り細くなつたスライパ中の繊維がポアソン分布するであろうという結果を用い、そのようなスライパが何本もダブリングされ、偶然となり合わさつたスライパが同一色の繊維のためにかたまりを作る。その大きさを平均と分散とで求めようとする。なお(7)の應用上の問題は Cox の報文を参照されたい。

8. 結 論

ここで一應の整理をすると、細く延伸されたスライパ中の繊維はそれをダブリングしてできたスライパまたは糸の中ではポアソン分布している。この結果は

實驗に示した通りであるが、また同じ考えから同一試料をとつてもその試長を變化させるにつれて同じ結果が得られる。このことはむらの研究及び検査に對して嚴密であらねばならないであろう。次に Cox はダブリングの問題でポアソン分布を假定したがこの直観は正しいものであり、本報はその裏付けともなる。最後にポアソン分布であることでは前にも述べた通り先の理論式の發展にかなり簡単な出發點となり得る。本報の研究は文部省科學研究費(昭和28年度)による。

文 献

- 1) D. R. Cox; *J. Text. Inst.*, 45, No. 2 (1954)

第2報 ダブリングにおける混合の問題

1. ま え が き

第1報の最後にダブリングの効果についての Cox の式を少しく變形して紹介しておいたが、これをわれわれの目的とする“同一繊維がかたまりを作る”という問題にさらに接近させるために、本報では Cox と同じような模型からそのかたまりがどの程度の大きさになるかを平均と分散とであらわし、それらがダブリングや混合割合とどんな関係をもつかを論じてみよう。

2. 理 論 式

黒繊維の塊を作る確率を前報と別の方式で、項目(3)に直接的な關係を保たしめながら論ずるために、次のような模型を考える。

Fig. 1

ある展開された糸断面またはスライパ断面中の塊を Fig. 1 の如くとする。點線の丸はある延伸されたスライパ1本の断面を表わし、黒丸はその中に含まれる實在する黒繊維、白丸は同じ意味での白繊維を表わす。従つて點線の丸は前報のスライパ元であつて、左より右に番號を附し、その表われ方は混合率 p に關係し、それぞれ獨立な確率變數 $X_1, X_2, \dots, X_i$ をとる。圖のようにその間に白繊維が入らないとすれば、それは塊を作ると考えられ、その大きさを黒繊維の並ぶ數 x で

表わし、 x の變化を論ずる。

ここで、 $X_1, X_2, \dots, X_i$ は $0 \sim \infty$ を取り得る確率變數であるから、 $x = X_1 + X_2 + \dots + X_i$ は黒繊維が塊りを作る場合のその本數となる。

いま、 $S_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ とおくと、 N は $X_1, X_2, \dots$ の出方とは無關係の離散的な確率變數であるから、

$$\begin{aligned} P(S_N = x) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) P(S_N = x / N=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) P(S_N = x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cdot f_n(x) \end{aligned}$$

ここで g_n は黒繊維のスライパ元が n 個ならぶ確率で、 n 個ならぶということは黒繊維のスライパ元が n 個ならび(その確率は p^n) その後白繊維のスライパ元がくる(または白繊維が来る確率でもよく、その確率は $q=1-p$) ことであるから、 $p^n q$ となり、

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} p^n q &= q + pq + \dots + p^n q + \dots \\ &= (1-p) \{1 + p + \dots + p^n + \dots\} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (2)$$

の幾何分布をなす。

$F(x)$ は前報でも明らかにされたが、1個のスライパ元から黒繊維の確率となりポアソン分布するから、 $F_n(x)$ は明らかにその重疊となり、

$$F_n(x) = \frac{e^{-n\lambda} (n\lambda)^x}{x!} \quad (3)$$

ここで $\lambda = (\text{糸断面本數}) / (\text{全ダブリング數})$ である。

(1)(2)(3)より,

$$P(S_N=x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n q \frac{e^{-n\lambda} (n\lambda)^x}{x!} \\ = (1-p) \sum_{n=0}^{\infty} p^n \frac{e^{-n\lambda} (n\lambda)^x}{x!} \quad (4)$$

さて(4)は x の變化に従つて、ある分布を示すわけであるが、むしろ平均で論じた方が簡単になるので $E(x) = \bar{x}$ を求め、それと λ との關係を示す。

$$E(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x P(S_N=x) \\ = (1-p) \sum_{n=0}^{\infty} p^n \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-n\lambda} (n\lambda)^x}{x!} \quad (5)$$

(5)の末項はポアソン分布の平均であるから、 $n\lambda$ となり、

$$= (1-p) \lambda \sum_{n=0}^{\infty} n p^n$$

いま、

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} n p^n = \langle 1 + 2p + 3p^2 + \cdots + n p^{n-1} + \cdots \rangle p$$

とおき、

$$\frac{d}{dp} \left\{ I d_p = \frac{d}{dp} \left\{ p^2 \cdot \frac{1}{1-p} - \left\{ \frac{p}{1-p} d_p \right\} \right\} \right.$$

を考慮して

$$I = P/(1-p)^2$$

故に、(5)にこれを代入して、

$$\bar{x} = \left(\frac{p}{1-p} \right) \lambda \quad (5)'$$

を得る。(5)'は混紡糸中の黒繊維が塊を作る場合のその大きさの平均値で、一般的傾向を示すものということができ、それが混紡率と1個のスライパ元の大きさすなわち、ダブリング数とに關係することを表わす。

なお、それを對比して考えるために、分散を求めると

$$E(x^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 P(S_N=x) \quad (6)$$

$$= (1-p) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{x=0}^{\infty} p^n x^2 \frac{e^{-n\lambda} (n\lambda)^x}{x!}$$

$$= (1-p) \sum_{n=0}^{\infty} p^n (n^2 \lambda^2 + n\lambda)$$

$$= (1-p) \cdot p \left\{ \lambda \sum_{n=1}^{\infty} n p^{n-1} + \lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 p^{n-1} \right\}$$

上式の第1項は $\bar{x}$ に等しく、ここで第2項の和の形式を I' とおく

$$\frac{d}{dp^2} \left\{ \left\{ I' d_p d_p = \frac{d^2}{dp^2} \left\{ p \sum_{n=1}^{\infty} n p^{n-1} d_p \right\} \right. \right. \\ = \frac{d^2}{dp^2} \left\{ p^2 \sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1} - \left\{ p \sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1} d_p \right\} \right\} \\ = \frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{p^2}{1-p} \right) - \frac{d}{dp} \left(\frac{p}{1-p} \right) \\ = \frac{1+p}{(1-p)^3} \quad (7)$$

$$\therefore E(x^2) = (1-p) p \left\{ \lambda \frac{1}{(1-p)^2} + \lambda^2 \frac{1+p}{(1-p)^3} \right\} \\ = \frac{p}{1-p} \lambda + \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} \lambda^2 \quad (8)$$

となり、 $\text{Var } x$ を求めると

$$\text{Var } x = E(x^2) - \{E(x)\}^2 = \frac{p}{1-p} \lambda + \frac{p}{(1-p)^2} \lambda^2 \quad (6)'$$

(6)'はかなり簡単であり、(5)'と(6)'とを比較すると(6)'の初項は全く同じものであり、 λ が小になるか、 p が小になるかに従つて第2項は急速に小になる。その結果 $\bar{x}$ と $\text{Var } x$ とは近似してくる。

3. 理論式の検討および補正係数

(5)'と(6)'とはともに λ の函数で、ダブリング数を無限回行つた場合を考えると、 $\lambda \rightarrow 0$ となり(5)'と(6)'は0に近づく。すなわち平均値および分散においてそれぞれ0の塊が生ずることになる。しかし実際には0個の塊を考えることは無理であり、適當な補正を行う。すなわち(5)'と(6)'とは

$$P(S_N=x) = (1-p) \sum_{n=0}^{\infty} p^n \frac{e^{-n\lambda} (n\lambda)^x}{x!} \quad (4)$$

で、 $x=0$ のときの値も含む。このときには実際には黒繊維は表われない(このことは數學的には0個の大きさの塊を意味しており、ある確率 $P(S_N=0)$ を持つて存在している)従つてわれわれの實驗的な概念に一致させるために、 $x=0$ の場合を除いた状態で $P(S_N=x)$ の確率を規定しなければならぬ。そのために(4)の代りに

$$P'(S_N=x) = \frac{P(S_N=x)}{1-P(S_N=0)} \quad x \geq 1 \quad (9)$$

をもつて x の表われる確率とすると、

$$P'(S_N=0) = (1-p) \sum_{n=0}^{\infty} p^n e^{-n\lambda} \\ = (1-p) \cdot \frac{1}{1-pe^{-\lambda}}$$

$$\therefore P'(S_N=x) = P(S_N=x) \frac{1-pe^{-\lambda}}{P(1-e^{-\lambda})} \quad (10)$$

$P(S_N=x)$ の係数は n と x とには無関係な常数項となるから、これを定数 A で表わし、これを補正係数とすれば $E(x)$, $E(x^2)$ の計算には何等関係しない。

補正された平均値と分散を m , σ^2 とする (5)' (6)' はそれぞれ次のような値をとる。

$$m = \frac{1-pe^{-\lambda}}{p(1-e^{-\lambda})} \cdot \frac{p}{1-p} \cdot \lambda \quad (11)$$

上式の平均値 m は $\lambda \rightarrow 0$ するときには 1 に近づく、平均 1 本の黒繊維になり、ばらばらに分離することを意味する。

次に分散を求めると (8) と (6)' の関係より、

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \left\{ \frac{p}{1-p} \lambda + \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} \lambda^2 \right\} A - \left\{ \frac{p}{1-p} \lambda \cdot A \right\}^2 \\ &= m \left(1 + \frac{\lambda}{1-p} \right) + (A-A^2) \left\{ \frac{p}{1-p} \lambda \right\}^2 \quad (12) \end{aligned}$$

を得る。(12) で $\lambda \rightarrow 0$ になるときには $\sigma^2 \rightarrow 0$ になる。このことは糸體中で黒繊維が完全に分離し、1本1本の塊を作る場合を意味し、その分散が 0 になることを説明している。

4. 理論式の持つ意味

11) および (12) の結果を圖に示すと、Fig. 2~Fig. 5 になる。ここで 11) 及び (12) から考えられる種々の性質を論じよう。

a) 平均値に対する検討

1) 混合率が大きいほど、糸體中で黒繊維が塊まりを作る傾向が大きくなり、(平均値 m が増加する) それはダブリングを増すことにより曲線的 (ほとんど直線に近い) 傾向を示して減少する。(Fig. 2 参照)

Fig. 2

Fig. 3

2) 同様の傾向は混合率を横軸にとることによりさらに明瞭になり、混合率が増すほど塊を作る傾向 (塊りの大きさ) は大きくなる。すなわち平均値は二次曲線的に増加する。また Fig. 3 でわかるようにダブリングを適當に増加することによりこの差は小になる。

なお、混合率が 0.5 以上は全く興味のないことであるが、念のために點線で示すと、これは混合率が 1、すなわちことごとく黒繊維になる場合に向つて増加し、その際には黒繊維の塊りは無限大になる。

3) 11) 式の関係を實際の混紡技術にあてはめるためには、次のような例を理解すれば十分である。いま紡績糸の断面平均本数を 100 本とし、ダブリング總数を 200 回として考えると、1 本のスライバ元の含む平均本数 λ は $100/200$ として求まる。次に、これの 1 割の混合が實用上許し得る範圍のものであるということが判明しておれば 2 割混合で、それと同程度の混合を満足するには圖上で $p=0.1$, $\lambda=0.5$ と同じ m をとる値を $p=0.2$ の曲線上で求めればよく、その結果 $\lambda=0.4$ を得る。すなわち $100/M=0.4$ $M=250$ のダブリングをすればよい。

また、合目的的に平均値を與えることにより、例えば塊を 1.3 の程度の大きさに留めるには、混合率が 1 割では $\lambda=0.5$, 2 割では $\lambda=0.4$, それぞれ 200, 250 回のダブリングを必要とすることがわかる。實際の場合にはさらにダブリングが多い場合も必要であろう。その際の問題に對しては式 11) を λ の小さな値に對して解いておけばよい。

b) 分散に対する検討

1) Fig. 4 でもわかるように、明らかにダブリング

Fig. 4

Fig. 5

数が減少するに従って、その分散は急速に増加し、しかもその増加の傾向は混紡率の多いほど著しい。すなわち糸體中で黒繊維が大小の塊を作つて分布しているのだが、その傾向が激しくなることを意味している。

2) 特に Fig. 5 に示すように混合率を横軸に取ることにより、その傾向を把握することは容易である。その際にはほぼ二次曲線的に分散も増加するが、ダブリング数が増加するにつれて混合率に対する分散の変化は比較的になる。

3) 混合むらを問題にする場合は塊の分散が重要なのであるから、分散に対するダブリングの問題を考慮することがまず第一に必要である。しかも、塊の分散の方がダブリングおよび混合率に關して著しい変化を示すから、平均値の 3) の項で述べたと同様の方法を採用することにより適當なダブリング数を規定できるのである。

5. 結 び

實際の糸體構造の中で繊維は斷面に対して平面的に分布しているが、ここでは一次元的に分布しているものとして理論をすすめたので實際上とは多少の相違が生ずるであろうことは十分想像し得るが、理論式そのものはわれわれの常識をよく説明している。また梳毛工程のように多數回のダブリングをなす場合等において、それが單に糸むらのみを問題にするのではなく、多種のロットから作られたトップを均一に混合しようという努力によるということも察せられる。

なお物理的性質の異なるものを混合する場合は、ドラフト作用等により特種な性質の糸ができることは十分に考えられることであるが、それは論點において本報とは別のものであり別報する。

(昭和29年7月26日受理)

混紡糸のむらに関する研究

第1報 スライバ又は糸中の繊維の分布

第2報 ダブリングにおける混合の問題

東京工業大学 石川 章一・清水 二郎

STUDIES ON THE UNEVEN MIXING OF FIBRES IN SLIVERS AND YARNS.

By Shoichi Ishikawa and Jiro Shimizu

(I) DISTRIBUTION OF FIBRES IN SLIVERS AND YARNS.

A statistical and experimental approach to the study of uneven mixing of fibres in slivers and yarns caused by drawing process.

The paper discusses that theoretical distribution of fibres in slivers and yarns holds Poisson distribution:

$$p_r = \frac{e^{-\lambda p} (\lambda p)^r}{r!}$$

where

r : number of fibres per cross-section

p : proportion of coloured fibres

λ : mean number of fibres per cross-section.

In this paper the problems of doubling is discussed only as a modification of Cox's formula, and the next report will deal with our formula concerning the doubling operation.

(II) PROBLEMS OF MIXING BY DOUBLING OPERATION.

This paper discusses the theoretical equations for irregular arrangement of coloured fibres in the yarn cross-section.

The mean number (m) and variance (σ^2) of the coloured fibres are expressed by:

$$m = A \frac{p}{1-p} \cdot \lambda$$

$$\sigma^2 = m \left(1 + \frac{\lambda}{1-p} \right) + (A - A^2) \left(\frac{p}{1-p} \lambda \right)^2$$

$$A = 1 - pe^{-\lambda/p} (1 - e^{-\lambda})$$

where

λ : mean number of fibres per cross-section/total doubling

p : proportion of coloured fibres.

(Received 26. 7. 1954)

第1報 スライバ又は糸中の繊維の分布

1. ま え が き

梳毛工程における混合の効果の基礎的な判断を與えるために、ダブリングとドラフチングの結果スライバ、

糸の中に観察される事項を實驗的にまた理論的に説明しようとした。本報ではまず理想的な状態では延伸されたスライバまたは糸中の繊維の分布がポアソン分布に従うことをたしかめ、あわせて何割かの繊維が