(昭和 32 年 12 月 23 日受理)

織物変形解析への差分方程式の応用

信州大学繊維学部 呉 祐吉・篠原 昭

A TENTATIVE DISCUSSION ON THE APPLICATIONS OF
DIFFERENCE EQUATION TO FABRIC RESEARCHES

by Yukichi Go and Akira Shinohara

(Faculty of Textiles, Shinshu University, Ueda-City, Japan)

It is convenient to apply the difference equation to the fabric deformation analysis, above all, in the case of low density fabric such as leno, where this method may be very effective

(1) In order to analyse draping shape of hanged curtain, we can apply this equation to a simple model of this phenomenon as shown in Fig. 2, and the deflection of horizontal elements of its model, δ_x may be expressed :

$$\delta_x = KT_0 e^{-\lambda x}$$

where T_0 is tension applied, K and λ are constant.

(2) In the M.I.T. Drape-o-meter, the chord-length l_x at a point x of the model as Shown in Fig. 4, is obtained by this idea, with the function $d_x = d_0 e^{-\lambda x}$ it leads to :

$$l_x = l_0 \left(1 + \frac{d_0^2}{A} \right)$$

(3) Normal pressure of cross point of the warp and weft yarns is obtained by applying this difference equation to the 3 moments theorem of continuous beam. (Received 23. 12. 1957)

1. 緒 言

従来織物の力学的な変形をとり扱う場合、これを完全弾性体の板あるいは完全弾性体の棒(糸)の平列したものと弾性学的に取り扱う立場と、純粋に幾何学的な方法によるものとの二つがとられていた。

普通の衣服用としての織物は密度が大きく、これを heavy elastica^{1,2)} として取り扱うことは事実上さしつかえないのであるが、後述するような、ある種の織物変形や漁網のごとき目のあらいものでは以上のような取り扱いをする場合には、その解析が数学的に複雑になる³⁾。

織物は経・緯糸の交錯からなり、著者ら⁴⁾が以前指摘したごとく、トラスあるいはラーメンのような構造物と形状的に類似したものである。したがってラーメンや連続梁の解析⁵⁻⁷⁾と同様、織物の変形の力学的な解析に差分方程式を用いることによって、多くの問題が比較的容易に解決できる可能性があり、また微分方程式によるオーソドックスな方法では解きたい問題の近似解をうることができる。

差分方程式は同一要素系からなる力学系や電気系の解析に古くから応用されていたもので、連続梁⁷⁾、矩形格子型ラーメンの捩屈⁷⁾、多シリンダ機関の振動⁷⁾などの力学系、送電線の碍子列⁷⁾、電波濾波器⁷⁾などの電気系、更

に確率論たとえば de Monmort の問題⁸⁾、また最近では高分子網目構造の振動問題に Bueche⁹⁾が差分方程式を応用しているが、これは多くの mass を有する振動系の問題¹⁰⁾(たとえば多シリンダ機関)と数学的にはアナログ的な取扱いをしたものである。

2. 織物変形解析への応用例

織物の変形を解析する場合特に重要なのは定数係数の線型差分方程式でなく一次の同次式である。ここでは著者が応用した 2, 3 の問題について、その応用例を記述してみる。

(a) 服の型くずれの問題

安い背広あるいは学生服を着て左のポケットに重い物を入れると、その上にある左の胸ポケットは弓状に引張られてポケットの裏地が三日月状に現われる (Fig. 1)。類似の現象はカーテンのドレープにもみられる。これは生地の剪断弾性率の小さな密度の小さなもの程顕著に現われる。

これは実験室的には矩形的織物の相対する 2 辺を固定し、残りの 2 辺のうち 1 辺は free にし、他の 1 辺の中央部をつまんで、布面に平行に引張つたときの変形に相当する。わかりやすいために Fig. 2 のような一つの単純なモデルについて考える。

Fig. 1 An example of crescent deformation (arrow head) of upper pocket (2) of a sack coat, this phenomenon appears when the lower pocket (1) is loaded with heavy weight.

Fig. 2 A simple model of crescent deformation of fabric

いま図のように一定間隔で横方向の糸 $l_0, l_1, l_2, \dots, l_n$ が並び、それに縦方向の糸 $l_{10}, l_{11}, \dots, l_{1n}$ が直角にかつ直列に組み合わさっているものとする。各接点は完全接合(weld)とし、かつ $l_{10}, l_{12}, \dots$ は互に独立であるとする。各 $l_{10}, l_{12}, \dots$ の張力を $T_1, T_2, \dots, T_n$ 、各撓みを $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n$ 、また $l_0, l_1, \dots, l_n$ をそれぞれ $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n$ だけ撓ませるに要する力を

$f(d_0), f(d_1), \dots, f(d_n), \dots, f(d_n)$ とすると次の関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} T_0 - T_1 &= f(\delta_0) \\ T_1 - T_2 &= f(\delta_1) \\ &\dots\dots\dots \\ T_{n-1} - T_n &= f(\delta_{n-1}) \\ T_n - T_{n+1} &= f(\delta_n) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

また、 $l_{11} = l_{12} = \dots$ であるから弾性の定数を K として

$$\left. \begin{aligned} T_2 &= K(\delta_0 - \delta_1) \\ T_2 &= K(\delta_1 - \delta_2) \\ &\dots\dots\dots \\ T_n &= K(\delta_{n-1} - \delta_n) \\ T_{n+1} &= K(\delta_n + \delta_{n+1}) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式 (1) と (2) から

$$K(\delta_{n-1} - \delta_n) - K(\delta_n - \delta_{n+1}) = f(\delta_n)$$

一般に水平張力を受けている糸の中央に集中荷重した場合の撓み量は、変形が微小なときには荷重に比例するとみられるから、その比例の定数を c として

$$\delta_{n-1} - B\delta_n + \delta_{n+1} = 0 \quad (3)$$

B は定数で $(c/k+2)$ に等しい。これは二階の同次差分方程式である。式 (3) に $\delta_n = e^{\lambda x}$ (λ ; 未定定数) を代入すると

$$e^{\lambda(x-1)} - B e^{\lambda x} + e^{\lambda(x+1)} = 0$$

$e^{\lambda x}$ で除して B を求めると $B = 2 \cosh \lambda$ 。(3) の一般解は上の関係から

$$\left. \begin{aligned} \delta_n &= A_1 e^{\lambda x} + A_2 e^{-\lambda x} \\ \text{あるいは} \\ \delta_n &= B_1 \cosh \lambda x + B_2 \sinh \lambda x \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

境界条件は $x=0$ で $\delta_0 = K T_0$ および $x=\infty$ で $\delta_{\infty} = 0$ 、ここで T_0 は加える張力である。ゆえに求むる解は

$$\delta_n = K T_0 e^{-\lambda x} \quad (5)$$

となり、指数的に減少することがわかる。この方法は一層複雑な場合にも敷衍できるものである。また交錯点における摩擦効果を考慮した場合も全く同様で、ベルト車における摩擦効果を考慮した場合も全く同様で、ベルト車の公式を借用して計算できるが、ここでは省略する。

(b) M. I. T. Drape-o-meter^{11,12)} の弦の長さの計算

M. I. T. Drape-o-meter において把持台から試料に沿っての長さ x と、その点における弦(Chord)の長さとの関係は未だ理論的には解析されていない。厳密な解析の代わりに大よその目安をつけるためには、差分方程式の概念を利用するのが便利であり、目のあらい極端な場合としての漁網やスズレのようなものにまで応用できる利点がある。

Fig. 3 M.I.T. Drape-0-meter

いま, Fig. 4 で $\overline{PP'}$ は常に垂直に保たれていると仮定し (厳密にはこの仮定は成り立たない), 簡単のために n 本の横糸と 3 本の縦糸 (うち 1 本は $\overline{PP'}$ と一致し, 他は両端にあるものとする) からなる場合を考える。

縦糸要素 $1, 2, \dots, x, \dots, n$ の変形時にうける力を $w_0, w_1, \dots, w_x, \dots, w_n$, また横糸に加わる力をそれぞれ $f(d_0), f(d_1), f(d_x), \dots, f(d_n), \dots$ とすると。(a) の場合と全く同じ方程式になる。すなわち

$$w_0 - w_1 = f(d_0)$$

$$w_1 - w_2 = f(d_1)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$w_x - w_{x+1} = f(d_x)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\text{また} \quad w_n = K(d_{n-1} - d_n) \quad (7)$$

$f(d_0)$ を近似的に w に比例するとし, d_n を求めると,

$$d_n = d_0 e^{-\lambda n} \quad (8)$$

がえられる。

$f(d_0)$ を他の函数にとり, 縦糸数が多い場合について は別に報告する予定である。(8) 式において d を弦の

Fig. 4 Projections of M.I.T. Drape-0-meter model composed of n membered horizontal elements and 3 vertical elements which are at the center and at both ends.

Fig. 5 Plots of chord length lx vs. x

Fig. 6 Plots of $\log (l_0 - lx)$ vs. x

長さ l に幾何学的に変換すると, 弦の長さが指数函数的になることがわかる。Fig. 5 は人絹サージについての測

定の一例であり, また Fig. 6 は $l = l_0(1 - e^{-\lambda x})$ と簡単に仮定し, Fig. 5 のデータを $(l_0 - l) - x$ に換算し, 片対数に Plot したものである。これでは予期した通り右下りの直線になっている。

(c) 織物構成糸の交錯圧力の推定

製織の際に打込まれた緯糸は経糸の張力のために通常はクリンプし, 経緯糸の間に法圧力を生ずる¹⁰⁾が, この種の圧力の推定は織物の研究の上にしばしば必要になり, また織物の引張伸度の理論的計算を行う際にも問題になる。

われわれ¹⁴⁾は先に織物の剪断変形の模型として径方向にゴム紐 (5 mm 直径) を用い, 両端を固定し, 緯糸にガラス棒を用いたが, この場合は Fig. 7 のごとく I の連続梁が II のように移動した場合に還元できる。この場合の接触法圧力はエネルギー法によって求められる, モーメントを M_x とすると

Fig. 7 Continuous beam model of warp and weft crossing, which is composed of glass rods (weft) and rubber strings (warp)

$$M_{x-1} + 4M_x + M_{x+1} = (-1)^x \cdot \frac{24EIr}{l^2} \equiv K \quad (9)$$

ここで r はゴム紐の半径と硝子棒の半径との和、硝子棒の移動距離である。(9) 式は 3 モーメントの定理に他ならない。前の報告においては $M_{x-1} = M_{x+1}$, $M_x = M_{x+2}$ と仮定し、結局硝子棒を無数あるとして、その中央部ではすべてが等しい場合として計算した。

いまこれを差分方程式で解くと、(9) 式の同次方程式の一般解は

$$M_x = C_1 \lambda^x + C_2 \lambda^{-x}, \quad \lambda = -2 + \sqrt{3} \quad (10)$$

しかるに上式の特解は $P = k/2$ となる、ゆえに

$$M_x = C_1 \lambda^x + C_2 \lambda^{-x} + (-1)^x \cdot \frac{12EIr}{l} \quad (11)$$

いま、クランプ(固定端)におけるモーメントを M とすると、 $M_0 = M_n = M$, (n は偶数) なる境界条件から

$$C_1 = \left(M - \frac{K}{2} \right) \left(\frac{1}{1 + \lambda^n} \right),$$

$$C_2 = \left(M - \frac{K}{2} \right) \frac{\lambda^n}{(4 + \lambda^n)}$$

$$\therefore M_x = \left(M - \frac{K}{2} \right) \left(\frac{\lambda^x + \lambda^{n-x}}{1 + \lambda^n} \right) + \frac{K}{2} \quad (12)$$

となる。

$\lambda = -0.2679$ であるから、 n が十分大きいとき、中央部では λ^n , λ^{n-x} とともに 0 とみなせるから、

$$M_x \approx k/2 \quad (13)$$

これは前の報告の結果と一致する。前の報告では $|M_x|$ がすべて等しいと仮定したのであるが、 M_x の値を x の全部について求めるには、この方法が便利である。

(d) その他の例(主として多自由度系の振動問題)

振動リード法のような方法で織物の振動特性を調べる場合、その極端なケースとして高坂氏¹⁵⁾らは次の 2 つが考えられるとしている。

i) 弾性が復元力となる場合(弾性板振動)

ii) 張力が復元力となる場合(鎖振動)

後者が問題になるのは糸密度が小さく、縦糸の弾性が無視できるような flexible な場合である。この種の問題は自由度が多く、広義座標を用いた解析は複雑になる。

典型的な場合を考えれば前述の多シリンダ機関の振動

問題⁷⁾とアナログ的に取り扱える。この種の問題で一般に変位を θ , 角振動数を ω とすると運動方程式は

$$\theta_{x-1} - (2 - \alpha^2)\theta_x + \theta_{x+1} = 0 \quad (14)$$

の形になる。ここで $\alpha^2 = I\omega^2/c$, I は慣性モーメント, C は変位に比例した復元力に関係した定数である。

織物の reed vibration の場合、横糸方向の I と復元力 C を求めておけば、上とアナログ的な取り扱いが可能である。

前述のごとく Bueche⁹⁾の高分子網目構造の理論では i 番目の要素に作用する非粘性力の x 成分を F_{xi} とすると

$$F_{xi} = (x_{x+1} - x_i)\alpha - (x_i - x_{i-1})\alpha \\ = \alpha(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) \quad (15)$$

すなわち

$$m\ddot{x}_i = \alpha(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) \quad (16)$$

なる差分方程式の形になる。

一般に差分方程式を解く場合、微分方程式と同様ラプラス変換を利用するのが便利である。

この他織物のシワ(繊維の大変形)の問題、ダイアフラム式布破裂試験の解析等に有力な手段となるものとおもわれる。

3. 総 括

差分方程式が織物のある種の変形を解析する上に有力な手段となることを説明し、服のミダレ, M.I.T. ドレープオメーターの解析など 2, 3 の問題を引例して具体的な説明をした。全く新しい試みであるので、種々難点も多いことと思われるが、御批判願えれば幸甚である。

なお本研究に当り種々御協力たまわつた松橋房江氏に感謝の意を表する。

文 献

- 1) F.T. Peirce; *J. Text. Inst.*, 21, T 377 (1930)
- 2) W.G. Bickley; *Phil. Mag.*, 17, 603 (1934)
- 3) C. Mack & H.H. Taylor; *J. Text. Inst.*, 47, T 477 (1956)
- 4) 呉 祐吉, 篠原 昭, 松橋房江; 本誌, 12, 563 (1956)
- 5) 福田武雄; 差分方程式, 岩波講座現代応用数学, 第 6 巻, A. 11 (1957)
- 6) " ; 構造力学, 河出 (1942)
- 7) T.v. Kármán & M.A. Biot; *Mathematical Method in Engineering*, Ch. 11, McGraw-Hill, New, York (1940)
- 8) 伏見康治; 確率論及統計論, 河出 (1942) p. 78.
- 9) F. Bueche; *J. Chem. Phys.*, 22, 603 (1954)
- 10) 津枝正介; 機械力学, p. 103, 産業図書 (1945)
- 11) L.J. Winn & E.R. Schwarz; *Am. Dyestuff. Rep.*, 29, 469, (1940)
- 12) E.R. Kaswell; *Textile Fibers, Yarns and Fabrics* Reinhold, New York, (1953)
- 13) 松田秀一; 本誌, 11, 646 (1955)
- 14) 呉 祐吉, 篠原 昭, 松橋房江; 本誌, 13, 148 (1957)
- 15) 深谷直蔵, 小沢五郎, 高坂碩三; 織機学会講演 (1955-5 月)