畳込み符号のエラートレリスとシンδροーム復号 —もう一つの研究の流れ—

Error Trellises and Syndrome Decoding for Convolutional Codes:
Different Studies on Convolutional Codes

田島正登 Masato TAJIMA

アブストラクト 畳込み符号は、その符号トレリス (符号器から導かれるトレリス) に基づきビタビ復号するのが標準的である。これに対し、エラートレリス (シンδροーム形成器から導かれるトレリス) に基づくシンδροーム復号が Schalkwijk らにより提案された。本稿では、畳込み符号に関するもう一つの研究の流れである、エラートレリスやそれに基づくシンδροーム復号に焦点を当てて解説する。エラートレリスはある種の“偏り”を持つため、これを利用して復号複雑度を低減できるという特徴がある。また、符号トレリスに基づく SST ビタビ復号はシンδροーム復号と等価である。

キーワード 畳込み符号, エラートレリス, シンδροーム復号, Tail-Biting 畳込み符号

Abstract A convolutionally encoded data is usually decoded by applying the Viterbi algorithm to the associated code trellis. On the other hand, syndrome decoding based on error trellises was proposed by Schalkwijk et al. This paper mainly focuses on error trellises and syndrome decoding based on them. Error trellises have a kind of nonuniformity, which enables decoding with remarkably low average complexity. It is shown that scarce-state-transition (SST) Viterbi decoding based on a code trellis is equivalent to syndrome decoding based on the corresponding error trellis. Code/error trellises for tail-biting convolutional codes are also discussed in this paper.

Key words convolutional codes, error trellis, syndrome decoding, tail-biting convolutional codes

1. はじめに

畳込み符号は Elias により 1955 年に提案された⁽¹⁾。当初は、符号の“木構造”に注目して、“逐次復号法 (sequential decoding)”と呼ばれる復号法が主に MIT の研究者グループにより盛んに研究されていた^{(2) (3)}。これに対し、Viterbi Algorithm (VA) が、1967 年、畳込み符号の復号法として Viterbi により提案された⁽⁴⁾。日経エレクトロニクス 1992 年 9 月 14 日号 (no. 563) に当時を振り返った Viterbi の回想が載っている：

「今から四半世紀以上昔、1966 年 3 月カリフォルニア州ロサンゼルスでの、ある週末の静かな午後のこと。私は自分の受け持つクラスの学生たちに符号理論の基本的な現象を、もっとうまく解説する方法を模索する教師であり、研究者だった。…私が逐次復号法の研究に取り組んでいたこの時期、既に米 MIT (Massachusetts Institute of Technology) の Jack Wozencraft 氏や Roberto Fano 氏といった研究者たちの手で逐次復号法の原理は確立していた。「木登り」最適化アルゴリズムのような逐次復号法の概念はエレガントで効果的なものだったが、この強力な誤り訂正符号にはもっと単純で基本的な復号法があるに違

いないと思った。…」

1967 年の Viterbi の論文⁽⁴⁾では符号の“トレリス構造”は表現されていない。畳込み符号のトレリス構造に初めて注目したのは Forney である。(文献 (5) には 1967 年と記載されている。また、文献 (6) にも 1967 年に導入したとある。)VA の重要性を直ちに認識したのも Forney と思われる^(注1)。畳込み符号の符号器は簡単な回路で構成でき、拘束長の短い符号ならば、符号のトレリス構造を利用して比較的容易に復号できるという特徴がある^{(8) (10)}。このため、宇宙通信や衛星通信などで広く用いられてきた⁽¹¹⁾。筆者は学生時代この分野の知識がなく、東芝に入社後、衛星通信地球局の開発を通じて畳込み符号と関係することになった。リードソロモン (RS) 符号とともに、畳込み符号化/ビタビ復号は、ターボ符号等が提案される 1990 年代初めまで、誤り訂正方式の一つの標準とみなされていた。

典型的な例として、NASA の探査機ボイジャーが挙げられる。表 1 及び表 2 は、1977 年 8 月に打ち上げられた Voyager 2 号の仕様とその飛行経過を示したものである⁽¹²⁾。低受信レベルでのビット誤りを防ぐため、接続符号 (RS 符号化+畳込み符号化) が用いられている。なお、2 号から遅れて、同じ年の 9 月 5 日に Voyager 1 号が打ち上げられており、2013 年 9 月 13 日付けの朝日新聞に、「ボイジャー太陽系脱出」という記事が掲載されている。探査機から送られてきたデータを解析した結果、2012 年 8 月 25 日頃太陽系の限界 (ヘリオポーズ) を通過したとみられるという。人工物で初の出来事である。

田島正登 正員：シニア会員 富山大学名誉教授
E-mail masatotjm@kind.ocn.ne.jp
Masato TAJIMA, Senior Member (Professor Emeritus at University of Toyama).

電子情報通信学会 基礎・境界ソサイエティ
Fundamentals Review Vol.9 No.4 pp.291-303 2016 年 4 月
©電子情報通信学会 2016

(注1)：読者の方から、これらの経緯について、文献 (7) を教えて頂いた。

表 1 Voyager 2 号の仕様

項目	内容
重量	808kg
アンテナ	直径 3.7m
電力	放射能熱発電機により、400W を発電
符号化	RS 符号化+畳込み符号化/ビタビ復号+RS 復号

表 2 Voyager 2 号の飛行経過

年月日	内容
1977.8.20	打上げ
1979.7. 9	木星 (Jupiter) 接近
1981.8.25	土星 (Saturn) 接近
1986.1.24	天王星 (Uranus) 接近
1989.8.25	海王星 (Neptune) 接近, 衛星トリトンを撮影
2010.6.10	太陽から約 138 億 5,900 万 km
30 万年後	恒星シリウス (太陽から 83 兆 km) に近づく

一方、ビタビ復号は“最ゆう復号”という最適な復号法を達成しており、それ以上の発展は考えにくい、という一面もあった。それでも、今まで様々な工夫が提案されてきた⁽¹³⁾⁻⁽¹⁶⁾。筆者は、このような経緯の中で、主に畳込み符号のエラートレリス (シンδροームトレリスとも呼ばれる) の構成やその構造、更にそれを用いたシンδροーム復号の研究に従事してきた。一つのきっかけは、Scarce State Transition (SST) と呼ばれるビタビ復号器が 1985 年に提案されたことである⁽¹⁵⁾。SST ビタビ復号器は 2 段階の復号方式であり、2 段目の主復号器 (ビタビ復号器) で復号されるのはある種のエラー系列である。このことから、SST ビタビ復号とシンδροーム復号は密接に関連していると想像され、シンδροーム復号が身近な存在となった。また、当然の結果として、エラートレリス構造を考察する必要が生じた。当時 (そして現在も)、エラートレリスやその基づく復号に関する研究が極めて少なかったという事実も一つの理由であった。Forney は、符号理論全般にわたって計り知れない影響を与え続けている研究者であるが、畳込み符号の研究において、早い段階から、特に線形システム理論との関連に注目していた⁽¹⁷⁾。大学で確率の制御理論を専攻した筆者にとって、畳込み符号は幾分親しみやすい分野であったかもしれない。本稿では、畳込み符号に関して、特に筆者が興味を持って取り組んできた課題について述べたいと思う。したがって、本稿の内容には偏りもあり、またこの分野を広くカバーしたものではない。

2. シンδροーム形成器

2.1 最小 (minimal) 符号器⁽¹⁸⁾

ここでは、全て有限体 $F = \text{GF}(2)$ で考える。 $F[D]$ を体 F 上の多項式環とする。 $F[D]$ の元を単に多項式と呼ぶ。符号化率 k/n の畳込み符号器 $G(D)$ は、(情報) $\mathbf{u} = \cdots \mathbf{u}_{-1}\mathbf{u}_0\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\cdots$ を入力とし、(符号) $\mathbf{y} = \cdots \mathbf{y}_{-1}\mathbf{y}_0\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2\cdots$ を出力する。ここで、 $\mathbf{u}_i = (u_i^{(1)}, \dots, u_i^{(k)})$, $\mathbf{y}_i = (y_i^{(1)}, \dots, y_i^{(n)})$ である。これらの系列は、遅延作用素 D (不定元とみなせる) を用いて、

$$\mathbf{u}(D) = \cdots + \mathbf{u}_{-1}D^{-1} + \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1D + \mathbf{u}_2D^2 + \cdots$$

$$\mathbf{y}(D) = \cdots + \mathbf{y}_{-1}D^{-1} + \mathbf{y}_0 + \mathbf{y}_1D + \mathbf{y}_2D^2 + \cdots$$

と表現できる。 $\mathbf{u}(D)$ や $\mathbf{y}(D)$ はローラン級数である。この場合、符号器 $G(D)$ は $F^k((D))$ から $F^n((D))$ への線形写像とみなせる ($F^k((D))$ 及び $F^n((D))$ は、それぞれ、体 F^k 及び F^n 上のローラン級数の全体)。このとき、関係: $\mathbf{y}(D) = \mathbf{u}(D)G(D)$ が成り立つ。 $G(D)$ の成分は一般に D の有理式である。 $\mathbf{y}(D)$ の全体は、 $G(D)$ から得られる (n, k) 畳込み符号であり、 $G(D)$ は、実現可能 (realizable) なとき、生成行列と呼ばれる^(注2)。以下、誤解の生じない範囲で、二つの用語、“符号器と生成行列”を特に区別しないで用いる⁽²⁰⁾。 $G(D)$ が多項式行列 (多項式を成分とする行列) のとき、 $G(D)$ はシフトレジスタを用いて実現され、“可制御正準形”と呼ばれる。この実現が更に可観測なとき、 $G(D)$ の実現は既約と呼ばれる。この場合、 $G(D)$ の物理的状態空間と抽象的状態空間 (Σ_G)^(注3) は同形になる。 $G(D)$ の (i, j) 成分を $g_{ij}(D)$, $\nu_i \triangleq \max_j [\deg g_{ij}(D)]$ としたとき ($\deg$ は次数を表す)、 $G(D)$ の総拘束長は、

$$\nu = \sum_{i=1}^k \nu_i \quad (1)$$

で定義される。このとき、 $G(D)$ の自明な実現は、長さ ν_i の k 個のシフトレジスタで構成される。最小 (minimal) 符号器はこのような性質を持つ符号器の中で、 $\dim \Sigma_G$ が最小となる符号器を表す。符号器 $G(D)$ が *basic* であるとは、 $G(D)$ が多項式を成分とする“右逆行列”を持つことである。(後述するように) $G(D)$ の単因子が全て 1 と言ってもよい。ここで、 μ は、 $G(D)$ の全ての $k \times k$ 小行列式の最高次数とする。符号器 $G(D)$ が“最小”であるとは、*basic* であり、かつ、条件 $\mu = \nu$ を満たすことである (注意: Forney は最初 *minimal* という用語を用いたが、後に *canonical* と呼ばれるようになった⁽²²⁾。あるいは、*minimal-basic*⁽¹⁹⁾とも呼ばれる。)

2.2 不変因子分解

次の定理^(注4)は、符号器の構造を調べる場合非常に重要である。

[定理 1] (不変因子分解定理): $G(D)$ はサイズ $k \times n$ の多項式行列とする。このとき、 $G(D)$ は次のように分解表現される。

$$G(D) = A(D) \times \Gamma(D) \times B(D)$$

ただし、

$A(D)$: $k \times k$ の可逆な多項式行列。

$B(D)$: $n \times n$ の可逆な多項式行列。

(注2): 詳細な定義は、文献(18)あるいは(19)を参照。

(注3): 符号器 $G(D)$ の実現 (realization) におけるメモリ素子の内容が物理的状態である。一方、抽象的状態は $G(D)$ のみで定まり、実現には依存しない。 $G(D)$ に入力される系列の過去成分のみを抽出する射影作用素 P と未来成分のみを抽出する射影作用素 $Q = 1 - P$ を用いて定義される。詳細は文献(21)を参照。

(注4): この定理は、単項イデアル整域上の加群⁽²³⁾における“構造定理”を行列 G に適用したものとみなせる。したがって、文献(18)では、 G は単項イデアル整域に成分を持つとしている。

$\Gamma(D)$: $k \times n$ の多項式を成分とする対角行列^(注5)。対角成分 $\gamma_i(D)$ ($1 \leq i \leq r \leq k$) は $G(D)$ の“ 不変因子 ”と呼ばれる。

二つの多項式行列 $A(D)$, $B(D)$ が何回かの基本変形によって移り合うとき, $A(D)$ と $B(D)$ とは“ 対等 ”であると言う。このとき, 次の結果が成り立つ⁽²⁴⁾。

[定理 2] 任意の多項式行列 $G(D)$ は次の標準形に対等である。

$$\begin{pmatrix} \gamma_1(D) & & & & & \\ & \gamma_2(D) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \gamma_r(D) & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

ただし, $\gamma_1(D), \gamma_2(D), \dots, \gamma_r(D)$ は次の条件を満たす:

(1) $\gamma_i(D)$ ($i = 1, 2, \dots, r$) は最高次係数が 1 の多項式である。

(2) $\gamma_i(D)$ は $\gamma_{i-1}(D)$ で割り切れる ($i = 2, \dots, r$)。

更に, この標準形は $G(D)$ によって一意的に定まる。 $G(D)$ によって定まる数 r を $G(D)$ の“ 階数 ”と言い, r 個の多項式 $\gamma_1(D), \gamma_2(D), \dots, \gamma_r(D)$ を $G(D)$ の“ 単因子 ”と言う。 $G(D)$ によって一意的に定まることから, “ 不変因子 ”とも呼ばれる。

不変因子分解定理は上記の内容の直接的結果である。

例 1:

$$\begin{aligned} G_1(D) &= \begin{pmatrix} 1+D & D & 1+D \\ D & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+D & D & 1+D \\ D & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\triangleq A_1 \times \Gamma_1 \times B_1 \end{aligned} \quad (2)$$

例 2:

$$\begin{aligned} G_2(D) &= \begin{pmatrix} 1 & D & 1+D \\ D^2 & 1+D+D^2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & D & 1+D \\ D^2 & 1+D+D^2 & 1 \\ 0 & 1+D+D^2 & D+D^2 \end{pmatrix} \\ &\triangleq A_2 \times \Gamma_2 \times B_2 \end{aligned} \quad (3)$$

注意: $G(D)$ が *basic* ならば, $G(D)$ の不変因子分解に現れる行列 $B(D)$ の最初の k 行が $G(D)$ に一致するようにできる⁽¹⁸⁾。実際, 例 1 及び例 2 はそのようになっている。

2.3 $G(D)$ の不変因子分解とシンドローム形成器

$H(D)$ は畳込み符号 C の検査行列とする。その転置 $H^T(D)$

(注5): 正確には, 主対角線上に要素を持つ特別な対角行列と言うべきであるが (G. ストラング, 線形代数とその応用, 産業図書, 1978 を参照), Forney の文献⁽¹⁸⁾に従って単に対角行列と呼んだ。

(T は転置を表す) はシンドローム形成器⁽²¹⁾と呼ばれ^(注6), $G(D)$ の不変因子分解より得られる。 $G(D)$ は *basic* と仮定し, $G(D)$ の不変因子分解に現れる行列 $B(D)$ の最初の k 行が $G(D)$ に一致するように分解したとする。このとき, $B(D)$ の逆行列 $B^{-1}(D)$ の最後の $(n-k)$ 列がシンドローム形成器 $H^T(D)$ に相当する⁽¹⁸⁾。上記の $B_1(D)$ 及び $B_2(D)$ の逆行列は次のように求められる。

$$B_1^{-1}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1+D & 1+D^2 \\ 1 & D & 1+D+D^2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$B_2^{-1}(D) = \begin{pmatrix} 1+D^2+D^4 & 1+D^2 & 1+D+D^3 \\ D^3+D^4 & D+D^2 & 1+D^2+D^3 \\ D^2+D^3+D^4 & 1+D+D^2 & 1+D+D^2+D^3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

これから, $G_1(D)$ 及び $G_2(D)$ に対応するシンドローム形成器は以下のように求まる。

$$H_1^T(D) = (1, 1+D^2, 1+D+D^2)^T \quad (6)$$

$$H_2^T(D) = (1+D+D^3, 1+D^2+D^3, 1+D+D^2+D^3)^T \quad (7)$$

2.4 シンドローム形成器の可観測正準形⁽²¹⁾

$G(D)$ に対応する検査行列を $H(D)$ とする。 $H(D)$ の (i, j) 成分を $h_{ij}(D)$, $\nu_i^\perp \triangleq \max_j [\deg h_{ij}(D)]$ としたとき, $H(D)$ の総拘束長は,

$$\nu^\perp = \sum_{i=1}^{n-k} \nu_i^\perp \quad (8)$$

で定義される。このとき, シンドローム形成器 $H^T(D)$ は, 長さ $\nu_i^\perp$ の $(n-k)$ 個のメモリアレーを用いて実現される。この実現は“可観測正準形”と呼ばれる。例として, シンドローム形成器

$$H_3^T(D) = \begin{pmatrix} D^2+D^3 & D & 1 \\ D^2 & 1+D+D^2 & D^2 \end{pmatrix}^T \quad (9)$$

の実現 (可観測正準形) を図 1 に示す。 $\mu^\perp$ は, $H(D)$ の全ての $(n-k) \times (n-k)$ 小行列式の最高次数とする。 $H(D)$ が *basic* であり, かつ, 条件 $\mu^\perp = \nu^\perp$ を満たせば, $H(D)$ は最小となる。 $G(D)$ 及び $H(D)$ が共に最小であれば, 関係:

図 1 シンドローム形成器 $H_3^T(D)$ の実現 (可観測正準形)

(注6): 正確には, $H^T(D)$ を伝達関数行列とする線形逐次回路のこと。

$$\nu = \nu^\perp \quad (10)$$

が成り立つ．以下， $G(D)$ 及び $H(D)$ は共に最小と仮定する．また， $H(D)$ は以下のように多項式展開されると仮定する．

$$H(D) = H_0 + H_1 D + \cdots + H_M D^M \quad (11)$$

ここで， M はメモリ長 (拘束長とは異なる) を表す．

シンドローム形成器 $H^T(D)$ の可観測正準形を考える． $e_k = (e_k^{(1)}, \dots, e_k^{(n)})$ 及び $\zeta_k = (\zeta_k^{(1)}, \dots, \zeta_k^{(n-k)})$ は時刻 k における入力エラー及び出力シンドロームとする．また，この実現におけるメモリ素子の内容を $\sigma_{kp}^{(q)}$ ($1 \leq q \leq n-k$) と表す．ここで，ラベル q は，シンドローム成分 $\zeta_k^{(q)}$ に対応するメモリアレーを示している．また， q を固定したとき， $p=1$ はシンドローム形成器の出力端に最も近いメモリ素子を表す．対応する位置にメモリ素子がないときは， $\sigma_{kp}^{(q)} = 0$ と約束する (図 1)．このとき，時刻 k でのシンドローム形成器の状態は，

$$\sigma_k = (\sigma_{k1}^{(1)}, \dots, \sigma_{k1}^{(n-k)}, \dots, \sigma_{kM}^{(1)}, \dots, \sigma_{kM}^{(n-k)}) \quad (12)$$

と表現される．(有効サイズは $H(D)$ の総拘束長 ν に等しい．) 例えば，図 1 の場合，

$$\sigma_k = (\sigma_{k1}^{(1)}, \sigma_{k1}^{(2)}, \sigma_{k2}^{(1)}, \sigma_{k2}^{(2)}, \sigma_{k3}^{(1)}, 0) \quad (13)$$

となり， σ_k の有効サイズは $\nu=5$ である．

ここで，狭義の状態 σ_k にシンドロームの値 ζ_k を追加した拡大状態 $\xi_k \triangleq (\zeta_k, \sigma_k)^T$ を考える．このとき， ξ_k は次のように表現される⁽²⁵⁾．

$$\begin{aligned} \xi_k &= \begin{pmatrix} H_M & H_{M-1} & \cdots & H_1 & H_0 \\ 0 & H_M & \cdots & H_2 & H_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & H_M & H_{M-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & H_M \end{pmatrix} \times (e_{k-M}, \dots, e_k)^T \\ &\triangleq H^* \times (e_{k-M}, e_{k-M+1}, \dots, e_k)^T \end{aligned} \quad (14)$$

また，これから，

$$\begin{aligned} \sigma_k &= (\sigma_{k1}, \sigma_{k2}, \dots, \sigma_{kM}) \\ &= (e_{k-M+1}, \dots, e_k) \times \begin{pmatrix} H_M & H_{M-1} & \cdots & H_1 \\ 0 & H_M & \cdots & H_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & H_M \end{pmatrix}^T \\ &\triangleq (e_{k-M+1}, \dots, e_{k-1}, e_k) \times H^{**T} \end{aligned} \quad (15)$$

が得られる．なお， σ_k は，

$$\sigma_k = (\sigma_{k-1,2}, \dots, \sigma_{k-1,M}, 0) + e_k (H_1^T, \dots, H_M^T) \quad (16)$$

のようにも表現できる．同様に， ζ_k は，

$$\begin{aligned} \zeta_k &= e_{k-M} H_M^T + \cdots + e_{k-1} H_1^T + e_k H_0^T \\ &= \sigma_{k-1,1} + e_k H_0^T \end{aligned} \quad (17)$$

と表現される．これらの関係式はシンドローム形成器の振舞い

を記述する際，非常に有効である⁽²⁶⁾．

3. ビタビ復号

3.1 生き残りパス

畳込み符号のビタビ復号は“符号トレリス”を用いて説明される．例として，符号器 $G(D) = (1 + D + D^2, 1 + D^2)$ に対する符号トレリスを図 2 に示す．この例では，時刻 $t=5$ の状態 (00) で終端されており， $t=0$ の状態 (00) から時刻 $t=5$ の状態 (00) に至るパスの全体が送信可能なパスを表す．一般の場合も，送信可能なパスの全体は，符号器 $G(D)$ (総拘束長を ν とする) のトレリスによって表現される．ただし，初期状態 x_0 と最終状態 x_N は既知とする．今，符号トレリス上の特定の 1 本のパスが送信されたと仮定し，対応する受信データを $z = \{z_t\}_{t=1}^N$ とする．ここで，トレリス上の任意の時刻 $t=k$ の任意の状態 x_k に注目する．符号トレリス上の x_0 から x_k に至る全ての可能なパスの中で，時刻 $t=k$ までの受信データ $\{z_t\}_{t=1}^k$ との距離が最も小さい (メトリックが最大の) パスを，時刻 $t=k$ の状態 x_k に対する“生き残りパス”と呼ぶ．メトリックが最大となるパスが複数本ある場合は，その中の任意の 1 本を生き残りパスとして選ぶ．この結果，時刻 $t=k$ では全体で 2^ν 本の生き残りパスが存在する．

3.2 Viterbi Algorithm (VA)

VA は 3.3 で述べるダイナミックプログラミング (DP) に基づく最適化の手法であり，以下の「最適性の原理」が成り立つ⁽²⁷⁾．

「最適性の原理：送信開始時刻 $t=0$ から最終時刻 $t=N$ に至るオーバオール最適パス (最尤パス) $\hat{X}$ を任意の途中時刻 $t=k$ で 2 分割 ($\hat{X} = \hat{X}^{(1)} + \hat{X}^{(2)}$) したとき，前半のパス $\hat{X}^{(1)}$ は符号トレリス上の時刻 $t=k$ の“ある状態”に対する生き残りパスに一致する．」

したがって，各時刻 $t=k$ の各状態 x_k に対し生き残りパスを保存していけば，全体で 2^ν 本のこれらのパスの中に $\hat{X}^{(1)}$ が必ず含まれていることが保証される．これが，生き残りパスを保存していく理由である．また，時刻 $t=k$ での生き残りパスは時刻 $t=k-1$ の生き残りパスの延長として得られることが，

図 2 $G(D) = (1 + D + D^2, 1 + D^2)$ に対する符号トレリス

再び上記の「最適性の原理」から保証される。(この過程では、時刻 $t = k - 1$ の生き残りパスのメトリックに時刻 $k - 1$ から時刻 k までの枝メトリックを加算 (Add) し、それらの値の比較 (Compare) により、最も大きなメトリックが選択 (Select) され、対応するパスが時刻 k での生き残りパスとして決定される。このため、この手続きにおける一連の計算は“Add-Compare-Select (ACS) 演算”と呼ばれる⁽²⁷⁾。) これらにより、各時刻 $t = k$ で順次生き残りパスを更新していけば OK のように思われるが、そうではない。 $\hat{X}^{(1)}$ は、時刻 $t = k$ における全体で 2^ν 本の生き残りパスの中に含まれていることは保証されるが、いずれの生き残りパスに一致しているかは、最終時刻 $t = N$ まで確定されないことに注意する。ところが、生き残りパスには次のような著しい特徴のあることが多くのシミュレーションにより分かっている⁽²⁷⁾。

「生き残りパスの収束：各時刻 $t = k$ で保存されている 2^ν 本の生き残りパスの十分過去の部分は、高い確率で 1 本のパスに収束している。」

すなわち、現在の時刻を $t = k$ として、 $t = k - \eta$ ($\eta > 0$) より過去 (信号対雑音比 (SN 比) に依存するが、符号器 $G(D)$ のメモリ長を $m = \max_{1 \leq i \leq k} \nu_i$ としたとき、 η は m の 5 ~ 6 倍程度⁽²⁸⁾) については $\hat{X}^{(1)}$ が“確定している”のである。したがって、実際の復号法は、現時刻から過去に向かって長さ η (生き残りパス長と呼ばれる) にわたって生き残りパスを保存し、(共通の) 最古シンボルを復号データとして出力すればよい。これが「ビタビ復号法」である。

3.3 ダイナミックプログラミング

1950 年代初め、Bellman 及びその共同研究者は、変分問題を解くために“ダイナミックプログラミング (DP)”と呼ばれる一般的な手法を開発した⁽²⁹⁾。DP の基本は「最適性の原理」にあり、次のように述べられる。(ただし、システムの初期状態 $\bar{x}^{(0)}$ は既知とし、一方最終状態 $\bar{x}^{(N)}$ は未知とする。)

「最適性の原理：(オーバオール) 最適トラジェクトリの後半部分は再び最適トラジェクトリである。」

“前半部分”と“後半部分”を入れ替えれば、先に述べた、VA に関する最適性の原理と同一であることが直ちに理解される。実際、VA が基本的に DP であることは、Viterbi による VA の提案の直後 (1969 年) に Omura によって指摘された⁽³⁰⁾。いわゆる DP に対して、VA は“前向き”DP と呼ぶことができる。

4. シンドローム復号

4.1 畳込み符号のシンドローム復号

送信号語を y 、通信路で発生したエラーを e 、受信語を z としたとき、既知の z に基づき未知の y あるいは e を推定するのが復号の目的である。畳込み符号の場合、符号トレリスを用いて y を推定するのが標準的であるが、エラートレリスを用いて e を推定する方法があり得る。エラートレリスは、受信語 z

から計算されたシンドローム系列 $\{\zeta_k\}$ に基づき構成されるので、シンドロームトレリスと呼ばれることもある。

図 2 の符号トレリスに対応するエラートレリスは 2.4 の結果を用いて構成できる。ただし、受信データを、

$$z = z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 = 11 \ 00 \ 01 \ 10 \ 00$$

と仮定する。 $H(D)$ は、

$$\begin{aligned} H(D) &= (1, 1) + (0, 1)D + (1, 1)D^2 \\ &\triangleq H_0 + H_1 D + H_2 D^2 \end{aligned}$$

と多項式展開されるので ($M = 2$)、

$$H^{**} = \begin{pmatrix} H_2 & H_1 \\ & H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

であり、これから、

$$\begin{aligned} \sigma_k &= (e_{k-1}, e_k) H^{**T} \\ &= (e_{k-1}^{(1)}, e_{k-1}^{(2)}, e_k^{(1)}, e_k^{(2)}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (e_{k-1}^{(1)} + e_{k-1}^{(2)} + e_k^{(2)}, e_k^{(1)} + e_k^{(2)}) \end{aligned}$$

と表現される。同様に、

$$\begin{aligned} \zeta_k &= e_k H^T(D) \\ &= e_k (H_0^T + H_1^T D + H_2^T D^2) \\ &= e_{k-2} H_2^T + e_{k-1} H_1^T + e_k H_0^T \\ &= e_{k-2}^{(1)} + e_{k-2}^{(2)} + e_{k-1}^{(2)} + e_k^{(1)} + e_k^{(2)} \end{aligned}$$

と求まる。上式で、 $\{e_k\}$ を受信データ $\{z_k\}_{k=1}^5$ で置き換えれば、シンドローム系列

$$\zeta = \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4 \zeta_5 = 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1$$

が得られる。また、最終状態は $\sigma_5 = (10)$ となる。ここで、シンドロームの値 0 及び 1 に対応するトレリスモジュールを接続すればエラートレリスを構成できる。結果を図 3 に示す。 z をシンドローム形成器へ入力したときの最終状態は (10) なので、

図 3 $H^T(D) = (1 + D^2, 1 + D + D^2)^T$ に基づくエラートレリス

エラートレリスは状態 (10) で終端されている．なお，上述のように，エラートレリスの場合，トレリスモジュールの構造はシンドロームの値 (上記の例では， $\zeta_k = 0$ または $\zeta_k = 1$) に応じて変化する．このエラートレリス (シンドロームトレリス) に VA を適用して (最小重みの) エラー系列 $\{e_k\}$ を推定する復号法は“シンドローム復号法”と呼ばれる．畳込み符号のシンドローム復号法を初めて提案したのは Schalkwijk と Vinck である⁽³¹⁾．復号性能は符号トレリスに基づくビタビ復号と同等であり，復号器をハードウェア化した場合有利になるとしている (ただし，硬判定データを対象としている)．続いて 1976 年の論文⁽³²⁾において，符号化率 $1/2$ の畳込み符号を対象に，エラートレリスモジュールのセル構造に着目して，復号に用いる状態数を大幅に低減できることを示した．更に，彼らはシンドローム復号法を符号化率 k/n の畳込み符号にまで拡張した⁽³³⁾．

なお，シンドローム復号を軟判定データに拡張しようとして，そのメトリックを与える必要が生じた．その結果，シンドローム復号では，受信データ z_j はサイン $\text{sign } z_j$ と絶対値 $|z_j|$ に分離され， $\text{sign } z_j$ はエラートレリスの構成に，そして， $|z_j|$ はメトリックの計算そのものに利用されることが分かった⁽³⁴⁾．同じ頃 (後述)，Ariel と Snyders により軟判定シンドローム復号法が提案されている⁽³⁵⁾．

4.2 SST ビタビ復号器

1980 年代は，国内の通信関連の各社でビタビ復号器 LSI が一斉に開発された時期である⁽³⁶⁾．この過程で，1985 年に，NTT 研究所の久保田，郡，加藤により，Scarce State Transition (SST) ビタビ復号器が提案され⁽¹⁵⁾，特に，回路実現した場合，低消費電力化が図れるということで注目された．SST ビタビ復号器の構成を図 4 に示す (本稿では情報シンボルを u_k と表現してい

るが，本節では i_k と表す)．復号は 2 段階で実行され，最初の粗い復号 (逆符号器 $G^{-1}(D)$ など，簡易な復号器を用いる) の後，復号誤差 u_k が次段の主復号器 (ビタビ復号器) で復号される． u_k はある種のエラー系列であり，このことから，SST ビタビ復号とシンドローム復号は密接に関係していることが分かる⁽³⁷⁾．例えば，Quick Look-In (QLI) 符号⁽³⁸⁾を SST ビタビ復号した場合，1976 年の Schalkwijk らの論文⁽³²⁾と同様，削減可能な状態を含む，(符号トレリスモジュールの) 三つのセル構造の存在が示される⁽³⁹⁾．筆者らはその後も，SST ビタビ復号とシンドローム復号の関係を解明することに注力した．図 4 から，“機能”として同等関係：

$$\begin{aligned} & [\text{syndrome decoding}] \cdot G^{-1} \\ & \cong (H^{-1})^T \cdot [\text{Viterbi decoding}] \end{aligned}$$

が成り立つことは分かるが⁽⁴⁰⁾，メトリック計算等を含めて完全に一致することを示す必要があった．これに対し，符号トレリスモジュールをエラートレリスモジュールへ変換するという方法を用い，一般的な条件の下で，SST ビタビ復号とシンドローム復号が等価であることを示した⁽⁴¹⁾．

4.3 Innovation

一般の符号器 $G(D)$ (最小と仮定する) を持つ符号に対する SST ビタビ復号器を考える．簡易復号器として逆符号器 $G^{-1}(D)$ を用いると，主復号器 (ビタビ復号器) への入力は，

$$\begin{aligned} r_k &= z_k + (z_k G^{-1})G \\ &= (i_k G + e_k) + (i_k + u_k)G \\ &= u_k G + e_k \\ &= e_k (G^{-1}G + I_n) \end{aligned} \quad (18)$$

となる (変数 D を省略した)．ただし， $u_k \triangleq e_k G^{-1}$ とした．また， I_n は $n \times n$ の単位行列を表す．ここで， G の不変因子分解を $G = A \times \Gamma \times B$ としたとき，

$$\begin{aligned} I_n &= B^{-1}B \\ &= \begin{pmatrix} G^{-1} & H^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G \\ (H^{-1})^T \end{pmatrix} \\ &= G^{-1}G + H^T(H^{-1})^T \end{aligned} \quad (19)$$

が成り立つので，

$$r_k = e_k H^T (H^{-1})^T = \zeta_k (H^{-1})^T \quad (20)$$

となる．更に，これから，

$$r_k H^T = \zeta_k (H^{-1})^T H^T = \zeta_k \quad (21)$$

が得られる．この内容は，主復号器への入力系列 $\{r_k\}_{k=1}^N$ が，オリジナルの受信系列 $\{z_k\}_{k=1}^N$ と同じシンドローム系列を生成することを示している．この結果， $\{r_k\}_{k=1}^N$ を $\{z_k\}_{k=1}^N$ の“innovation⁽⁴²⁾”と呼ぶことができる．

図 4 シンドローム復号器と SST ビタビ復号器の関係

5.1 Max-Log-MAP 復号法

1993 年, Berrou らにより“ターボ (turbo) 符号”が提案された⁽⁴³⁾. ターボ符号は, その後の符号理論の研究において多大な影響を与えることになる. ターボ符号器の特徴は, オリジナルの情報系列と, その系列が“インタリーバ”を介してランダム化された情報系列が二つの同じ“再帰形組織畳込み符号器”に入力されて符号化された後, 出力符号化系列が多重化 (並列接続) されて送信系列になることである. ターボ符号の性能はインタリーバの構造に大きく依存することから, インタリーバの設計に関する研究が精力的に行われた⁽⁴⁴⁾. また, 復号法にも際立った特徴がある. 復号には二つの軟入力/軟出力 (soft-in/soft-out) 復号器が用いられる. 第 1 の復号器で得られた復号データの“外部情報”が (インタリーブされて) 第 2 の復号器へ送られ, これが事前情報となって復号に利用される. この第 2 復号器で得られた復号データの外部情報は (デインタリーブされて) 再び第 1 の復号器に送られ事前情報として利用される, という具合に復号動作が繰り返される. このような繰返し復号がターボ復号の大きな特徴である. また, 軟入力/軟出力復号器が利用されることから, 復号シンボルの信頼度を推定する必要が生じる. この時点で既に, Hagenauer らにより Soft-Output Viterbi Algorithm (SOVA)⁽¹⁴⁾が提案されており, Berrou らはターボ符号の発見を振り返り⁽⁴⁵⁾, SOVA の LSI 化が一つの目標であったと述べている. VA は大域的な最適アルゴリズムであるが, シンボル単位の局所的な最適化を行うには事後確率 (APP: A Posteriori Probability) を最大化する復号方式であるシンボル MAP (Maximum A Posteriori) 復号法を必要とする⁽⁴⁶⁾. MAP 復号法を実現するには, 事後確率の対数比である

$$L(\hat{u}_k) = \ln \frac{P(u_k = 0|z)}{P(u_k = 1|z)} = \ln \frac{\sum_{(s',s)} P(s',s,z)}{\sum_{(s',s)} P(s',s,z)}$$

を計算すればよい⁽⁴⁷⁾. ここで, $P(u_k|z)$ は, 受信データ z を条件とする情報シンボル u_k の条件付確率, また, $P(s',s,z)$ は同時確率を表し, 時刻 $k-1$ の状態 s' から時刻 k の状態 s への遷移が u_k を決めると仮定している. 上式を忠実に求めるアルゴリズムが BCJR アルゴリズム⁽⁴⁸⁾(MAP アルゴリズムと呼ぶ)である. ターボ符号の提案に伴って, MAP アルゴリズムを近似する準最適アルゴリズムが複数提案された⁽⁴⁹⁾. SOVA もその一つであるが, 中でも Max-Log-MAP 復号法⁽⁴⁹⁾が興味深い. Max-Log-MAP 復号法は, MAP アルゴリズムの対数領域での近似方式であるが, 結果的には, 双方向 (前向き及び後ろ向き) の VA の実行と等価である⁽⁵⁰⁾. 更に, 修正された SOVA (i.e., Battail-SOVA) は Max-Log-MAP 復号法に等価なことも証明されている⁽⁵¹⁾. また, “ラベル付ビタビ復号 (Yamamoto-Itoh scheme)⁽¹⁶⁾”と SOVA の関係を考察した結果, ラベル付ビタビ復号においても, 復号シンボルの信頼度に関する情報が得られることが分かった⁽⁵²⁾.

5.2 エラートレリスを用いたゆう度比の計算

対数ゆう度比 $L(\hat{u}_k)$ はエラートレリスを用いても計算できる. Forney は, 論文(21)の中で, 次の結果を示している.

[定理 3] $G(D)$ と $H(D)$ は互いに双対な最小符号器とする. このとき, 対応する状態空間 (正確には, 抽象的状态空間) Σ_G と Σ_{H^T} は同形である. すなわち, 任意の $s^\perp \in \Sigma_{H^T}$ は, 唯一の $s \in \Sigma_G$ により $s^\perp = -sH^T$ と表現される.

上記で, $s^\perp$ は s の“双対状態 (dual state)⁽²¹⁾”と呼ばれる. 双対状態は, 情報 u_k に対する符号器の出力 $y_k = u_k G(D)$ を直接シンドローム形成器 $H^T(D)$ へ入力することにより求められる.

例 3: 例 1 で与えた $G_1(D)$ 及び $H_1(D)$ について考える. 2.4 の結果から, $\sigma_k = (\sigma_{k1}, \sigma_{k2})$ は,

$$\begin{cases} \sigma_{k1} = e_{k-1}^{(2)} + e_{k-1}^{(3)} + e_k^{(3)} \\ \sigma_{k2} = e_k^{(2)} + e_k^{(3)} \end{cases} \quad (22)$$

と表現される. 一方, $y_k = (y_k^{(1)}, y_k^{(2)}, y_k^{(3)})$ は,

$$\begin{cases} y_k^{(1)} = (1+D)u_k^{(1)} + Du_k^{(2)} \\ y_k^{(2)} = Du_k^{(1)} + u_k^{(2)} \\ y_k^{(3)} = (1+D)u_k^{(1)} + u_k^{(2)} \end{cases} \quad (23)$$

で与えられる. ここで, 最初の式の $(e_k^{(1)}, e_k^{(2)}, e_k^{(3)})$ を $(y_k^{(1)}, y_k^{(2)}, y_k^{(3)})$ で置き換えれば, 符号器の状態 $\beta_k = (u_k^{(1)}, u_k^{(2)})$ に対応する双対状態:

$$\sigma_k^* = (\sigma_{k1}^*, \sigma_{k2}^*) = (u_k^{(1)} + u_k^{(2)}, u_k^{(1)}) \quad (24)$$

が求まる. また, これを解けば,

$$(u_k^{(1)}, u_k^{(2)}) = (\sigma_{k2}^*, \sigma_{k1}^* + \sigma_{k2}^*) \quad (25)$$

となり, 対応関係:

$$\begin{cases} u_k^{(1)} \Leftrightarrow \sigma_{k2} \\ u_k^{(2)} \Leftrightarrow \sigma_{k1} + \sigma_{k2} \end{cases} \quad (26)$$

が得られる. この結果に基づき, エラートレリスを用いて対数ゆう度比 $L(\hat{u}_k^{(j)})$ ($j=1, 2$) を計算できる.

一般の場合も, 情報シンボル $u_k^{(j)}$ に対応する双対状態を求めることで, エラートレリスを用いて対数ゆう度比を計算することができる⁽⁵³⁾.

6. 畳込み符号のエラートレリス

6.1 エラートレリスの構成

畳込み符号のエラートレリスの研究において, 山田らの論文⁽⁵⁴⁾は非常に重要である. これは, 高符号化率 ($R = (n-1)/n$) 畳込み符号 (符号器を $G(D)$ とする) の復号に関するもので, シンドローム形成器の状態遷移に基づきトレリスを構成している. この場合, 検査行列 $H(D)$ のサイズは $1 \times n$ であり, 拘束長を

ν とすれば、 ν 個のメモリ素子と $(\nu + 1)$ 個の加算器でシンδροーム形成器 $H^T(D)$ を実現できる (図 1)．そこで、山田らは、 $(\nu + 1)$ 個の加算器の“部分和の値”を状態とみなし、 n 個の符号化シンボル $y_k^{(i)}$ ($1 \leq i \leq n$) が一つ入力されるごとにそれらを追跡することで、符号トレリスを構成している．シンδροーム 0 を生成するエラーパスは符号語であり、山田らの方法で得られたトレリスは“Bahl-Cocke-Jelinek-Raviv (BCJR) トレリス⁽⁴⁸⁾”であることが分かる．後に、筆者らはこの内容を吟味して一般化した⁽²⁵⁾．すなわち、符号化率 R を $(n - 1)/n$ から k/n へ拡張した．また、“拡大状態”を定義し、これを用いてシンδροーム形成器の振舞いを式で表現した．

$e_k = (e_k^{(1)}, \dots, e_k^{(n)})$ 及び $\zeta_k = (\zeta_k^{(1)}, \dots, \zeta_k^{(n-k)})$ は時刻 k における入力エラー及び出力シンδροームとして、シンδροーム形成器 $H^T(D)$ の可観測正準形を考える．狭義の状態 σ_k にシンδροームの値 ζ_k を追加した拡大状態 $\xi_k \triangleq (\zeta_k, \sigma_k)^T$ は、

$$\begin{aligned} \xi_k &= (\sigma_{k-1}, \mathbf{0}_{n-k})^T + \begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \\ \vdots \\ H_M \end{pmatrix} e_k^T \\ &= (\sigma_{k-1}, \mathbf{0}_{n-k})^T + e_k^{(1)} \mathbf{h}_1 + \dots + e_k^{(n)} \mathbf{h}_n \quad (27) \end{aligned}$$

と表現される (2.4 を見よ)．ここで、 $\mathbf{0}_{n-k}$ は $(n - k)$ 個の 0 から成るベクトルを表し、

$$\begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \\ \vdots \\ H_M \end{pmatrix} \triangleq (\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n) \quad (28)$$

である．この式はトレリスの構成手順そのものを表している．すなわち、 $(\sigma_{k-1}, \mathbf{0}_{n-k})^T$ を初期状態として、 $e_k^{(i)}$ ($1 \leq i \leq n$) を順次入力して ξ_k の変化を追跡する．この際、 ξ_k の最初の $(n - k)$ 個の成分はシンδροーム $\zeta_k^{(q)}$ ($1 \leq q \leq n - k$) に対応しており、その値 0 が確定する途中レベル i_q に注目してトレリスが構成される．なお、値 0 を一般のシンδροームの値 $\zeta_k^{(q)}$ に変更すれば、符号トレリスモジュールだけでなく、エラートレリスモジュールの構成にも適用できることが分かる⁽²⁵⁾．更に、この方法は、畳込み符号だけでなく、ブロック符号の conventional^(注7) エラートレリスの構成に用いることもできる⁽⁵⁵⁾．

山田らの論文の後、10 年ほどたって、Sidorenko と Zyablov の論文⁽⁵⁶⁾が出た．これは、基本的には、山田らの論文と同等と考えられる (山田らの論文では“間接的”に BCJR トレリスを構成しているが、Sidorenko と Zyablov の論文では直接 BCJR トレリスを構成している)．ただし、山田らの論文は引用されていない．Sidorenko と Zyablov の論文では、行列 H^* 及び H^{**} (式 (14), (15)) を用いた状態複雑度を示す陽な評価式が導かれており、これが大きな特徴である⁽²²⁾．なお、 ξ_k 及び σ_k の表現式からこの評価式を導くことができる (2.4 を見よ)．

(注7): 後述の tail-biting トレリスに対し、初期 (最終) 状態数 = 1 のトレリスを “conventional” トレリスと呼ぶ．

6.2 エラートレリスの縮退化

Ariel と Snyders は、畳込み符号のエラートレリスを研究している数少ない研究者である．畳込み符号のシンδροーム復号を初めて提案した Shalkwijk らが扱ったのは硬判定データであるが、Ariel と Snyders は、これを軟判定データまで拡張した⁽³⁵⁾．また、エラートレリスに基づく復号で彼らが注目したのは、“zero-string⁽³⁵⁾” (シンδροームの値が連続して 0 となる区間) の存在である． SN 比が高い領域では、zero-string の数及び平均長が増加する．zero-string 内ではその部分区間 (zero-string の左端から前方向に、また右端から後ろ方向に復号することで特定できる) で、最ゆうパスが全零系列に一致することが示されるので、全体のエラートレリスを大幅に縮退させることが可能となる．符号トレリスに基づくビタビ復号の複雑度は SN 比に関係なく一定であるが、エラートレリスに基づくシンδροーム復号では、 SN 比の高い領域で、トレリスの縮退化を用いて復号複雑度を大幅に低減できる^{(35) (57)}．これがシンδροーム復号の利点である．なお、SST ビタビ復号とシンδροーム復号の類似性 (実は等価) に注目すれば、QLI 符号を SST ビタビ復号した場合も主復号器に対する符号トレリスを同程度に縮退化できることが示される⁽⁵⁸⁾．

6.3 エラー部分系列のシフトを用いたエラートレリスの構成

Ariel と Snyders の論文⁽²⁰⁾を読んだとき、Sidorenko と Zyablov の論文にある「状態複雑度の評価式」と異なる記述があった．すなわち、Sidorenko と Zyablov の論文にある H^{**} (式 (15)) ではなく、“ H^{**} を修正した行列”が $k = in$ ($i = 0, 1, \dots$) における状態複雑度を決めると記述されていた．その結果、大きな疑問が生じた．しばらくして、Ariel と Snyders が扱っている $H(D)$ には特徴のあることが分かった．すなわち、 $H(D)$ のある列 (j 列とする) が D の単項式因子 (D^p) を持つ場合を扱っていたのである．このとき、シンδροームの表現式: $\zeta_k = e_k H^T(D)$ に注目することにより、 $H(D)$ の j 列から単項式因子 D^p を掃き出す (除する) ことと、対応するエラー部分系列を p だけ (順方向に) 時間シフトすることが同等であることに気付いた．そこで、このような形の $H(D)$ に対し、エラー部分系列 (上記の表現ではエラー系列の第 j 成分) の時間シフトを用いたエラートレリスの構成法を提案した⁽⁵⁹⁾．なお、時間シフトは順方向だけではなく、逆方向も可能であり、逆方向の q シフトは、 $H(D)$ の対応する列に“単項式 D^q を掛ける”ことに相当する．更に、シンδροーム部分系列の時間シフトを用いたエラートレリスの構成法も同時に提案した⁽⁵⁹⁾．

上記は、シンδροーム形成器 $H^T(D)$ 、したがって、エラートレリスに関するものであるが、符号器 $G(D)$ 、すなわち、符号トレリスについても同様の議論が可能である⁽⁶⁰⁾．この結果、 $G(D)$ や $H(D)$ の列が D の単項式因子を含むとき、符号トレリスでもエラートレリスでも縮退化できる可能性のあることが分

かった．一方，符号トレリスとエラートレリスは密接に関係しているため，本来，二つのトレリスは同時に縮退化されると考えるのが自然であり，その条件も得られている⁽⁶¹⁾．

また，Ariel と Snyders の論文を見たとき，その方法はトレリスモジュールの時間軸にわたる“合成”に関係していると想像された．最初に，トレリスモジュールを l 時間にわたって合成し，拡大生成行列 $G^{(l)}(D)$ を求める．次に， $G^{(l)}(D)$ に列置換を施し，得られた行列 $G^{(l)}(D)'$ に対応する最小トレリスモジュールを構成する．更に，このトレリスモジュール内で状態数が最小となるレベル (depth) に注目し，トレリスの“区切り”を変更する．実は，これら一連の操作は，上述の「符号部分系列の時間シフト」と同等であることが分かった⁽⁶²⁾．

列や行に D の単項式因子を含む $H(D)$ (あるいは $G(D)$) はやや特殊と考えられるが，このような $H(D)$ を対象とした論文が存在していた⁽⁶³⁾．Tanner らは性能の優れた LDPC 畳込み符号を構成する目的で，成分が全て D の単項式 (ただし，次数が非常に高い) である $H(D)$ を扱っていたのである．ただ，このような形の $H(D)$ を対象とするに至った経緯は全く異なる．

7. Tail-Biting 畳込み符号

7.1 Tail-Biting エラートレリスの構成

Tail-biting の概念は Solomon と Tilborg によって導入されたが⁽⁶⁴⁾，tail-biting という用語を初めて用いたのは Ma と Wolf である⁽⁶⁵⁾．畳込み符号の符号トレリスを考える．Zero Tail⁽⁶⁵⁾ と呼ばれるトレリスの終端法では，有効情報シンボル (N 個とする) に続いてテイル (tail) シンボル (ν 個とする) を符号器に入力して全零状態で終端させる．これに対し，有効情報シンボルの最後の ν 個をあらかじめ符号器にセットしておき，この状態で元の N 個の情報シンボルを符号器に入力すれば，符号器の初期状態と最終状態を一致させることができる．(符号トレリス上で見ると，“初期状態と最終状態が一致”するパスが許容パスになる．) これが，tail-biting 畳込み符号である．(以下，tail-biting を“TB”と略記する)．TB の方法⁽⁶⁵⁾により，レートの損失なしで，畳込み符号からブロック符号を構成することができる．更に，TB の重要性は，「与えられた符号長 n と情報シンボル数 k のブロック符号の“最良”最小距離が，拘束長が比較的小さな TB 畳込み符号で達成される」という事実にある⁽⁶⁵⁾．TB 畳込み符号に対しても TB エラートレリス (エラートレリス上で，初期状態と最終状態が一致するエラーパスが許容パスとなる) を構成することができる⁽²⁶⁾．エラートレリスはある種の“偏り (不均一性)”を持っており，この特徴が TB 畳込み符号の復号においても有利に働くと考えられる⁽⁶⁶⁾．

$z = \{z_k\}_{k=1}^N$ を受信データとする．ただし， $N \geq M$ (M は $H(D)$ のメモリ長) を仮定する．TB エラートレリスの構成は以下の結果に基づいている⁽²⁶⁾．

[定理 4] TB 符号トレリスを考え， $\beta_0 = \beta_N (= \beta)$ を両端の状態とするサブトレリスに注目する． y はこのサブトレリス上の送信パスとする．また， $z = y + e$ を対応する受信データと

する．ここで， e はエラーを表す．更に， z をシンドローム形成器 $H^T(D)$ へ入力したときの最終状態を σ_{fin} とする．ここで，改めてシンドローム形成器の初期状態を σ_{fin} にセットし， z を入力したとき，シンドローム ζ が出力されたと仮定する．このとき，次の関係が成り立つ．

$$\sigma_{fin} + \beta^* \xrightarrow[\zeta]{e} \sigma_{fin} + \beta^* \quad (29)$$

ただし， β^* は β の“双対状態”を表す (5.2 を見よ)．

上式は，シンドローム形成器の初期状態を $\sigma_{fin} + \beta^*$ として，エラー e が入力されると，シンドローム ζ が出力され，シンドローム形成器の状態は初期状態と同じ $\sigma_{fin} + \beta^*$ へ遷移することを示している．目標の TB エラートレリスはこの原理に基づき構成される⁽²⁶⁾．

例 4：

$$G_4(D) = (1, 1 + D^2, 1 + D + D^2) \quad (30)$$

$$H_4(D) = \begin{pmatrix} 1 + D & D & 1 + D \\ D & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (31)$$

に対する TB 符号トレリスと TB エラートレリスの例を図 5 及び図 6 に示す⁽⁶⁷⁾．ただし，受信データを，

$$z = z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 = 100 \ 110 \ 111 \ 100 \ 010$$

と仮定した．この場合， $\sigma_{fin} = (10)$ である．ここで， $\beta = (10)$ の符号サブトレリスを考える．符号器の状態 $\beta_k = (u_{k-1}, u_k)$ に対応する双対状態は， $\beta_k^* = (u_{k-1} + u_k, u_k)$ と計算される．ゆえに， $\beta^* = (10)$ となり，上記の符号サブトレリスに対応するエラーサブトレリスの両端の状態は $\sigma_{fin} + \beta^* = (10) + (10) =$

図 5 $G_4(D)$ に対する TB 符号トレリス

図 6 $H_4^T(D)$ に基づく TB エラートレリス

(00) となる．太線は，これらのサブトレリスを表している．

7.2 ブロック符号とみなした場合の TB トレリス

TB 畳込み符号のトレリスは，線形ブロック符号の TB トレリスの立場から考察できる．生成行列 $G(D)$ ($k \times n$) 及び検査行列 $H(D)$ ($(n-k) \times n$) の多項式展開を，

$$G(D) = G_0 + G_1 D + \cdots + G_L D^L \quad (32)$$

$$H(D) = H_0 + H_1 D + \cdots + H_M D^M \quad (33)$$

とし，これから構成される TB 畳込み符号 C_{tb} を考える．ただし，トレリスのセクション長を $N (\geq \max(L, M) + 1)$ とする． C_{tb} をブロック符号とみなしたときの生成行列 G_{tb} 及び検査行列 H_{tb} は以下のように与えられる^{(19) (26)}．

$$G_{tb} = \begin{pmatrix} |G_0 & G_1 & \cdots & G_{L-1} & G_L| \\ & |G_0 & \cdots & \cdots & G_{L-1} & G_L| \\ & & \cdots & G_1 & \cdots & G_{L-1} & \cdots \\ & & & |G_0 & G_1 & \cdots & \cdots & G_L| \\ G_L| & & & |G_0 & G_1 & \cdots & G_{L-1} \\ G_{L-1} & G_L| & & & |G_0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & & & \cdots & G_1 \\ G_1 & G_2 & \cdots & G_L| & & & |G_0| \end{pmatrix} \quad (34)$$

$$H_{tb} = \begin{pmatrix} H_0 & & & H_M & \cdots & H_2 & H_1 \\ H_1 & H_0 & & & \cdots & \cdots & H_2 \\ \cdots & H_1 & \cdots & & & H_M & \cdots \\ H_{M-1} & \cdots & \cdots & H_0 & & & H_M \\ H_M & H_{M-1} & \cdots & H_1 & H_0 & & \\ & H_M & \cdots & \cdots & H_1 & \cdots & \\ & & \cdots & H_{M-1} & \cdots & \cdots & H_0 \\ & & & H_M & H_{M-1} & \cdots & H_1 & H_0 \end{pmatrix} \quad (35)$$

(G_{tb} 及び H_{tb} のサイズは，それぞれ， $kN \times nN$ 及び $(n-k)N \times nN$ である．) ここで，改めて， G_{tb} 及び H_{tb} に基づいて TB トレリスを構成する⁽⁶⁸⁾．なお，トレリスに関する理論では，“span” という概念が極めて重要な役割を果たす^{(69) (70)}．任意の符号語を x とする． x の span ($[x]$ と書く) は， x の非零要素を全て含む区間 $[a, b]$ を表す．従来の conventional トレリスでは $a \leq b$ であるが (線形 span (conventional span) と呼ばれる)，TB トレリスまで拡張する場合は， $a > b$ も許される．この場合は “環状 span (circular span)” と呼ばれる^(注8)．このとき， G_{tb} とその行の自然な span (“|” は span の両端を示す) から TB トレリスを構成できる⁽⁶⁸⁾．得られた TB トレリスは，元の TB 畳込み符号のトレリスに整合しているが，複雑度^(注9)

(注8): 線形 span だけを対象とする場合は， x の最も左の非零要素から最も右の非零要素までの区間が $[x]$ に相当する．ただし，環状 span まで考慮する場合は， x だけでは span は決まらず，正確には， x とその span $[x]$ の “対” を指定する必要がある．

(注9): 符号のトレリスを議論しているので，例えば，ビタビ復号を想定した場合の復号複雑度が考えられる．この問題は文献(70)でも考察されている．ここでは，各レベルでの状態数及び枝数を複雑度の指標とした．

は原則下がる．特に高符号化率符号で，複雑度が大きく低減されると予想される⁽⁷¹⁾．更に， C_{tb} の “特性行列 (characteristic matrix)^{(69) (72) (73)}” から k 個の線形独立かつ “span 長の短い” generator を選んで TB トレリスを構成すると，その複雑度は更に下がると考えられる．

7.3 トレリスモジュールの双対性

ブロック符号では， G の conventional トレリスと H の conventional トレリスの複雑度に関し特定の関係 (“双対性” と呼ぶ) が成り立つ．すなわち， V_i 及び $E_{i-1,i}$ をレベル i での状態空間及び枝 (edge) 空間としたとき，

$$|V_i| = |\hat{V}_i|, \quad i = 0, 1, \cdots, n \quad (36)$$

$$|E_{i-1,i}| = \frac{|\hat{E}_{i-1,i}| \times 2}{\hat{\rho}_{i-1}^+ \times \hat{\rho}_i^-}, \quad i = 1, \cdots, n \quad (37)$$

が成り立つ (記号 $\hat{A}$ は H に関係する量を表す)^{(70) (74) (75)}．ここで， $\hat{\rho}_{i-1}^+$ はレベル $(i-1)$ における out-degree (状態当りの出力枝数)， $\hat{\rho}_i^-$ はレベル i における in-degree (状態当りの入力枝数) を表す．

一方，畳込み符号のトレリスはモジュールから構成されるので， $G(D)$ のトレリスモジュールと $H(D)$ のトレリスモジュールの間に類似の関係が成り立つと想像される．しかし， $G(D)$ に対応するのは $H(D)$ ではなく， $\tilde{H}(D)$ (“reciprocal 双対符号器⁽⁷⁶⁾”) である^(注10)．すなわち，次の結果が成り立つ^{(77) (79)}．
[定理 5] $G(D)$ の最小トレリスモジュールと $\tilde{H}(D)$ の最小トレリスモジュールの間に双対性が成り立つ．

したがって，TB トレリスにおいても， G_{tb} から構成した TB トレリスと ($\tilde{H}(D)$ から求めた) $\tilde{H}_{tb}$ から構成した TB トレリスが双対関係にあると考えられる．

8. む す び

1990 年代初頭にターボ符号が提案され，更に 1990 年代末には Low-Density Parity-Check (LDPC) 符号⁽⁸⁰⁾が再発見されるに至り，符号理論の歴史は大きく塗り替えられた．特に，LDPC 符号は sum-product アルゴリズムと組み合わせることによりシャノン限界に近い訂正能力を持つことが示されており，これに続く符号も次々と提案されている^{(81) (83)}．これに關係して，IEEE J. Sel. Areas Commun. においても何度か特集号が組まれている^{(84) (87)}．

(1) Concatenated coding techniques and iterative decoding: Sailing toward channel capacity, *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, vol. 16, no. 2, Feb. 1998.

(2) The turbo principle: From theory to practice I, *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, vol. 19, no. 5, May 2001.

(3) The turbo principle: From theory to practice II,

(注10): 双対符号器 $H(D)$ で， D を D^{-1} で置き換えた後，第 i 行を D^{n_i} 倍したもの．例えば， $H(D) = (1 + D, D, 1 + D)$ とすると， $\tilde{H}(D) = (1 + D^{-1}, D^{-1}, 1 + D^{-1}) \times D = (1 + D, 1, 1 + D)$ となる．

IEEE J. Sel. Areas Commun., vol. 19, no. 9, Sept. 2001.

(4) Capacity approaching codes, IEEE J. Sel. Areas Commun., vol. 27, no. 6, Aug. 2009.

今日、学会でのセッション構成を見ても、明らかに、畳込み符号そのものに関する研究発表は少なく、十分成熟した過去分野と見ることもできる。一方、Feldstrom と Zigangirov による LDPC 畳込み符号の提案⁽⁸⁸⁾、Tavares らによる tail-biting LDPC 畳込み符号の提案があり⁽⁸⁹⁾、また、空間結合符号⁽⁸²⁾も LDPC 畳込み符号の構成法を基に考案された LDPC 符号である。特にこれらは、生成行列よりも検査行列の構造に深く関わっている。筆者には、畳込み符号やそのトレリス構造は、従来と同じ形を取らないかもしれないが、今後も符号理論の基本的な枠組みであり続けられると思われる。

9. 謝 辞

筆者の今までの研究活動は非常に限られたものであるが、それでも、直接・間接に多くの研究者の方々から計り知れない影響を受けた。一部は参考文献にも記載したが、記載されていないものも多くあることを申し述べ、この場を借りてお礼と感謝を申し上げます。

最後に、執筆の機会を与えて下さった本会情報理論研究専門委員会の皆様、そして初稿について多くの貴重なコメントを頂きました読者の方々に改めてお礼を申し上げます。また、編集を担当された、電気通信大学八木秀樹先生に深く感謝申し上げます。

文 献

- (1) P. Elias, "Coding for noisy channels," I.R.E. Convention Record, Part IV, pp. 37–46, 1955.
- (2) R. M. Fano, "A heuristic discussion of probabilistic decoding," IEEE Trans. Inf. Theory, vol. IT-9, no. 2, pp. 64–74, April 1963.
- (3) J. M. Wozencraft, "Sequential decoding for reliable communication," MIT-RLE Tech. Rep., TR325, 1957.
- (4) A. J. Viterbi, "Error bounds for convolutional codes and an asymptotically optimum decoding algorithm," IEEE Trans. Inf. Theory, vol. IT-13, no. 2, pp. 260–269, April 1967.
- (5) G. D. Forney, Jr., "Convolutional codes II. Maximum-likelihood decoding," Inf. Control, vol. 25, no. 3, pp. 222–266, July 1974.
- (6) D. Conti and N. Boston, "On the algebraic structure of linear tail-biting trellises," IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 61, no. 5, pp. 2283–2299, May 2015.
- (7) G. D. Forney, Jr., "The Viterbi algorithm: A personal history," arXiv: cs/0504020v2 [cs.IT], April 2005.
- (8) K. S. Gilhousen, J. A. Heller, I. M. Jacobs, and A. J. Viterbi, "Coding systems study for high data rate telemetry links," Contract NAS2-6024 by Linkabit Corp., NASA Ames Res. Ctr. Rep. CR-114278, Jan. 1971.
- (9) J. A. Heller, "Short constraint length convolutional codes," Space Programs Summary 37-45, vol. III, pp. 171–177, Jet Propulsion Lab., California Inst. Technol., Oct./Nov. 1968.
- (10) J. A. Heller, "Improved performance of short constraint length convolutional codes," Space Programs Summary 37-56, vol. III, Jet Propulsion Lab., California Inst.

Technol., pp. 83–84, Feb./March 1969.

- (11) J. A. Heller and I. M. Jacobs, "Viterbi decoding for satellite and space communication," IEEE Trans. Commun., vol. COM-19, no. 5, pp. 835–848, Oct. 1971.
- (12) 高野 忠, "遠くへ伝える—宇宙空間での超遠距離通信—," 信学誌, vol. 77, no. 1, pp. 7–13, Jan. 1994.
- (13) 橋本 猛, 有本 卓, "Viterbi アルゴリズムの一般化について," 信学論 (A), vol. J66-A, no. 11, pp. 1064–1071, Nov. 1983.
- (14) J. Hagenauer and P. Hoeher, "A Viterbi algorithm with soft-decision outputs and its applications," Proc. GLOBECOM'89, pp. 1680–1686, Nov. 1989.
- (15) 久保田周治, 郡 武治, 加藤修三, "SST (Scarce State Transition) 型ビタビ復号回路," 信学論 (B), vol. J68-B, no. 1, pp. 38–45, Jan. 1985.
- (16) H. Yamamoto and K. Itoh, "Viterbi decoding algorithm for convolutional codes with repeat request," IEEE Trans. Inf. Theory, vol. IT-26, no. 5, pp. 540–547, Sept. 1980.
- (17) G. D. Forney, Jr., "Minimal bases of rational vector spaces, with applications to multivariable linear systems," SIAM J. Control, vol. 13, no. 3, pp. 493–520, May 1975.
- (18) G. D. Forney, Jr., "Convolutional codes I: Algebraic structure," IEEE Trans. Inf. Theory, vol. IT-16, no. 6, pp. 720–738, Nov. 1970.
- (19) R. Johannesson and K. S. Zigangirov, Fundamentals of Convolutional Coding, IEEE Press, New York, 1999.
- (20) M. Ariel and J. Snyders, "Error-trellises for convolutional codes—Part I: Construction," IEEE Trans. Commun., vol. 46, no. 12, pp. 1592–1601, Dec. 1998.
- (21) G. D. Forney, Jr., "Structural analysis of convolutional codes via dual codes," IEEE Trans. Inf. Theory, vol. IT-19, no. 4, pp. 512–518, July 1973.
- (22) R. J. McEliece and W. Lin, "The trellis complexity of convolutional codes," IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 42, no. 6, pp. 1855–1864, Nov. 1996.
- (23) 服部 昭, 現代代数学, 近代数学講座 1, 朝倉書店, 東京, 1968.
- (24) 齋藤正彦, 線型代数入門, 東京大学出版会, 東京, 1966.
- (25) M. Tajima, K. Okino, and T. Miyagoshi, "Minimal code(error)-trellis module construction for rate- k/n convolutional codes: Extension of Yamada-Harashima-Miyakawa's construction," IEICE Trans. Fundamentals, vol. E90-A, no. 11, pp. 2629–2634, Nov. 2007.
- (26) M. Tajima, K. Okino, and T. Miyagoshi, "Error-trellis construction for tailbiting convolutional codes," IEICE Technical Report, IT2011-59, ISEC2011-86, WBS2011-60, pp. 85–90, March 2012.
- (27) G. D. Forney, Jr., "The Viterbi algorithm," Proc. of the IEEE, vol. 61, no. 3, pp. 268–278, March 1973.
- (28) A. Dholakia, Introduction to Convolutional Codes with Applications, Kluwer, Norwell, MA, 1994.
- (29) A. A. Fel'dbaum, Optimal Control Systems, Academic Press, New York and London, 1965.
- (30) J. K. Omura, "On the Viterbi decoding algorithm," IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 15, no. 1, pp. 177–179, Jan. 1969.
- (31) J. P. M. Schalkwijk and A. J. Vinck, "Syndrome decoding of convolutional codes," IEEE Trans. Commun., vol. COM-23, no. 7, pp. 789–792, July 1975.
- (32) J. P. M. Schalkwijk and A. J. Vinck, "Syndrome decoding of binary rate-1/2 convolutional codes," IEEE Trans. Commun., vol. COM-24, no. 9, pp. 977–985, Sept. 1976.
- (33) J. P. M. Schalkwijk, A. J. Vinck, and K. A. Post, "Syndrome decoding of binary rate- k/n convolutional codes," IEEE Trans. Inf. Theory, vol. IT-24, no. 5, pp. 553–562, Sept. 1978.
- (34) 田島正登, "畳込み符号のシンドローム復号法におけるメトリックに関する考察," 信学技報, IT95-7, pp. 37–42, May 1995.
- (35) M. Ariel and J. Snyders, "Soft syndrome decoding of binary convolutional codes," IEEE Trans. Commun.,

- vol. 43, no. 2/3/4, pp. 288–297, Feb./March/April 1995.
- (36) 鈴木秀夫, 田島正登, 遠藤直樹, “誤り訂正符号とその応用—誤り訂正符号化の LSI 化動向—,” 昭和 62 年電気・情報関連学会連合大会予稿集, pp. 4-127–4-130, 1987.
 - (37) 田島正登, 鈴木秀夫, “SST 型ビット復号器とシンドローム復号器の比較検討,” 信学技報, AL85-80, pp. 43–48, March 1986.
 - (38) H. J. Helgert, “Short constraint length rate 1/2 “Quick-Look” codes,” IEEE Trans. Commun., vol. COM-23, no. 7, pp. 768–773, July 1975.
 - (39) 田島正登, 鈴木秀夫, 小林健三, “QLI 符号のビット復号時における状態数の削減について,” 信学論 (A), vol. J73-A, no. 2, pp. 298–305, Feb. 1990.
 - (40) M. Tajima and H. Suzuki, “On the general equivalence between the SST-type Viterbi decoder and the syndrome decoder for convolutional codes,” Abstracts of ISIT1988, pp.51-52, June 1988.
 - (41) M. Tajima, K. Shibata, and Z. Kawasaki, “On the equivalence between Scarce-State-Transition Viterbi decoding and syndrome decoding of convolutional codes,” Proc. ISIT2003, p. 304, July 2003.
 - (42) T. Kailath, “An innovations approach to least-squares estimation—Part I: Linear filtering in additive white noise,” IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-13, no. 6, pp. 646–655, Dec. 1968.
 - (43) C. Berrou, A. Glavieux, and P. Thitimajshima, “Near Shannon limit error-correcting coding and decoding: Turbo-codes,” Proc. ICC’93, pp. 1064–1070, May 1993.
 - (44) S. Dolinar and D. Divsalar, “Weight distribution for turbo codes using random and nonrandom permutations,” TDA Progress Rep. 42-122, pp. 56–65, Aug. 1995.
 - (45) C. Berrou and A. Glavieux, “Reflections on the prize paper: Near optimum error-correcting coding and decoding: turbo-codes,” IEEE Inf. Theory Society Newsletter, vol. 48, no. 2, p. 1 and pp. 24–31, June 1998.
 - (46) 大橋正良, 安田 豊, “ビット誤り率を最小化する畳込み符号の復号アルゴリズムの評価とその応用,” 信学論 (A), vol. J75-A, no. 8, pp. 1233–1239, Aug. 1992.
 - (47) J. Hagenauer, E. Offer, and L. Papke, “Iterative decoding of binary block and convolutional codes,” IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 42, no. 2, pp. 429–445, March 1996.
 - (48) L. R. Bahl, J. Cocke, F. Jelinek, and J. Raviv, “Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate,” IEEE Trans. Inf. Theory, vol. IT-20, no. 2, pp. 284–287, March 1974.
 - (49) P. Robertson, E. Villebrun, and P. Hoeher, “A comparison of optimal and sub-optimal MAP decoding algorithms operating in the log domain,” Proc. ICC’95, pp. 1009–1013, June 1995.
 - (50) 田島正登, “SOVA と Max-Log-MAP,” 確率伝搬に基づく復号法と符号ワークショップ予稿集, pp.3–17, March 2001.
 - (51) M. P. C. Fossorier, F. Burkert, S. Lin, and J. Hagenauer, “On the equivalence between SOVA and Max-Log-MAP decodings,” IEEE Commun. Lett., vol. 2, no. 5, pp. 137–139, May 1998.
 - (52) M. Tajima, K. Takida, and Z. Kawasaki, “On the relation between Viterbi decoding with labels and the SOVA,” IEICE Trans. Fundamentals, vol. E83-A, no. 10, pp. 1966–1970, Oct. 2000.
 - (53) M. Tajima, K. Shibata, and Z. Kawasaki, “Relation between encoder and syndrome former variables and symbol reliability estimation using a syndrome trellis,” IEEE Trans. Commun., vol. 51, no. 9, pp. 1474–1484, Sept. 2003.
 - (54) 山田隆弘, 原島 博, 宮川 洋, “トレリスを用いた高符号比率畳込み符号の新しい最尤復号法,” 信学論 (A), vol. J66-A, no. 7, pp. 611–616, July 1983.
 - (55) M. Tajima, K. Okino, and T. Murayama, “Tail-biting code/error-trellis construction for linear block codes,” IEICE Technical Report, IT2014-39, pp. 153–158, July 2014.
 - (56) V. Sidorenko and V. Zyablov, “Decoding of convolutional codes using a syndrome trellis,” IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 40, no. 5, pp. 1663–1666, Sept. 1994.
 - (57) M. Ariel and J. Snyders, “Error-trellises for convolutional codes—Part II: Decoding methods,” IEEE Trans. Commun., vol. 47, no. 7, pp. 1015–1024, July 1999.
 - (58) 田島正登, 瀧田啓司, 河崎善司郎, “QLI 符号の SST ビット復号を用いた符号トレリスの縮退化,” 信学論 (A), vol. J80-A, no. 9, pp. 1574–1578, Sept. 1997.
 - (59) M. Tajima, K. Okino, and T. Miyagoshi, “Error-trellis construction for convolutional codes using shifted error/syndrome-subsequences,” IEICE Trans. Fundamentals, vol. E92-A, no. 8, pp. 2086–2096, Aug. 2009.
 - (60) M. Tajima, K. Okino, and T. Miyagoshi, “[Invited Talk] Code/error-trellis construction for convolutional codes using shifted code/error-subsequences,” IEICE Technical Report, IT2010-73, ISEC2010-77, WBS2010-52, pp. 37–44, March 2011.
 - (61) M. Tajima, K. Okino, and T. Miyagoshi, “Simultaneous code/error-trellis reduction for convolutional codes using shifted code/error-subsequences,” Proc. ISIT2011, pp. 2409–2413, Aug. 2011.
 - (62) M. Tajima, K. Okino, and T. Miyagoshi, “State-complexity reduction for convolutional codes using trellis-module integration,” IEICE Trans. Fundamentals, vol. E89-A, no. 10, pp. 2466–2474, Oct. 2006.
 - (63) R. M. Tanner, D. Sridhara, A. Sridharan, T. E. Fuja, and D. J. Costello, Jr., “LDPC block and convolutional codes based on circulant matrices,” IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 50, no. 12, pp. 2966–2984, Dec. 2004.
 - (64) G. Solomon and H. C. A. Tilborg, “A connection between block and convolutional codes,” SIAM J. Appl. Math., vol. 37, no. 2, pp. 358–369, 1979.
 - (65) H. H. Ma and J. K. Wolf, “On tail biting convolutional codes,” IEEE Trans. Commun., vol. COM-34, no. 2, pp. 104–111, Feb. 1986.
 - (66) M. Tajima, K. Okino, and T. Murayama, “Initial (final) state estimation in error-trellises for tail-biting convolutional codes,” IEICE Trans. Fundamentals, vol. E97-A, no. 3, pp. 881–887, March 2014.
 - (67) M. Tajima and K. Okino, “Error-trellises for tailbiting convolutional codes,” Proc. ISITA2012, pp. 648–652, Oct. 2012.
 - (68) M. Tajima, “Tail-biting trellises for a tail-biting convolutional code,” IEICE Technical Report, IT2015-25, pp. 47–52, July 2015.
 - (69) R. Koetter and A. Vardy, “The structure of tail-biting trellises: Minimality and basic principles,” IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 49, no. 9, pp. 2081–2105, Sept. 2003.
 - (70) R. J. McEliece, “On the BCJR trellis for linear block codes,” IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 42, no. 4, pp. 1072–1092, July 1996.
 - (71) M. Tajima, K. Shibata, and Z. Kawasaki, “Modification of syndrome trellises for high-rate convolutional codes,” IEICE Technical Report, IT2002-2, pp. 7–12, May 2002.
 - (72) H. Gluesing-Luerssen and E. A. Weaver, “Linear tail-biting trellises: Characteristic generators and the BCJR-construction,” IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 57, no. 2, pp. 738–751, Feb. 2011.
 - (73) H. Gluesing-Luerssen and E. A. Weaver, “Characteristic generators and dualization for tail-biting trellises,” IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 57, no. 11, pp. 7418–7430, Nov. 2011.
 - (74) G. D. Forney, Jr., “Dimension/length profiles and trellis complexity of linear block codes,” IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 40, no. 6, pp. 1741–1752, Nov.

1994.

- (75) A. B. Kiely, S. J. Dolinar, Jr., R. J. McEliece, L. L. Ekroot, and W. Lin, "Trellis decoding complexity of linear block codes," IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 42, no. 6, pp. 1687–1697, Nov. 1996.
- (76) S. Riedel, "Symbol-by-symbol MAP decoding algorithm for high-rate convolutional codes that use reciprocal dual codes," IEEE J. Sel. Areas Commun., vol. 16, no. 2, pp. 175–185, Feb. 1998.
- (77) 田島正登, 沖野浩二, 宮腰 隆, "Reciprocal dual code を用いた畳込み符号のトレリス複雑度の解析," SITA2004 予稿集, pp. 91–94, Dec. 2004.
- (78) H.-H. Tang and M.-C. Lin, "On $(n, n-1)$ convolutional codes with low trellis complexity," IEEE Trans. Commun., vol. 50, no. 1, pp. 37–47, Jan. 2002.
- (79) H.-H. Tang, M.-C. Lin, and B. F. U. Filho, "Minimal trellis modules and equivalent convolutional codes," IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 52, no. 8, pp. 3738–3746, Aug. 2006.
- (80) R. G. Gallager, Low-Density Parity-Check Codes, MIT Press, Cambridge, MA, 1963.
- (81) E. Arikan, "Channel polarization: A method for constructing capacity-achieving codes," Proc. ISIT2008, pp. 1173–1177, July 2008.
- (82) 笠井健太, "空間結合符号とその応用," 信学技報, IT2011-24, pp. 1–8, Sept. 2011.
- (83) A. Shokrollahi, "Raptor codes," IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 52, no. 6, pp. 2551–2567, June 2006.
- (84) Special Issue "Concatenated coding techniques and iterative decoding: Sailing toward channel capacity," S. Benedetto, D. Divsalar, and J. Hagenauer, eds., IEEE J. Sel. Areas Commun., vol. 16, no. 2, Feb. 1998.
- (85) Special Issue "Capacity approaching codes," D. Costello, S. Lin, T. Richardson, W. Ryan, R. Urbanke, and R. Wesel, eds., IEEE J. Sel. Areas Commun., vol. 27, no. 6, Aug. 2009.
- (86) Special Issue "The turbo principle: From theory to practice I," P. H. Siegel, D. Divsalar, E. Eleftheriou, J. Hagenauer, and D. Rowitch, eds., IEEE J. Sel. Areas Commun., vol. 19, no. 5, May 2001.
- (87) Special Issue "The turbo principle: From theory to practice II," P. H. Siegel, D. Divsalar, E. Eleftheriou, J. Hagenauer, and D. Rowitch, eds., IEEE J. Sel. Areas Commun., vol. 19, no. 9, Sept. 2001.
- (88) A. J. Felstroem and K. S. Zigangirov, "Time-varying periodic convolutional codes with low-density parity-check matrix," IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 45, no. 6, pp. 2181–2191, Sept. 1999.
- (89) M. B. S. Tavares, K. S. Zigangirov, and G. P. Fettweis, "Tail-biting LDPC convolutional codes," Proc. ISIT2007, pp. 2341–2345, June 2007.
- (90) G. D. Forney, Jr., "Coset codes—part II: Binary lattices and related codes," IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 34, no. 5, pp. 1152–1187 (Appendix A), Sept. 1988.

(IT 研究会提案, 平成 27 年 11 月 20 日受付
平成 28 年 1 月 18 日最終受付)

田島正登 (正員: シニア会員)

昭 47 早大・理工・電気卒・昭 54 同大学院博士課程了・同年 (株) 東芝入社・電子機器研究所研究員・平 5 富山大・工・助教授・平 15 同教授・平 18 同大学院理工学研究部教授・平 27 同大学名誉教授・主に符号理論の研究に従事・工博・平 21 年度本会論文賞受賞。