右辺の分母を払って係数再利用法と同様に行える. その説明は省略する.

図9は低域フィルタ法によって得られた収束特性である. この低域フィルタ法では推定初期, 例えば $t = 0$ において分子が $\sum_{i=0}^{I-1} h(i)x_0(i)x_0(m)$ として分母 $x_0(m)x_0(m)$ よりも大きくなって係数を発散させる. その発散を防止するために, 図9のシミュレーションではタップ数に等しい $t = 512$ となるまで係数更新を実行していない. その停止期間分の遅れが図9の収束特性に現れている. この点を除けば, 収束特性は学習同定法と同じである. このことから低域フィルタ法は学習同定法と強く関係していると推測される.

実際, この低域フィルタ法は簡単に学習同定法に変形することができる. まず, 低域フィルタ法も, その最終目的は未知の系のインパルス応答の標本値を適応フィルタの係数として取り出すことにある点に着目する. ここに着目すれば, その標本値 $h(m)$ は $\sum_{t=0}^j x_t(m)x_t(m)\alpha^{j-t}$ による除算でなくても, 0 による除算の可能性を無視すれば, その除算を累積加算内における $x_t(m)x_t(m)$ による除算に置換えることで,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (1 - \alpha) \sum_{t=0}^j \frac{y_t x_t(m)}{x_t(m) x_t(m)} \alpha^{j-t}$$

$$= h(m) + \lim_{j \rightarrow \infty} (1 - \alpha) \sum_{t=0}^j \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq m}}^{I-1} \frac{h(i) x_t(i) x_t(m)}{x_t(m) x_t(m)} \alpha^{j-t} \quad (39)$$

として取り出すことができる. ここで, 上記累積加算の前で実行される $1 - \alpha$ の乗算は累積加算の利得を 1 として標本値 $h(m)$ を正しい大きさで取り出すための利得調整用である.

そこで, この $x_t(m)x_t(m)$ による除算と $1 - \alpha$ による利得調整を, 低域フィルタ法を与える式 (38) に適用すれば

$$\begin{aligned} H_{j+1}(m) &= (1 - \alpha) \sum_{t=0}^j \frac{y_t - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq m}}^{I-1} H_t(i) x_t(i)}{x_t(m) x_t(m)} x_t(m) \alpha^{j-t} \\ &= \alpha H_j(m) + (1 - \alpha) \frac{y_j - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq m}}^{I-1} H_j(i) x_j(i)}{x_j(m) x_j(m)} x_j(m) \\ &= \{H_j(m) - H_j(m)\} \\ &\quad + \alpha H_j(m) + (1 - \alpha) \frac{y_j - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq m}}^{I-1} H_j(i) x_j(i)}{x_j(m) x_j(m)} x_j(m) \\ &= H_j(m) + (1 - \alpha) \frac{y_j - d_j}{x_j(m) x_j(m)} x_j(m) \\ &= H_j(m) + (1 - \alpha) \frac{e_j x_j(m)}{x_j(m) x_j(m)} \end{aligned} \quad (40)$$

と変形できる. 次いで, 推定誤差を指数減衰させる定数 α をタップごとに異なる

$$\alpha_j(m) = 1 - \mu \frac{x_j(m) x_j(m)}{\sum_{i=0}^{I-1} x_j(i) x_j(i)} \quad (41)$$

で置換える. これによって低域フィルタ法は

$$H_{j+1}(m) = H_j(m) + \mu \frac{e_j x_j(m)}{\sum_{i=0}^{I-1} x_j(i) x_j(i)} \quad (42)$$

と書き換えられる. これは学習同定法による m 番目のタップ係数の更新式を与えている. ここで, μ はステップサイズ,

$$e_j = y_j - u_j \quad (43)$$

は出力誤差である.

この学習同定法は, 逆行列演算を必要としない再急降下法型のアロリズムの一つで, 更に言えば, 係数再利用法の一つでもある. その係数再利用法は, 最小二乗法において自己相関行列の非対角項に乘じられる未算定の係数を, 算定済みの係数で置換えることによって右辺への移項を可能にして逆行列演算を回避している. その右辺への移項を実質的に構成するのが出力誤差 e_j である. 最急降下法で逆行列演算を不要とする操作は, 係数更新に出力誤差を用いることによって自己相関行列の非対角項に乘じる係数を算定済みの係数とし, それによって可能となった非対角項の右辺への移項ということになる.

9. 個別正規化 LMS 法

残る排出法 (III) からは、推定誤差をブロック単位で排出する個別正規化 LMS 法

$$H_{n+1}(m) = H_n(m) + \frac{\sum_{j=nJ}^{(n+1)J-1} e_j x_j(m)}{\sum_{j=nJ}^{(n+1)J-1} x_j(m)x_j(m)} + \frac{\sum_{j=nJ}^{(n+1)J-1} \left\{ y_j - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq m}}^{I-1} H_j(i)x_j(i) \right\} x_j(m)}{\sum_{j=nJ}^{(n+1)J-1} x_j(m)x_j(m)} \quad (44)$$

が導かれる。この更新法の採用によって、古くて大きい推定誤差はブロックの移動に伴って係数更新から排除される。しかし、この式は分かり難い。ほかのアルゴリズムと比較しやすいように、右辺に $H_n(m) - H_n(m)$ を加えて以下のように変形する。

$$H_{n+1}(m) = H_n(m) + \frac{\sum_{j=nJ}^{(n+1)J-1} e_j x_j(m)}{\sum_{j=nJ}^{(n+1)J-1} x_j(m)x_j(m)} \quad (45)$$

ここで、ステップサイズ ρ を導入して

$$\mu = \rho I / J \quad (46)$$

と与えれば、学習同定法と同様の構造の

$$H_{n+1}(m) = H_n(m) + \rho \frac{\sum_{j=nJ}^{(n+1)J-1} e_j x_j(m)}{\sum_{j=nJ}^{(n+1)J-1} x_j(m)x_j(m)} \quad (47)$$

が得られる。これをベクトル表記すれば

$$\mathbf{H}_{n+1} = \mathbf{H}_n + \rho \left(\sum_{j=nJ}^{(n+1)J-1} \hat{\mathbf{R}}_j \right)^{-1} \sum_{j=nJ}^{(n+1)J-1} e_j \mathbf{x}_j \quad (48)$$

となる。ただし、 $\hat{\mathbf{R}}_j^{-1}$ は対角行列

$$\hat{\mathbf{R}}_j = \text{diag} \left[x_j(0)x_j(0) \quad \cdots \quad x_j(I-1)x_j(I-1) \right] \quad (49)$$

の逆行列である。このように表される適応アルゴリズムを個別正規化 LMS 法と呼ぶ⁽²⁾⁽³⁾。また、再利用によって循環する係数が発散しないように、ブロック長 J はタップ数 I に対して $J \geq I$ となるように選ぶ必要がある。例えば、 $J = I$ とした場合においてステップサイズは $\rho = \mu$ となって、収束特性は学習同定法に一致する。

10. 個別正規化 LMS 法の利点

このように収束特性が学習同定法と一致するならば、この個

図 10 固定小数点演算で起こる特性劣化

別正規化 LMS 法に利用価値はないように思われる。しかし、この個別正規化 LMS 法は実は固定小数点演算に適したアルゴリズムになっている。実際、学習同定法では係数更新に必要な

$$H_{j+1}(m) = H_j + \mu \Delta_j(m) \times \frac{x_j(m)x_j(m)}{\sum_{i=0}^{I-1} x_j(i)x_j(i)} + \mu \frac{\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq m}}^{I-1} \Delta_j(i)x_j(i)x_j(m)}{\sum_{i=0}^{I-1} x_j(i)x_j(i)} \quad (50)$$

の第 2 項の誤差 $\Delta_j(m)$ が平均して $1/I$ されるのに対して個別正規化 LMS 法では

$$H_{n+1}(m) = H_n + \mu \Delta_n(m) + \mu \frac{\sum_{j=nJ}^{(n+1)J-1} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq m}}^{I-1} \Delta_j(i)x_j(i)x_j(m)}{\sum_{j=nJ}^{(n+1)J-1} x_j(i)x_j(i)} \quad (51)$$

と小さくならずに加算される。

図 10 は 16bit 固定小数点演算で実行した学習同定法の収束特性を示している。ただし、 $I = 512$ 、参照信号対外乱のパワー比を 20 dB、また、固定小数点演算で不可欠なレベル調整に設計技量の差が入り込まないように、学習同定法における係数更新量 (第 2 項) は浮動小数点で計算した後に 16bit 固定小数点に変換するようにしている。また、図に示す数値はステップサイズである。このようにステップサイズを小さく与えたときに固定小数点演算では学習同定法は理論どおりの特性を与えないことが分かる。

一方、図 11 はステップサイズを 0.01 とし得られた個別正規化 LMS 法 (INLMS と表示) の収束特性である。ただし、個別正規化 LMS 法では全て 16bit 固定小数点で計算し、分母がオーバーフローしないようにレベル調整を行っている。学習同定法 (NLMS と表示) については図 10 と同様、浮動小数点で計算した後に固定小数点に変換している。この結果において個別正規化 LMS 法に僅かの劣化が認められるものの、浮動小数点で計算した学習同定法とほぼ同等の特性が得られていることが分かる。

図 11 個別正規化 LMS 法の収束特性 (16bit 固定小数点演算)

以上のシミュレーションに対して、このように小さなステップサイズが適用されることは現実にはないとの疑問もあり得る。しかし、例えば能動騒音制御システムでは適応アルゴリズムとして Filtered-x 法が一般に採用される。この Filtered-x 法に対しては動作を安定させるためにステップサイズを、この例の程度に小さく抑える必要がある。実際、個別正規化 LMS 法を適用することでプロセッサを、これまで使われていた浮動小数点型から 16bit 固定小数点型に置換えて低価格化と性能の向上を同時に実現させた実証報告もなされている⁽¹⁸⁾。

また、学習同定法では除算は全ての係数に共通しているのに対して、個別正規化 LMS 法では除算をタップごと個別に行う必要があるように見える。これは計算量を増加させる。そこで、その除算を学習同定法と同じように共通化して演算量の増加を抑える方法も提案され⁽²⁾、また、実システム⁽¹⁸⁾にも適用されて、その有効性が確認されている。

11. 自己相関による収束の遅れ対策

最急降下法型の適応アルゴリズムでは、自己相関の強い参照信号に対して係数の収束が遅れるという問題が指摘される。その原因は、収束の高速化法と同様、係数再利用法の係数更新式

$$H_{j+1}(m) = h(m) + \frac{\sum_{t=0}^j \left\{ \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq m}}^{I-1} \Delta_t(i) x_t(i) \right\} x_t(m)}{\sum_{t=0}^j x_t(m) x_t(m)} \quad (52)$$

の第 2 項から見いだされる。この構造で、参照信号に自己相関があれば $x_t(i)x_t(m)$ の期待値は 0 にならず、その相関分が $h(m)$ に加算されて長く残ることは明らかである。このことは逆に、分子の累積加算に参照信号の自己相関分が残らない対策を採れば、収束が高速化されるということでもある。この点に注意して上記第 2 項を眺めれば、この分子に対して設計者が操作可能な信号として $x_t(m)$ があることに気付く。

一方、線形予測分析は参照信号に対して自己相関分が低減された予測残差を生成する。そこで、その予測残差 $x'_t(m)$ を $x_t(m)$ に代えて係数再利用法の係数更新式に適用すれば、その更新式

$$H_{j+1}(m) = h(m) + \frac{\sum_{t=0}^j \left\{ \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq m}}^{I-1} \Delta_t(i) x_t(i) \right\} x'_t(m)}{\sum_{t=0}^j x_t(m) x_t(m)} \quad (53)$$

の第 2 項の分子にある $x_t(i)$ と $x'_t(m)$ の相関は小さくなって分子に残る量が減少し、係数の収束が速められると期待される⁽⁶⁾。

同様の効果は、もう一つの成分 $x_t(i)$ を予測残差 $x'_t(i)$ で置換えることでも得られると推測される。例えば、適応フィルタの係数更新の速度は緩やかであって短い時間で見れば推定誤差 $\Delta_t(i)$ は定数とみなせるとしたとき、参照信号 x_j に適用して得られた線形予測フィルタを出力誤差 e_j に適用すれば

$$e'_j = \sum_{i=0}^{I-1} \Delta_j(i) x'_j(i) \quad (54)$$

が得られる。これを学習同定法に適用して

$$\begin{aligned} H_{j+1}(m) &= H_j(m) + \mu \frac{e'_j x_j(m)}{\sum_{i=0}^{I-1} x_j(i) x_j(i)} \\ &= H_j(m) + \mu \frac{\sum_{i=0}^{I-1} \Delta_j(i) x'_j(i) x_j(m)}{\sum_{i=0}^{I-1} x_j(i) x_j(i)} \end{aligned} \quad (55)$$

と変形したとき、明らかに $x'_j(i)$ と $x_j(m)$ の相関は小さくなって係数の収束が速められると期待される。

問題は、未知の系の出力に外乱 n_j が重畳するときに起こる。この場合、上記線形予測分析を適用して得られる出力誤差は

$$e'_j = \sum_{i=0}^{I-1} \Delta_j(i) x'_j(i) + n'_j \quad (56)$$

と書き換えられる。ここで、 n'_j は外乱 n_j に同様の線形予測分析を適用した結果の外乱成分である。当然ながら、上式において $x'_j(i)$ のパワーは $x_j(i)$ よりも小さく、線形予測分析を適用された外乱のパワーは一般には減少しない。これは参照信号對外乱のパワー比が低下することを意味する。この場合、通常の学習同定法と同等の推定誤差をもって適応フィルタの係数を収束させるためにはステップサイズを小さく与える必要がある。これは収束速度を低下させる結果となって、線形予測分析の適用による高速化効果を小さくする。

12. EE' 法

以上の置換えを学習同定法に適用して得られた適応アルゴリズムの一つが

$$H_{j+1} = H_j + \mu \frac{e_j x'_j}{x_j^T x'_j} \quad (57)$$

であり、EE' 法⁽⁷⁾と呼ばれている。あと一つが

$$H_{j+1} = H_j + \mu \frac{e_j x'_j}{x_j^T x_j} \quad (58)$$

図 12 EE' 法の収束特性: (a) 学習同定法, (2) $EE'(x_j(m)x'_j(m) < 0$ となる割合 0.366), (c) $EE'(x_j(m)x'_j(m) < 0$ となる割合 0.0944)

であり, 修正 EE' 法⁽⁸⁾と呼ばれている. その違いは勾配ベクトルを正規化する分母の構造だけである. このように正規化分母に強い制約はなく, 再利用係数の循環による発散が防げばよい. 分母を $x_j^T x_j$ とする方が収束条件の導出が簡単になる⁽⁸⁾.

当初, この両アルゴリズムは上記のように係数再利用法の変形として導かれた⁽⁶⁾. この二つのアルゴリズムが導出された原理を更に発展させ, そこから新しい適応アルゴリズムが見いだせるように, 両アルゴリズムを導く評価関数を明らかにすることも重要である. また, それによって両アルゴリズムの正当性も示すことができる. その結果だけを示すと, その評価関数は

$$\varepsilon = e_j e'_j \quad (59)$$

となる⁽⁸⁾. ここで, e'_j は予測誤差 x'_j を参照信号として得られる仮想的な出力誤差で, 実際には生成されない. このように, 実際には生成されない仮想的な信号を含む評価関数から導かれた適応アルゴリズムであっても正常に, また安定に動作することが保証できるのであれば, あるいは, その保証を与える条件に無理がなければ, ほかの様々な仮想出力誤差で構成された評価関数に基づく適応アルゴリズムの構築が可能となる.

また, この EE' 法の収束条件はステップサイズに関する条件としての

$$0 < \mu < 2 \quad (60)$$

と, 係数更新を実行する係数に制限を加える

$$x_j(m)x'_j(m) > 0 \quad (61)$$

の二つが導かれている. この第 2 の条件は係数 $H_j(m)$ に関する誤差曲面が下に凸となる条件となっている. EE' 法では, この二つの条件が同時に満たされるときに係数の収束が保証される. 一般に, 下に凸とならない場合がある評価関数から導かれる適応アルゴリズムでは, その収束条件としてステップサイズの範囲に加えて評価関数を下に凸とする条件が追加される.

図 12 は, 式 (61) の条件を満たさないときは係数更新を実行しない操作を加えて得られた EE' 法の収束特性を示している. そのシミュレーションの条件を以下に示す.

- 適応フィルタの初期設定係数: 極性を反転させた未知の

系のインパルス応答 (系変動を想定)

- EE' 法に適用されるステップサイズ: $\mu = 0.33$
- 学習同定法に適用されるステップサイズ: $\mu = 1.0$
- 線形予測誤差フィルタ: タップ数が 8 の非巡回型フィルタ
- 同フィルタの係数更新アルゴリズム: ステップサイズを 0.01 とする学習同定法
- 外乱: 白色雑音
- 参照信号対外乱のパワー比: 30 dB

その他の条件は図 1 と同じである.

この図に示す三つの収束特性のうち, (a) は学習同定法, (b) は EE' 法で $x_j(m)x'_j(m) < 0$ となる割合が 0.366, (c) は同割合が 0.0944 となった時点で予測係数の更新を停止して得られた収束特性である. 明らかに, 線形予測の精度が上がって $x_j(m)x'_j(m) < 0$ となる割合が高くなったときに, その収束特性は学習同定法と変わらず, 線形予測の精度を低い段階にとどめたときに収束速度は向上している. このような $x_j(m)x'_j(m) < 0$ の監視による更新停止操作を EE' 法は必要とする. また, その係数の収束速度を高く保つためには, 適応フィルタの全係数の 10% 程度が更新停止となった時点で, 線形予測係数の更新を実行しない処置を取る必要がある.

13. $E\tilde{E}$ 法

この $x_j(m)x'_j(m) < 0$ となる割合が低い段階で予測係数の更新を停止する処理が不要な適応アルゴリズムとして EE' 法を改良した $E\tilde{E}$ 法

$$H_{j+1} = H_j + \mu \frac{e_j \tilde{x}_j}{x_j^T \tilde{x}_j} \quad (62)$$

がある⁽⁹⁾. ここで,

$$\tilde{x}_j = x_j + x'_j \quad (63)$$

である. このアルゴリズムも EE' 法と同様, $\tilde{x}_j$ を参照信号として得られる出力誤差 $\tilde{e}_j$ と組み合わせた

$$\varepsilon = e_j \tilde{e}_j \quad (64)$$

を評価関数として導かれる.

この $E\tilde{E}$ 法についても, その評価関数から分かるように勾配ベクトルが誤差を常に最小化させる方向に向く保証はない. EE' 法と同様, 勾配ベクトルが最小値の方向に向くのは相関行列

$$\tilde{R} = x_j \tilde{x}_j^T \quad (65)$$

の対角項が正となる

$$x_j(m)\tilde{x}_j(m) > 0 \quad (66)$$

となるときに限られる. また, ステップサイズの範囲としての収束条件は

$$0 < \mu < \frac{16}{9} = 1.78 \quad (67)$$

として導かれている.

ここで, この式 (66) として導かれた収束条件は, 線形予測の

図 13 EE' 法の収束特性。(a) 学習同定法 (NLMS), (b) 式 (66) が成り立つときだけ係数更新を実行する操作を加えた EE' 法, (c) 同操作を加えない EE' 法

精度に関して EE' 法と同様の問題を引き起こすように思われる。しかし、これを展開すれば

$$x_j(i)\tilde{x}_j(i) = x_j^2(i) + x_j(i)x'_j(i) > 0 \quad (68)$$

であり、この条件が満たされないのは

$$x_j(i)x'_j(i) \leq 0 \quad (69)$$

$$|x_j(i)| < |x'_j(i)| \quad (70)$$

が同時に成り立つときに限られる。このように EE' 法では EE' 法と比べて式 (70) が新たな条件として追加されたことになる。一般に、予測誤差 x'_j のパワーは参照信号 x_j のそれよりも小さいと期待される。この場合、式 (70) の条件が満たされて式 (66) の条件が満たされない割合、すなわち、適応フィルタの係数が更新されない割合は $e_j e'_j$ を評価関数とする EE' 法よりも低くなる。その結果、提案法における係数更新の頻度は高まり、予測係数の更新を停止する操作が不要になると期待される。

図 13 に示す (b) は図 12 と同じ条件の下で計算された EE' 法が与える係数の収束特性を示している。明らかに、本提案法によって収束時間が 6 割程度に短縮されている。ただし、 EE' 法に対してステップサイズを 0.7 としている。また、線形予測が完全に行われたとして予測残差には擬似ジェットファン騒音を生成する二次巡回型フィルタに入力信号として与えた白色雑音を用いている。

この例において、式 (66) の条件が満たされない割合は、同じ条件の下で計算された図 12(b) に示す EE' 法の 0.366 と比べて、 EE' 法では線形予測が完全に行われた場合でありながらも 0.0996 と少ない。当然ながら、この割合が少なく、係数が更新される頻度が高い EE' 法において推定誤差の減少速度は向上する。同図 (c) はまた、式 (66) の条件が満たされないときも係数更新を実行する EE' 法で得られた推定誤差の減少特性を示している。明らかに、式 (66) の条件が満たされない割合が 0.0996 と小さいことから、係数更新の実行、不実行の切り換え操作の有無による影響はほとんど現れていない。

14. 種々の評価関数

以上のように、適応アルゴリズムを導く評価関数として

図 14 Sign Algorithm の収束特性

$$\varepsilon = e_j^2 \quad (71)$$

は必須の条件ではない。以上に与えた EE' 法の例は、未知の系に実際には印加されない信号を参照信号として得られる仮想的な出力誤差を評価関数に含めることも可能となることを示唆している。一方で、評価関数が下に凸となる条件を満たすときだけ、係数は誤差の最小値に向かって更新されるという制限があることも事実である。このことは逆に、下に凸となるならば、どのような構造の評価関数も利用できること、更には、その下に凸となる条件を満たすときに限定して係数を更新する制限を加えれば、評価関数が常時、下に凸となることを要求されないことを意味する。

ここで、評価関数が e_j^2 ではない、ほかによく知られたアルゴリズムをいくつか紹介しておく。以下に、その評価関数とアルゴリズムを示す。一つは、参照信号の極性だけを未知の系に印加して得られる仮想的な出力誤差 $\hat{e}_j$ と組み合わせた

$$\varepsilon = e_j \hat{e}_j \quad (72)$$

を評価関数とする signed regressor algorithm

$$\mathbf{H}_{j+1} = \mathbf{H}_j + \mu e_j \text{sgn}[\mathbf{x}_j] \quad (73)$$

である。このアルゴリズムは後に示す拡張性を考慮して本稿では Bi-quantized-x LMS 法と呼ぶ。ほかに

$$\varepsilon = \text{sgn}[e_j] e_j = |e_j| \quad (74)$$

を評価関数とする sign algorithm,

$$\mathbf{H}_{j+1} = \mathbf{H}_j + \mu \text{sgn}[e_j] \mathbf{x}_j \quad (75)$$

があり、

$$\varepsilon = \text{sgn}[e_j] \hat{e}_j \quad (76)$$

を評価関数とする sign-sign algorithm

$$\mathbf{H}_{j+1} = \mathbf{H}_j + \mu \text{sgn}[e_j] \text{sgn}[\mathbf{x}_j] \quad (77)$$

がある。

図 14 は sign algorithm の収束特性である。この結果を見ると、sign algorithm の収束特性は LMS 法と比べて良いとは言いがたい。応用を考えれば収束の初期においてこそ、速いことが

望ましい．また，収束後に推定誤差が上下に変動していることも問題である．この変動は収束条件から説明できる．

本稿は固有値や固有ベクトルを使わないで説明するようにしている．この sign algorithm の収束条件は以下の正規化を行うことによって固有値を用いなくて導くことができる．

$$\mathbf{H}_{j+1} = \mathbf{H}_j + \mu \frac{\text{sgn}[e_j] \mathbf{x}_j}{\text{abs}[\mathbf{x}_j]} \quad (78)$$

係数収束後の推定誤差の変動の理由を知るためには，この構造で検証すれば十分である．実際，その収束条件は単純なステップサイズの範囲として

$$0 < \mu < 2|e_j| \frac{\mathbf{x}_j^T \text{sgn}[\mathbf{x}_j]}{\mathbf{x}_j^T \mathbf{x}_j} \approx \frac{2|e_j|}{\sigma_x \sqrt{\gamma}} \quad (79)$$

と導かれる．ここで， σ_x は参照信号の平均振幅，

$$\gamma = \pi/2 \quad (80)$$

である．このように γ が現れる理由は $\text{abs}[\mathbf{x}_j]$ で正規化したことにある．その詳細は自己相関行列の対角項の絶対値和で正規化する Bi-quantized-x NLMS 法の説明時に示す．実際，この γ と σ_x は正規化を

$$\mathbf{H}_{j+1} = \mathbf{H}_j + \mu \frac{\text{sgn}[e_j] \mathbf{x}_j}{\mathbf{x}_j^T \mathbf{x}_j} \quad (81)$$

と行うことによって取り除くことができ，この場合の収束条件は

$$0 < \mu < 2|e_j| \quad (82)$$

となる．この二つの結果から sign algorithm の収束条件は出力誤差の減少とともに狭まり，係数の収束後に振動すると分かる．

同様に sign-sign algorithm についても

$$\mathbf{H}_{j+1} = \mathbf{H}_j + \mu \frac{\text{sgn}[e_j] \text{sgn}[\mathbf{x}_j]}{I} \quad (83)$$

と正規化することで，収束条件が

$$0 < \mu < 2\text{sgn}[e_j] \hat{e}_j \quad (84)$$

と導かれる．ここから，sign-sign algorithm の収束条件も出力誤差の減少とともに狭まることを示している．また，その上限が評価関数の 2 倍に等しく，係数が収束するためには二つの出力誤差 e_j と $\hat{e}_j$ との極性の一致が求められることも分かる．その一致時において収束条件は

$$0 < \mu < 2|\hat{e}_j| \quad (85)$$

となる．

15. Bi-quantized-x NLMS 法

参照信号や出力誤差の極性と相関を取る構造の適応アルゴリズムでも Bi-quantized-x 法は利用価値の高いアルゴリズムと言える．実際，図 15 は，自己相関行列の対角項の絶対値和で正規化する Bi-quantized-x NLMS 法

$$\mathbf{H}_{j+1} = \mathbf{H}_j + \mu \frac{e_j \text{sgn}[\mathbf{x}_j]}{\text{abs}[\mathbf{x}_j]} \quad (86)$$

図 15 Bi-quantized-x NLMS algorithm 法の収束特性

が与える収束特性を示している．ここで，参照信号対外乱のパワー比を 20dB，ステップサイズを 0.01 としている．この結果から，相互相関ベクトルを参照信号の極性としても収束特性の劣化は少ないと分かる．

その劣化は約 2dB

$$10 \log_{10} \gamma = 10 \log_{10} \frac{\pi}{2} \approx 1.96 \quad (87)$$

留まる⁽¹⁹⁾．これは勾配ベクトルの正規化分母の平均振幅

$$\frac{1}{I} \sum_{k=0}^{I-1} |x_j(k)| \approx \frac{\sigma_x}{\sqrt{\gamma}} \quad (88)$$

に対して学習同定法の分母の平均パワー

$$\frac{1}{I} \sum_{k=0}^{I-1} x_j^2(k) \approx \sigma_x^2 \quad (89)$$

となって，外乱パワーとの比較において $1/\gamma$ となることから生じている．しかし，その差は僅かであり，学習同定法の代用として十分に利用できることを示している．

更に，実際の使用時には適応フィルタのタップ数は 1 よりも十分に大きく与えられる．この場合において係数収束後の推定誤差は，外乱の平均パワーを σ_n^2 と置いて

$$\sigma_d^2 = \frac{\sigma_n^2}{\sigma_x^2} \frac{\gamma \mu}{2 - \mu \gamma} \quad (90)$$

と導かれており，また，収束条件も

$$0 < \mu < \frac{2}{\gamma} \approx 1.27 \quad (91)$$

と導かれている⁽²⁰⁾．

このように Bi-quantized-x NLMS 法は学習同定法と比較して遜色ない特性を与える．しかし，僅かとは言え，劣化することには変わりはない．このように学習同定法と比較して特性の改善が特に見られないのであれば，わざわざ Bi-quantized-x NLMS 法を適用する理由はないように思われる．その利点は個別正規化 LMS 法と同様，演算を固定小数点で実行するときに生じる．その係数更新式 (86) から分かるように乗算が第 2 項の分子において極性との積，分母が絶対値に置換えられている．このことは積の後も語長が維持されることを意味する．これは乗算を固定小数点で実行した場合に小さな信号が切り捨てられる可能性が低くなることと同じである．このように Bi-quantized-x NLMS

図 16 Bi-quantized-x INLMS algorithm 法の収束特性

法は固定小数点演算に適したアルゴリズムと言える。

16. Tri-quantized-x INLMS 法

この参照信号の極性化を更に、個別正規化 LMS 法に適用すれば、より固定小数点演算に適した Bi-quantized-x INLMS 法

$$H_{n+1}(m) = H_n(m) + \rho \frac{\sum_{j=nJ}^{(n+1)J-1} e_j \text{sgn}[x_j(m)]}{\sum_{j=nJ}^{(n+1)J-1} \text{abs}[x_j(m)]} \quad (92)$$

が得られる⁽²⁰⁾。図 16 は、この Bi-quantized-x INLMS 法の収束特性を示している。この例から 16bit の固定小数点による演算でも浮動小数点演算と同等の約 2 dB の劣化に留まる収束特性を与えていることが確認される。この Bi-quantized-x INLMS 法は能動騒音制御システムに適用され、固定小数点演算の採用によって低価格化が実現され、また、有効に動作することが実システムで確認されている⁽¹⁸⁾。

このように Bi-quantized-x INLMS 法の有効性が確認されたことから、16bit 固定小数点演算 DSP の採用による同様の低価格化を目指して音響エコーキャンセラへの適用も検討され、そこで特筆すべき一つの現象が見いだされた⁽²¹⁾。それは、音響エコーキャンセラでスピーカをマイクロホンと別きょう体として離して設置したときに振幅の小さな信号はスピーカからマイクロホンに達しない場合があることである。これは未知の系の出力が参照信号と相関を持たないことを意味する。この状態で、信号を係数更新に利用すれば誤差が増加することは当然である。

図 17 はラジオ音声参照信号として得られたエコー消去特性である。ただし、係数更新アルゴリズムは Bi-quantized-x INLMS 法である。このようなラジオ音声には無音声となるときも雑音のためにスピーカの出力がマイクロホンまで達しない信号が少なく、20 dB から 30 dB のエコー消去量が得られている。これに対して、図 18 は CDROM から読みだした音声参照信号としたときに得られたエコー消去特性である。明らかに、エコー消去特性は大きく劣化している。CDROM から読みだした音声に雑音の重畳はほとんどなく、その劣化は無音声の区間においてスピーカ出力がマイクロホンに達しないことが原因と推測された。

図 17 ラジオ音声を参照信号として得られたエコー消去特性

AEC ON: エコーキャンセラ動作時, AEC OFF: エコーキャンセラ停止時

図 18 CDROM から読み出した音声を参照信号として得られたエコー消去特性

図 19 適応アルゴリズムを Tri-quantized-x INLMS 法として得られたエコー消去特性 (CDROM 音声)

これに対して、図 19 は適応アルゴリズムを、小さな振幅の参照信号については係数更新に利用しない Tri-quantized-x INLMS 法⁽²²⁾として得られたエコー消去特性である⁽²¹⁾。明らかに、エコー消去特性が改善されていることが分かる。このように Bi-quantized-x 法に対して

図 20 平均振幅以下の参照信号については係数の更新を停止して得られた収束特性
(a) 学習同定法, (b) Bi-quantized-x INLMS 法, (c) Tri-quantized-x INLMS 法

図 21 平均振幅以下の参照信号については間引いて得られた収束特性
(a) 学習同定法, (b) Bi-quantized-x INLMS 法, (d) 分母に間引き操作を加えた Tri-quantized-x INLMS 法

$$\text{sgn}[x_j(m)] = 1 \quad [x_j(m) \geq A_0] \quad (93)$$

$$\text{sgn}[x_j(m)] = 0 \quad [-A_0 < x_j(m) < A_0] \quad (94)$$

$$\text{sgn}[x_j(m)] = -1 \quad [x_j(m) \leq -A_0] \quad (95)$$

とする操作の有効性が確認される (図 19 では $A_0 = 15/32768$)。実際、この係数更新の停止しきい値を参照信号の平均振幅としても収束特性に劣化はほとんどないことが示されている⁽²³⁾。

図 20 は、Tri-quantized-x INLMS 法に対して平均振幅以下となる参照信号を係数更新に利用しない処理を加えて得られた係数の収束特性である。この結果において、収束速度は若干遅くなっているものの、推定誤差は学習同定法と同じ大きさまで減少していることが分かる。また、図 21 は分子だけではなく、正規化分母に対しても加算を省略して得られた収束特性である。これによって、収束特性は操作を施さない場合よりも収束速度、推定誤差の減少量の両方において改善されていることが分かる。

17. 学習同定法の収束特性を記述する式

最急降下法で逆行列演算が不要となる原理については既に説明した。残るは、適応アルゴリズムを構成する一つ一つの信号

が果たす役割を明らかにすることである。その信号一つ一つの役割はベクトル表記された式からでは分からない。ベクトル表記では誤差曲面による説明に引き戻される。引き戻されないためには、勾配ベクトルを分解した要素表記とすることがある。

その準備として学習同定法の要素表記式

$$H_{j+1}(m) = H_j(m) + \mu \frac{e_j x_t(m)}{\sum_{i=0}^{I-1} x_j(i) x_j(i)} \quad (96)$$

をもう一度見て頂きたい。これだけを見れば、ベクトル表記式と何ら変わるところはなく、信号一つ一つの役割は分からない。しかし、その第 2 項の分子には出力誤差 e_j があって、そこに第 1 項と同じ適応フィルタの係数 $H_j(m)$ が含まれている。係数の再利用である。この再利用係数を表に出すことが、一つ一つの信号が果たす役割を明らかにする本稿の原点となる。その第 1 項の $H_j(m)$ と第 2 項に含まれる $H_j(m)$ を一つにまとめればどうなるか。その結果だけを式 (41) に示す $\alpha_j(m)$ を用いて表せば、

$$H_{j+1}(m) = H_j(m) \alpha_j(m) + h(m) \{1 - \alpha_j(m)\} + \mu \frac{\sum_{i=0}^{I-1} \Delta_j(i) x_j(i) x_j(m)}{\sum_{i=0}^{I-1} x_i x_j(i)} \quad (97)$$

となる。この構造の式には見覚えがあるはずである。一次巡回型フィルタの動作を記述する式そのものである⁽²⁴⁾。

$h(m)$ が入力信号、利得調整を $1 - \alpha_j(m)$ で行って、入力信号 $h(m)$ を一次巡回型フィルタの出力 $H_{j+1}(m)$ として取り出す。第 3 項は、その出力として取り出すインパルス応答の標本値 $h(m)$ の算定を乱すじょう乱である。このようなフィルタ動作を学習同定法は行っていると理解される。このように理解すれば係数の収束特性は、ステップ入力 $h(m)$ に対する一次巡回型フィルタの応答として記述することができる⁽²³⁾。

結果だけ示すと、係数一つ当たり推定誤差の二乗平均は、未知の系のインパルス応答の標本値 $h(m)$ の印加に伴うステップ応答に対応して減少する誤差

$$Ph_{j+1} = h^2 \alpha_0^{2j} \quad (98)$$

と、係数の再利用に起因するじょう乱と外乱が引き起こす不規則な振動としての誤差

$$Pr_{j+1} = \frac{\mu^2}{I^2} \left\{ Pd_j (I - 1) + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_x^2} \right\} + Pr_j \mu^2 \quad (99)$$

の和

$$Pd_{j+1} = Ph_{j+1} + Pr_{j+1} \quad (100)$$

として表される。ここで、 h はインパルス応答の標本値の平均、 α_0 は振動する係数 $\alpha_j(m)$ の平均

$$\alpha_0 = \overline{\alpha_j(m)} = 1 - \mu/I \quad (101)$$

であり、 σ_n^2 と σ_x^2 は外乱と参照信号の平均パワーである。この誤差 Pd_{j+1} が次の時刻における係数の再利用による不規則な振

動としての誤差を発生させる．式 (99) 第 1 項に示す Pd_j が係数の再利用によって回り込んだ誤差の大きさを表している．

このようにして現時刻において回り込んだ誤差 Pd_j は、一つ前の時刻で実行された係数更新の結果としての誤差

$$Pd_j = Ph_j + Pr_j \quad (102)$$

であり、これを式 (99) に適用することで、

$$Pr_{j+1} = \frac{\mu^2}{I^2} \left\{ Ph_j (I-1) + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_x^2} \right\} + Pr_j \left\{ \alpha_0^2 + \mu^2 \frac{I-1}{I^2} \right\} \quad (103)$$

と書き換えることができる．ここで、上式 (103) の右辺第 1 項を構成する Ph_j は係数の再利用によって回り込んできたステップ応答に起因する誤差分、同 σ_n^2 / σ_x^2 は外乱による誤差、第 2 項を展開した $Pr_j \alpha_0^2$ は同一フィルタ内を循環する誤差、同 $Pr_j \mu^2 (I-1) / I^2$ は係数再利用によって回り込んできた不規則な振動としての誤差である．

学習同定法が安定して動作するためには、この不規則な振動としての誤差 Pr_j が係数の再利用によって循環しても増大しないことが求められる．ここから、学習同定法の収束条件として式 (103) 右辺第 2 項の乗数に対する条件

$$\beta = \alpha_0^2 + \mu^2 \frac{I-1}{I^2} = \frac{\mu^2 - 2\mu + I}{I} < 1 \quad (104)$$

が見いだされ、これを整理することで、当然ながらベクトル表記から導かれた結果と同様の

$$0 < \mu < 2 \quad (105)$$

が得られる．また、推定誤差も式 (103) の収束値の全係数についての和として同様の結果

$$E_0 = \frac{\mu^2}{I^2} \times \frac{\sigma_n^2}{\sigma_x^2} \times \frac{1}{1-\beta} \times I = \frac{\mu}{2-\mu} \times \frac{\sigma_n^2}{\sigma_x^2} \quad (106)$$

が得られる．

この式 (103) は有用であり、係数の収束までに要する時間が

$$T(R) = \frac{0.23RI}{\mu(2-\mu)} \quad (107)$$

として簡単に見積もられる⁽²⁵⁾．例えば、タップ数が 500、ステップサイズ 0.1 で推定誤差を 30 dB まで減少させるまでに要する時間は $R = 30$ と与えて

$$T(30) = \frac{0.23 \times 30 \times 500}{0.1 \times (2-0.1)} \approx 18,158 \quad (108)$$

標準化周期と計算される．

更には、学習同定法によるインパルス応答の算定を式 (97) のステップ応答として表す表現を用いれば、適応フィルタのタップ数が少ない場合に、係数 $\alpha_j(m)$ の平均値 α_0 の周りの変動も大きくなって係数収束後の推定誤差が上記 E_0 よりも大きくなることも示される⁽²⁶⁾．その現象を指摘した研究⁽²⁶⁾において、タップ数 2 で約 8.8 dB、同 4 で約 2.8 dB、同 8 で約 1.6 dB 増加し、その増加は同 16 では約 0.5 dB に留まり、タップ数を 16 以上とすれば、ほぼ理論どおりの結果が得られることが示され

図 22 学習同定法の一次巡回型フィルタ表現

ている．

18. 適応アルゴリズムを構成する信号一つ一つの役割

これで学習同定法の全体としての動作は分かった．しかし、このままでは誤差曲面を使った説明と変わらない．誤差曲面をフィルタの応答に置換えて、その動作を説明し直しただけである．そのインパルス応答の標本値 $h(m)$ を取り出すために、個々の信号や演算が、どのような役割を果たしているのか、この式からはまだそこまでは分からない．

適応アルゴリズムではインパルス応答の標本値 $h(m)$ を未知の系の出力 y_j から取り出す．学習同定法では、その出力 y_j に対してどのような操作が行われ、その操作がどのような順番で行われているか、それぞれがどのような役割を担っているのか．これらが説明されて初めて適応アルゴリズムを構成する個々の信号や演算の意味が分かる．

それらを知るために、未知の系の推定に利用される出力 y_j が現れるように式 (97) を変形する．その結果を以下に示す．

$$H_{j+1}(m) = \alpha_j(m) H_j(m) + \left\{ y_j - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq m}}^{I-1} H_j(i) x_j(i) \right\} x_j(m) \quad (109)$$

図 22 は上式 (109) の演算構造を表している．この構造は、適応アルゴリズムによる未知の系のインパルス応答の算出過程を一つ一つ明確に説明している．この式 (109) を学習同定法の低域フィルタ表現と言う⁽²⁴⁾．この表現から適応アルゴリズムは以下に示す操作から成り立っていること、また、それらには様々な置換えや修正が可能なが分かる．以下では、それらをフーリエ係数の算定手順と対比させながら説明する．

(i) $\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq m}}^{I-1} H_j(i) x_j(i)$ の減算：

非対角項を無視する算術平均法に、この減算はない．同様に、異なる周波数成分間で無相関となるフーリエ係数の算定においても必要がない．この減算は、自己相関行列の非対角項成分の右辺への移項を可能とすることによって逆行列演算を回避する手段として行われる．また、この減算は図 22 に示す一次巡回型フィルタの出力側に移行することができ、その移行は最新の係数の再利用を可能として収束速度が最小二乗法と同等の亜逐次最小二乗法が導かれる．

(ii) 平均値 (直流成分) の生成 :

係数再利用による減算後の信号

$$y_j - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq m}}^{I-1} H_j(i) x_j(i) \\ = h(m) x_j(m) + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq m}}^{I-1} \Delta_j(i) x_j(i) \quad (110)$$

の第1項には取り出すべき対象としての $h(m)$ が, 変数 $x_j(m)$ との積 $h(m)x_j(m)$ として激しく変動している. その変動する $h(m)x_j(m)$ から $h(m)$ を取り出す手段として $x_j(m)$ を乗じて平均値を発生させる操作は効果的である. この相関を取る操作による平均値の生成は, 多数の成分が混在する信号の中から特定の成分を取り出す手段としての検出アルゴリズムに共通する一般的な操作になっている. フーリエ係数の算定も周期信号 $x(t)$ に正弦波 $(e^{jn\omega_0 t})^* = e^{-jn\omega_0 t}$ を乗じる形で行われる. 通信の分野で利用される相関受信器も同様である.

この相関を生成するための乗数は設計者が自由に決められる. 例えば, 予測残差 $x'_j(m)$ や極性 $\text{sgn}[x_j(m)]$ との置換えが可能である. その前者の置換えによって導かれる適応アルゴリズムが EE' 法であり, 後者の置換えで Bi-quantized-x 法が導かれる. また, その乗算自体を休止したり⁽²¹⁾ ⁽²²⁾, 間引いたりする操作⁽²⁷⁾ も有効である. 実際, 平均振幅以下の参照信号については係数更新を実行しないとする操作によっても, 収束特性の劣化はほとんど無視できることが示されている⁽²³⁾.

(iii) $x_j(m)x_j(m)$ (パワー) による正規化 :

この相関を取る操作によって発生した平均値を持つ項を分離して表した

$$\left\{ y_j - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq m}}^{I-1} H_j(i) x_j(i) \right\} x_j(m) \\ = h(m) x_j(m) x_j(m) + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq m}}^{I-1} \Delta_j(i) x_j(i) x_j(m) \quad (111)$$

において, 求めるべき $h(m)$ は $x_j(m)x_j(m)$ による除算によって取り出すことができる. その除算によって $h(m)$ は $h(m)x_j(m)x_j(m)$ から切り離される. 適応アルゴリズムでは, この除算を巡回型フィルタの入力側で行うのが一般的である. この除算を巡回型フィルタの出力側に移行した適応アルゴリズムが低域フィルタ法である. この出力側に移された除算は, フーリエ係数の算定に際して行われる周期

$$T = \int_T e^{jn\omega_0 t} (e^{jn\omega_0 t})^* dt \quad (112)$$

による除算に相当している.

(iv) 利得の単位化 :

このようにして切り離された $h(m)$ を, 大きさを保存して低域フィルタの出力として取り出すためには, その利得は1に調整される必要がある. その利得調整を $1 - \alpha_j(m)$ による乗算で行う. 先の正規化操作 (iii) で実行される可能性のある0による除算は, この $1 - \alpha_j(m)$ による乗算によって

$$\frac{1}{x_j(m)x_j(m)} \times \{1 - \alpha_j(m)\} = \frac{-\mu}{\sum_{i=0}^{I-1} x_j(i)x_j(i)} \quad (113)$$

となって実際には実行されない. このように利得調整用係数の分子は, 0 による除算の可能性を排除するために, 上記相関操作に使用する信号から一意的に決まる. 分母にだけ操作の自由があり, 安定した動作が保証できるならば分母は任意に設定することができる. EE' 法に対する修正 EE' 法が, それに相当する. また, LMS 法は, その分母を定数とする適応アルゴリズムである. この単位化はパワーによる正規化を巡回型フィルタの出力側で行うフーリエ係数の算定や低域フィルタ法では不要である. (v) 積分によるじょう乱成分の低減 :

このようにして切り離された $h(m)$ には, 非対角項によって構成されるじょう乱成分が

$$\frac{\left\{ y_j - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq m}}^{I-1} H_j(i) x_j(i) \right\} x_j(m)}{x_j(m)x_j(m)} \\ = h(m) + \frac{\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq m}}^{I-1} \Delta_j(i) x_j(i) x_j(m)}{x_j(m)x_j(m)} \quad (114)$$

の第2項として重畳している. ここで, 参照信号に自己相関がないとすれば第2項は平均値を持たない. この場合, 同第2項は積分することによって低減され, 直流化された $h(m)$ が取り出される. その積分を学習同定法では一次巡回型の低域フィルタで実行している.

この積分はほかに累積加算や, 加算項数を有限とするブロック実行型の累積加算に置換えることができる. 個別正規化 LMS 法は低域フィルタを後者の加算数有限の累積加算に置換えたアルゴリズムとなっている. 当然ながら, このブロック実行型の累積加算と一次巡回型フィルタは, ブロック実行型周波数領域適応アルゴリズム⁽¹⁷⁾のように併用することもできる. 更に, そのブロック長を参照信号のパワー変動に合わせて制御することで, パワーの変動が激しい音声参照信号とする場合においても推定誤差を一定値に保つ制御が可能となる^{(28)~(30)}.

(vi) 係数の再利用による発散の防止 :

この係数再利用による発散の防止は上記 (iv) と (v) の組合せとして行われる. 循環する係数に残る推定誤差 $\Delta_j(i)$ に対する循環利得は1未満となることが求められる. その条件を満たすように巡回型フィルタの係数を決定する必要がある. その決定に重要な役割を果たす操作が, ステップサイズを乗数とする乗算と, 勾配ベクトルの正規化である. 先に示した収束条件 $0 < \mu < 2$ は, その正規化を自己相関行列の対角項の和で行う場合において循環する再利用係数に含まれる推定誤差 $\Delta_j(i)$ を増加させない条件となっている. このことは自己相関行列の構造が変われば, 正規化に利用する信号も変える必要があることを意味する. 19.以降で, その実例を示す.

(vii) まとめ :

以上の動作から分かるように, 係数更新式を要素で表記し, その一つ一つの信号が持つ意味が明らかにできれば, 本稿で紹介し

た様々な特長を持つ適応アルゴリズムや制御法^{(28)~(30)}を見いだすことができる。また、以上の考察によって低域フィルタ表現という視点から可能と思われる移項や置換えは全て網羅されていると考えている。ただし、それらの組合せの全てを本稿では紹介していない。

19. 畳込みを線状とする操作

前章の (iv) で説明した利得の単位化と、係数循環利得を1未満とする効果を与える勾配ベクトルの正規化は、自己相関行列の特性に合わせて行う必要がある。その調整の必要性を示す例の一つとして、周波数領域適応アルゴリズムを取り上げる。以下の説明によって、勾配ベクトルの正規化は自己相関行列の特性に合わせて行われるべきことが実感されると思う。

まず、周波数領域適応アルゴリズムと時間領域適応アルゴリズムで自己相関行列の構造が異なることを示す。その原因は、信号を周期信号とみなして実行される離散フーリエ変換で畳込みが円状となる点にある。離散フーリエ変換を使って未知の系のインパルス応答を算定するためには、その畳込みを線状とする操作を加える必要がある。その操作を以下に示す。ただし、以下では周波数領域の信号と時間領域の信号が混在するために、その両者を区別すべく、時間領域の信号には (t) を付けて表している。

- (1) 未知の系のインパルス応答長 I に対して I 個分の 0 を追加した要素数 $2I$ のインパルス応答ベクトル

$$\mathbf{h}^{(t)} = [h^{(t)}(0) \ \cdots \ h^{(t)}(I-1) \ 0 \ \cdots \ 0]^T \quad (115)$$

について離散フーリエ変換を実行し、

$$\mathbf{h} = [h(0) \ h(1) \ \cdots \ h(2I-1)]^T \quad (116)$$

を得る。

- (2) 離散フーリエ変換を実行する区間長を $2I$ 標準化周期として、その区間番号を n とする。
 (3) 時刻 $j = nI$ から $nI - (2I - 1)$ の間に未知の系に入力する信号 $x_j^{(t)}$ を要素とする参照信号ベクトル

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n^{(t)} &= [x_n^{(t)} \ x_{nI-1}^{(t)} \ \cdots \ x_{nI-(2I-1)}^{(t)}]^T \\ &= [x_n^{(t)}(0) \ x_n^{(t)}(1) \ \cdots \ x_n^{(t)}(2I-1)]^T \end{aligned} \quad (117)$$

について離散フーリエ変換を実行し、

$$\mathbf{x}_n = [x_n(0) \ x_n(1) \ \cdots \ x_n(2I-1)]^T \quad (118)$$

を得る。

- (4) 時刻 $j = nI$ から $nI - (2I - 1)$ の間に未知の系から出力された $y_j^{(t)}$ の $2I$ 個の要素のうち、前半の I 個を 0 で置換えた出力信号ベクトル

$$\mathbf{y}_n^{(t)} = [0 \ \cdots \ 0 \ y_n^{(t)}(I) \ \cdots \ y_n^{(t)}(2I-1)]^T \quad (119)$$

について離散フーリエ変換を実行し、

$$\mathbf{y}_n = [y_n(0) \ y_n(1) \ \cdots \ y_n(2I-1)]^T \quad (120)$$

を得る。

以上の操作を加えた上で得られる離散フーリエ変換の結果を用いた畳込みは周波数領域においても線状となる。しかし、この結果を単純に

$$H(k) = \frac{Y(k)X^*(k)}{X(k)X^*(k)} \quad (121)$$

として逆離散フーリエ変換を適用しても未知の系のインパルス応答を得ることはできない。

20. 離散フーリエ変換によるインパルス応答の算定

離散フーリエ変換による未知の系のインパルス応答の算定は、実際には以下のようにして行う必要がある⁽¹⁷⁾。

$$\mathbf{h}^{(t)} = \mathbf{B}^{(t)} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{X}_n^* \mathbf{y}_n \quad (122)$$

このうち、 $\mathbf{W}^{-1}$ は逆離散フーリエ変換を実行する行列で、

$$W_{2I} = \exp\left(-i\frac{2\pi}{2I}\right) \quad (i = \sqrt{-1}) \quad (123)$$

を要素とする離散フーリエ変換行列

$$\mathbf{W} = \sqrt{\frac{1}{2I}} \begin{bmatrix} W_{2I}^0 & W_{2I}^0 & \cdots & W_{2I}^0 \\ W_{2I}^0 & W_{2I}^1 & \cdots & W_{2I}^{2I-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{2I}^0 & W_{2I}^{(2I-1)} & \cdots & W_{2I}^{(2I-1)^2} \end{bmatrix}^T \quad (124)$$

の逆行列として構成される。未知の系のインパルス応答は、この逆行列の乗算によって時間領域に戻されたインパルス応答の要素数 $2I$ のうち、後半 I 個の要素を 0 と置換えて得られる。

$$\mathbf{B}^{(t)} = \text{diag} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T \quad (125)$$

は、その置換え処理を実行する対角行列である。

残る $\mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{X}_n^* \mathbf{y}_n$ が未知の系のインパルス応答の離散フーリエ変換を与えている。ここで、 $\mathbf{X}_n$ は参照信号ベクトル $\mathbf{x}_n^{(t)}$ の離散フーリエ変換 $\mathbf{x}_n$ の要素を対角項とする対角行列

$$\mathbf{X}_n = \text{diag} \begin{bmatrix} x_n(0) & x_n(1) & \cdots & x_n(2I-1) \end{bmatrix}^T \quad (126)$$

を表している。

問題は、先に指摘した、参照信号と未知の系のインパルス応答の周波数領域上の畳込み $\mathbf{X}_n \mathbf{h}$ が円状となることである。この畳込みが周波数領域上でも線状として表現できるようにするためには、これに $\mathbf{W}^{-1}$ を乗じて逆離散フーリエ変換を実行し、前半の要素を 0 とする処理として対角行列

$$\mathbf{A}^{(t)} = \text{diag} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T \quad (127)$$

を乗じた後で、もう一度、 $\mathbf{W}$ を乗じる離散フーリエ変換を実行する必要がある。以上の処理を加えて得られた

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_n &= \mathbf{W} \mathbf{A}^{(t)} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{X}_n \mathbf{h} \\ &= \mathbf{A} \mathbf{X}_n \mathbf{h} \end{aligned} \quad (128)$$

が畳込みを線状とする未知の系の出力信号の離散フーリエ変換

となる．ここで，表記を簡単にするために

$$\mathbf{A} = \mathbf{W} \mathbf{A}^{(t)} \mathbf{W}^{-1} \quad (129)$$

と置いている．実際，上記に得た $\mathbf{y}_n$ に $\mathbf{X}_n^*$ を乗じて

$$\mathbf{X}_n^* \mathbf{y}_n = \mathbf{X}_n^* (\mathbf{A} \mathbf{X}_n \mathbf{h}) = (\mathbf{X}_n^* \mathbf{A} \mathbf{X}_n) \mathbf{h} = \mathbf{R}_n \mathbf{h} \quad (130)$$

と整理し，この結果に自己相関行列

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{X}_n^* \mathbf{A} \mathbf{X}_n \quad (131)$$

の逆行列 $\mathbf{R}_n^{-1}$ を乗じれば，未知の系のインパルス応答の離散フーリエ変換は

$$\mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{X}_n^* \mathbf{y}_n = \mathbf{h} \quad (132)$$

と得られる．式 (122) は，このようにして得られた未知の系のインパルス応答の離散フーリエ変換 $\mathbf{h}$ に逆離散フーリエ変換 $\mathbf{W}^{-1}$ を施し， $\mathbf{B}^{(t)}$ を乗じて前半 I の要素を取り出せば，求める時間領域のインパルス応答が $\mathbf{h}^{(t)}$ として得られると説明している．

21. 周波数領域適応アルゴリズムと自己相関行列

式 (122) に示すインパルス応答を算定する式には，時間領域と同様，自己相関行列の逆行列演算が含まれている．その自己相関行列の構造は，時間領域と周波数領域で異なる．周波数領域では自己相関行列は

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_n &= \mathbf{X}_n^* \mathbf{A} \mathbf{X}_n \\ &= \frac{1}{2I} \begin{bmatrix} Q_n^{00} & Q_n^{01} & \cdots & Q_n^{0(2I-1)} \\ Q_n^{10} & Q_n^{11} & \cdots & Q_n^{1(2I-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_n^{(2I-1)0} & Q_n^{(2I-1)1} & \cdots & Q_n^{(2I-1)(2I-1)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (133)$$

と得られる．ここで， a と b は行と列の番号を表し，各要素は

$$Q_n^{ab} = x_n^*(a) x_n(b) \theta^{ab} \quad (134)$$

と与えられて

$$\theta^{ab} = \sum_{k=I}^{2I-1} W_{2I}^{ak} (W_{2I}^{bk})^* \quad (135)$$

と計算される．時間領域との違いは，この θ^{ab} の存在にある．この θ^{ab} は，畳込みを線状とするために出力信号ベクトルの前半の要素を 0 とする操作を加えたことによって生じている．この操作を加えなければ， θ^{ab} の加算は $k=0$ から始まり，その和は対角項 $a=b$ 以外で 0 となって非対角項は生じない．このように，自己相関行列には畳込みの線状化操作によって 0 とならない非対角項が生じる．ここに，周波数領域上の処理においても逆行列演算が不要とならない理由がある．

一方，この θ^{ab} の存在を無視すれば，周波数領域においても時間領域の学習同定法と同様の正規化を勾配ベクトルに対して行うことによって，係数の再利用による発散を防止しつつ，逆

図 23 時間領域と周波数領域で実行される学習同定法で得られる収束特性 [TNLMS: (時間領域) 学習同定法．FNLMS: (周波数領域) 学習同定法]

行列演算が回避される適応アルゴリズム

$$\mathbf{H}_{n+1} = \mathbf{H}_n + \mu \mathbf{B} \frac{\mathbf{X}_n^* \mathbf{e}_n}{\text{trace}[\mathbf{R}_n]} \quad (136)$$

を構成できる．このアルゴリズムを本稿では周波数領域学習同定法と呼ぶ．ここで， μ はステップサイズ，

$$\mathbf{e}_n = [e_n(0) \ e_n(1) \ \cdots \ e_n(2I-1)]^T \quad (137)$$

は，畳込みを線状とするために前半の要素を 0 で置換えた出力誤差ベクトル

$$\mathbf{e}_n^{(t)} = [0 \ \cdots \ 0 \ e_n^{(t)}(I) \ \cdots \ e_n^{(t)}(2I-1)]^T \quad (138)$$

の離散フーリエ変換である．

図 23 は学習同定法 (時間領域) と周波数領域学習同定法の収束特性の比較である．ここで，図では TNLMS は前者を，FNLMS は後者を表し，その収束特性を推定誤差

$$E_n = 10 \log_{10} \frac{(\mathbf{h} - \mathbf{H}_n)^T (\mathbf{h} - \mathbf{H}_n)}{\mathbf{h}^T \mathbf{h}} \quad (139)$$

の推移として示している．以下に，そのシミュレーションの条件を示す．

- 未知の系のインパルス応答 ($I = 512$) の標本値：指数減衰正規乱数
- 参照信号：擬似ジェットファン騒音
- 外乱：白色雑音
- 参照信号対外乱のパワー比：40 dB
- 学習同定法に与えるステップサイズ： $\mu^{(t)} = 0.1$

この二つの適応アルゴリズムは同じ構造をしていることから，両者に同じ大きさのステップサイズ $\mu^{(t)} = \mu = 0.1$ を与えるときに推定誤差 E_n は共に同じ大きさまで減少すると推測される．しかし，図に示す結果は，そのようになっていない．ステップサイズを $\mu = 0.1$ よりもはるかに大きい $\mu = 4I/5 = 409.6$ として推定誤差は学習同定法と同じ大きさまで減少している．しかも，係数更新を周波数領域で実行すれば，自己相関の強い参照信号であっても速いとされる収束速度は時間領域の学習同定法よりも遅くなっている．また，ステップサイズを $\mu = 6I/5 = 614.4$ と少し大きくするだけで収束特性は不安定となっている．この時間領域と周波数領域で与えたステップサイズの大きさの差は余りにも大きい．この周波数領域において与えられるステップサイズの異様な大きさは，周波数領域における勾配ベクトルの

図 24 $\theta(512, m)$ の効果

正規化に $\text{trace}[\mathbf{R}_n]$ は大きすぎることを示唆している。

一方、この両適応アルゴリズムの間にある構造上の違いは、自己相関行列の要素に時間領域にはない θ^{ab} が周波数領域で掛けられているところだけである。この θ^{ab} の存在を無視した正規化が、安定に動作するステップサイズの範囲に違いを生じさせ、収束も周波数領域で遅れる原因になっていると推測される。

図 24 は離散フーリエ変換の区間長を $2I = 1,024$ として計算した $a = 512$ 番目の行における θ^{ab} の変化を示している。明らかに、対角項の両隣以外の非対角項は無視できる大きさになっている。時間領域では θ^{ab} の乗算がないために非対角項は全て同じ大きさとなる。そのため、時間領域では再利用係数の循環利得を 1 未満とする勾配ベクトルの正規化に自己相関行列の対角項の和が用いられた。周波数領域適応アルゴリズムにおいては非対角項の大きさに差を生じさせた θ^{ab} の特性にあった正規化が必要と推測される。

この θ^{ab} の特性に着目し、勾配ベクトルの正規化を隣接対角項だけで行うようにした周波数領域適応アルゴリズムが

$$\mathbf{H}_{n+1} = \mathbf{H}_n + \mu \mathbf{B} \mathbf{S}_n^{-1} \mathbf{X}_n^* \mathbf{e}_n \quad (140)$$

である⁽³¹⁾。ここで、 $\mathbf{S}_n^{-1}$ は $i \neq 0$ と $i \neq 2I-1$ については

$$\begin{aligned} S_n(i) = & x_n(i-1)x_n^*(i-1) \\ & + x_n(i)x_n^*(i) + x_n(i+1)x_n^*(i+1) \end{aligned} \quad (141)$$

$i = 0$ については

$$\begin{aligned} S_n(0) = & x_n(0)x_n^*(0) \\ & + x_n(1)x_n^*(1) + x_n(2I-1)x_n^*(2I-1) \end{aligned} \quad (142)$$

$i = 2I-1$ については

$$\begin{aligned} S_n(2I-1) = & x_n(2I-2)x_n^*(2I-2) \\ & + x_n(2I-1)x_n^*(2I-1) + x_n(0)x_n^*(0) \end{aligned} \quad (143)$$

を要素とする対角行列

$$\mathbf{S}_n = \text{diag} \left[S_n(0) \quad S_n(1) \quad \cdots \quad S_n(2I-1) \right]^T \quad (144)$$

の逆行列である。この適応アルゴリズムで収束特性が改善されれば、自己相関行列の要素の構造に合った正規化法が必要と言える。

更に、ブロック実行型として自己相関行列の非対角項が無視

図 25 周波数領域適応アルゴリズムの収束特性の比較 (擬似ジェットファン騒音)[Proposed: 隣接対角項だけで勾配ベクトルを正規化する周波数領域適応アルゴリズム。BFNLMS: ブロック実行型周波数領域適応アルゴリズム]

できる大きさとすることができれば、正規化は対角項だけ行うことができる。実際には完全に無視できるまで非対角項を小さくする必要はない。係数再利用による逐次更新によって非対角項成分は徐々に小さくなる。非対角項は対角項だけで正規化しても誤差が大きく増加しない程度まで小さくできればよい。この考え方に従ったアルゴリズムがブロック実行型周波数領域適応アルゴリズム

$$\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{H}_k + \mu \mathbf{B} \mathbf{P}_k^{-1} \sum_{n=kM}^{(k+1)M-1} \mathbf{X}_n^* \mathbf{e}_n \quad (145)$$

である⁽¹⁷⁾。ここで、 $\mathbf{P}_k^{-1}$ は

$$P_k(i) = \sum_{n=kM}^{(k+1)M-1} x_n(i)x_n^*(i) \quad [i = 0, 1, \dots, 2I-1] \quad (146)$$

を要素とする対角行列

$$\mathbf{P}_k = \text{diag} \left[P_k(0) \quad P_k(1) \quad \cdots \quad P_k(2I-1) \right]^T \quad (147)$$

の逆行列である。ここで、加算数 M は 10 ~ 12 程度とすれば正規化は対角項だけで十分であることが示されている⁽¹⁷⁾。先に、クロススペクトル法の適用例として示した連立方程式法による能動騒音制御において加算数を $M = 10$ とできた理由は、その実行手順が実質的にブロック実行型周波数領域適応アルゴリズムを構成するところにある。

図 25 は収束特性の比較である。ただし、図で proposed と示している、隣接非対角項だけで勾配ベクトルを正規化する周波数領域適応アルゴリズムに対してはステップサイズを $\mu = 0.25$ 、時間領域で実行される学習同定法に対しては $\mu^{(t)} = 0.5$ 、ブロック実行型周波数領域適応アルゴリズムに対しては $\mu = 1.0$ 、ブロック長 $M = 12$ を設定している。その他の条件は図 23 と同じである。この結果から、勾配ベクトルの正規化は自己相関行列の非対角項の特性に合わせて行うべきと分かる。

また、この二つの周波数領域適応アルゴリズムで収束時間は短縮され、時間領域の $1/2$ に抑えられている。この結果から、自己相関が強い参照信号に対しては周波数領域適応アルゴリズムの適用が有効と分かる。当然ながら、この周波数領域適応アルゴリズムによる収束時間の短縮効果は参照信号が白色雑音となる場合には得られない⁽³¹⁾。応用に際しては、この点に注意が

必要である．また，この時間短縮効果について実行時には，係数更新が離散フーリエ変換の区間を単位に実行されることの影響も含めた比較を $E\tilde{E}$ 法との間で行うことも重要である．

22. ま と め

以上の解説は，特殊な解釈に基づいて行われているために，読者には余計な混乱を生じさせたかもしれない．しかし，その解釈から有用なアルゴリズム，垂逐次最小二乗法や個別正規化 LMS 法， $E\tilde{E}$ ，Tri-quantized-x 法などが見いだされていることから，間違った説明にはなっていないと思っている．用心しながら読んで頂ければ，適応アルゴリズムの動作や原理に対する理解が深まると確信している．本稿では残念ながら取り上げなかった適応アルゴリズムの応用時に生じる問題，例えばダブルトーク⁽³⁰⁾などに関する研究成果も多数ある．その応用などを含めて今後，解説の機会が得られるようなことがあれば，紹介したいと考えている．

文 献

- (1) 野田淳彦，南雲仁一，“システムの学習的同定法，” 計測と制御，vol. 7, no. 9, pp. 597-605, Sept. 1968.
- (2) 藤井健作，大賀寿郎，“固定小数点演算に適した‘個別正規化’LMS 法とその能動騒音制御への適用，” 信学論 (A)，vol. J78-A, no. 6, pp. 669-677, June 1995.
- (3) K. Fujii, and J. Ohga, “Analysis on convergence property of INLMS algorithm suitable for fixed point processing,” IEICE Trans. Fundamentals, vol. E83-A, no. 8, pp. 1539-1544, Aug. 2000.
- (4) K. Fujii, and J. Ohga, “A fast adaptive algorithm suitable for acoustic echo canceller,” IEICE Trans. Fundamentals, vol. E75-A, no. 11, pp. 1509-1515, Nov. 1992.
- (5) K. Fujii, M. Muneyasu, T. Hinamoto, and Y. Tanaka, “Analysis on the convergence property of the sub-RLS algorithm,” IEICE Trans. Fundamentals, vol. E84-A, no. 10, pp. 2591-2594, Oct. 2001.
- (6) 藤井健作，棟安実治，難元孝夫，大賀寿郎，“有色性参照信号に対する適応フィルタ係数の収束の高速化法，” 信学論 (A)，vol. J84-A, no. 1, pp. 113-117, Jan. 2001.
- (7) K. Fujii, M. Muneyasu, T. Hinamoto, and Y. Tanaka, “Normalized least mean EE' algorithm and its convergence condition,” IEICE Trans. Fundamentals, vol. E84-A, no. 4, pp. 984-990, April 2001.
- (8) 藤井健作，松本恵理子，岩松祐輔，棟安実治，森本雅和，“修正 EE' 法の収束条件，” 信学論 (A)，vol. J96-A, no. 10, pp. 721-725, Oct. 2013.
- (9) 岩松祐輔，松本恵理子，藤井健作，棟安実治，森本雅和，“適応アルゴリズム— $E\tilde{E}$ 法—の提案とその収束条件，” 信学論 (A)，vol. J97-A, no. 4, pp. 274-283, April 2014.
- (10) K. Fujii, M. Tanaka, N. Sasaoka, and Y. Itoh, “Method estimating reflection coefficients of adaptive lattice filter and its application to system identification,” Acoust. Sci. Technol., vol. 28, no. 2, pp. 98-104, April 2007.
- (11) 前田大輝，藤井健作，棟安実治，“マルチチャネル適応アルゴリズムの一提案とその解析，” 信学論 (A)，vol. J87-A, no. 2, pp. 180-189, Feb. 2004.
- (12) K. Fujii, Y. Okamoto, M. Itou, M. Muneyasu, and M. Morimoto, “Two-channel adaptive algorithm for active noise control system using simultaneous equations method,” Acoust. Sci. Technol., vol. 33, no. 6, pp. 339-347 Nov. 2012.
- (13) 藤井健作，酒井龍矢，横谷祥史，棟安実治，森本雅和，“ブロック実行型周波数領域 2 チャネル適応アルゴリズム，” 信学論 (A)，vol. J96-A, no. 5, pp. 205-214, May 2013.
- (14) K. Fujii, K. Kashihara, I. Wakabayashi, M. Muneyasu, and M. Morimoto, “Application of simultaneous equations method to ANC system with non-minimum phase secondary path,” IEICE Trans. Fundamentals, vol. E95-A, no. 7, pp. 1109-1116, July 2012.
- (15) 藤井健作，棟安実治，大賀寿郎，“誤差経路フィルタ係数の推定を要しない連立方程式法による能動騒音制御，” 信学論 (A)，vol. J82-A, no. 3, pp. 299-305, March 1999.
- (16) K. Fujii, S. Hashimoto and M. Muneyasu, “Application of a frequency domain processing technique to the simultaneous equation method,” IEICE Trans. Fundamentals, vol. E86-A, no. 8, pp. 2020-2027, Aug. 2003.
- (17) 岩松祐輔，宇治野 正，伊藤雅祐，藤井健作，棟安実治，“周波数領域適応アルゴリズムの動作解析とその能動騒音制御への適用，” 信学論 (A)，vol. J90-A, no. 4, pp. 271-280, April 2007.
- (18) A. Yamaguchi, H. Furuya, K. Fujii and J. Ohga, “A practical trial to realize active noise control system by a fixed point processing type DSP,” IEICE Trans. Fundamentals, vol. E80-A, no. 5, pp. 840-843, May 1997.
- (19) K. Fujii, and Y. Tanaka, “Analysis on the convergence property of quantized-x NLMS algorithm,” IEICE Trans. Fundamentals, vol. E84-A, no. 8, pp. 1840-1847, Aug. 2001.
- (20) 藤井健作，大賀寿郎，“固定小数点演算に有用な‘Polarized-x’法に関する諸検討，” 信学論 (A)，vol. J79-A, no. 1, pp. 11-18 Jan. 1996.
- (21) J. Sakaguchi, T. Hoshino, K. Fujii, and J. Ohga, “Acoustic echo canceller system materialized with a 16-bit fixed point processing type DSP,” IEICE Trans. Fundamentals, vol. E82-A, no. 12, pp. 2818-2821, Dec. 1999.
- (22) K. Fujii, and Y. Tanaka, “Convergence property of tri-quantized-x NLMS algorithm,” IEICE Trans. Fundamentals, vol. E83-A, no. 12, pp. 2739-2742, Dec. 2000.
- (23) 藤井健作，坂井良弘，大賀寿郎，“学習同定法の低減フィルタ表現から導出される収束特性の定式化と演算量削減法，” 信学論 (A)，vol. J74-A, no. 7, pp. 966-973, July 1991.
- (24) 藤井健作，坂井良弘，増田浩幸，大賀寿郎，“学習同定法の新しい表現と安定条件，” 信学論 (A)，vol. J73-A, no. 11, pp. 1769-1775, Nov. 1990.
- (25) K. Fujii, and J. Ohga, “Equation for brief evaluation of convergence rate of the Normalized LMS algorithm,” IEICE Trans. Fundamentals, vol. E76-A, no. 12, pp. 2048-2051, Dec. 1993.
- (26) 藤井健作，坂井良弘，大賀寿郎，“学習同定法の低域フィルタ表現から導出される時定数の係数推定誤差に与える影響，” 信学論 (A)，vol. J74-A, no. 4, pp. 635-643, April 1991.
- (27) 増田浩幸，藤井健作，坂井良弘，大賀寿郎，“小型エコーキャンセラを用いた拡声電話機の検討，” 平 2 春季音響論集，no. 2-6-1, pp. 417-418, March 1990.
- (28) 藤井健作，大賀寿郎，“‘加算正規化’LMS 法におけるブロック長制御による収束時間の短縮，” 信学論 (A)，vol. J80-A, no. 1, pp. 27-35, Jan. 1997.
- (29) 藤井健作，大賀寿郎，“音響エコーキャンセラのための推定誤差を所要値に保つ方法，” 信学論 (A)，vol. J83-A, no. 2, pp. 141-151, Feb. 2000.
- (30) 藤井健作，岡 竜一，斉藤直也，棟安実治，“ダブルトーク区間中においても推定誤差を着実に低減するステップサイズ制御法，” 信学論 (A)，vol. J92-A, no. 11, pp. 874-887 Nov. 2009.
- (31) Y. Kuwahara, Y. Iwamatsu, K. Fujii, M. Muneyasu, and M. Morimoto, “Normalization method of gradient vector in frequency domain steepest descent type adaptive algorithm,” IEICE Trans. fundamentals, vol. E95-A, no. 11, pp. 2041-2045, Nov. 2012.

(EA 研究会提案，平成 27 年 2 月 12 日受付)

藤井 健作 (正員)

昭 45 阪府大・工・電気卒。昭 47 同大学院修士課程了。同年富士通入社。交換機事業部設計部門配属。昭 54 (株) 富士通研究所出向。平 13 姫路工業大 (現兵庫県立大) 教授。平 25 同大学定年退職。同年コダウェイ研究所設立。関西大学非常勤研究員。博士 (工学)。音響エコーキャンセラ、能動騒音制御などの音響信号処理、適応信号処理の研究に従事。平 5 年度本会論文賞受賞。平 6~10 本会和文論文誌編集委員。平 9 広島大客員教授。平 11~12 鳥取大客員教授。日本音響学会会員。

棟安 実治 (正員：シニア会員)

昭 57 神戸大・工・システム卒。同大学院修士課程了。同年沖電気入社。平 2 鳥取大・工・助手。広島大・工・助手。助教授を経て。平 13 関西大・工・助教授。平 17 同教授。博士 (工学)。画像処理、非線形信号処理に関する研究に従事。情報処理学会、IEEE 各会員。