(昭和 39 年 6 月 9 日 受理)

ベルト掛方程式から摩擦指数を求める一方法

東京工業大学 久世 栄一・古島 昭雄

ONE GRAPHICAL METHOD FOR OBTAINING THE FRICTIONAL INDEX FROM THE BELTING EQUATION

By Eiichi Kuze and Teruo Furushima

(Tokyo Institute of Technology, Ōokayama, Meguro-ku, Tokyo, Japan)

On the fibre or yarn sliding around a cylinder, the relation of the initial tension to the final tension is given by the following equation (i. e. belting equation) :

$$T^{1-N} = T_0^{1-N} + a(1-N)\theta\rho^{1-N} \quad (1)$$

where T is the final tension of fibre or yarn,
 T_0 is the initial tension of fibre or yarn,
 θ is the lapping angle of fibre or yarn against the cylinder,
 ρ is the radius of the cylinder,
 N is the frictional index,
 a is the constant.

From the above equation, one method for calculating the approximate value of the frictional index is stated below.

1) The following equation is derived from the equation (1) :

$$\log dT/dT_0 = N \log (T/T_0) \quad (2)$$

Let $x = \log (T/T_0)$ and $y = \log dT/dT_0$, then a graph having gradient N and passing through the origin of the coordinate would be expected.

2) The method of the simplest calculation may be expressed by

$$N = \sum y_i / \sum x_i \quad (3)$$

where x_i and y_i are the values based on the experimental data.

3) The value of dT/dT_0 can be obtained by the gradient of two consecutive points given in the experimental data. Then a method for estimating the value of T/T_0 is to obtain the mean value of T/T_0 for the two consecutive points.

(Received June 9, 1964)

1. ま え が き

繊維または糸の単位長さに加わる荷重 R に対して摩擦
 力 F は $F = aR^N$ で表わされる。ここで a, N は定数。し
 かるときベルト掛方程式¹⁾ すなわち円筒に繊維または糸
 をベルト掛して滑らせたときの摩擦を表わす式は次のよ
 うに示される。

$$T^{1-N} = T_0^{1-N} + a(1-N)\theta\rho^{1-N} \quad (1)$$

ただし, T 糸の終張力

T_0 糸の初張力

θ 糸の円筒に対する巻きつけ角

ρ 円筒半径

N 摩擦指数

a 定数

上式において実験値 T, T_0 を得た場合, 摩擦指数 N を求
 める計算法には次の 2 つがある。

1) 任意の N を与えて a のパラッキを求め, このパラ
 ツキを最小ならしめるような N を求める最小二乗法的や
 り方 (Howell¹⁾)。

2) $N \geq 1$ の場合次の近似式を用いる方法 (Howell¹⁾
 および Rubenstein²⁾)。

$$T/T_0 = \exp \{a(\rho/T_0)^{1-N}\theta\}$$

さらに精確な値を欲する時はこの近似式によつてだいた
 いの N をつかみ 1) の方法による。1) の方法は相当の計
 算量となり 2) の方法では $N \geq 1$ の場合のみ有効であ
 る。これらとは異なつた方法を次に述べる。

2. 式の誘導と計算のやり方

Fig. 1. The method of fitting.

$$x = \log(T/T_0), \quad y = \log dT/dT_0$$

x_i and y_i are the values based on experimental data. Best fitting line is shown by $y = Nx$.

1) 基本式の誘導

ベルト掛方程式(1)を微分すると

$$dT/dT_0 = (T/T_0)^N$$

を得る。よつて

$$\log dT/dT_0 = N \log(T/T_0) \quad (2)$$

$\log dT/dT_0$ を y 軸に $\log(T/T_0)$ を x 軸にとると勾配 N で原点を通るグラフが得られるはずである。

また付着項がある場合³⁾ すなわち

$$(T + R_0\rho)^{1-N} = (T_0 + R_0\rho)^{1-N} + a(1-N)\theta\rho^{1-N} \quad (3)$$

ただし R_0 は糸単位長さ当りの円筒への付着力の場合は

$$\log dT/dT_0 = N \log(T + R_0\rho/T_0 + R_0\rho) \quad (4)$$

任意の $R_0\rho$ をとることにより best fit させることが試行錯誤によつてできる。

2) fitting のさせ方

$y = \log dT/dT_0$, $x = \log(T/T_0)$ とし x_i, y_i をそれぞれ実験によつて得られた値とする (Fig. 1)。fitting のさせ方はいろいろ考えられるが、そのうち 2, 3 の方法を次にあげる。

i. 対数グラフにプロットし直観的に fit させる。いわゆる目のこによる方法。

ii. 平均的考えによる方法。 x_i の誤差に対し y_i の誤差のほうがはるかに大きいと考え x_i の誤差を無視する。バラツキ (平均偏差) $\sum |y_i - Nx_i|$ を最小ならしめるようにさせる。すなわち

$$N = \sum y_i / \sum x_i \pm t_\alpha \sqrt{n} / \sum x_i \cdot \sqrt{(\sum y_i^2 - \sum^2 y_i / n) / (n-1)}$$

ただし n (x_i, y_i) の数

t_α 危険率 α の t 表の値、従つてこの危険率による信頼限界が $\pm$ 以下の項によつて表わされる。

iii. 等分散性を仮定した最小二乗法。バラツキ

$\sum (y_i - Nx_i)^2$ を最小ならしめるような N を求めると

$$N = \sum x_i y_i / \sum x_i^2 \pm t_\alpha \sqrt{n} / \sum x_i^2 \cdot \sqrt{(\sum x_i^2 y_i^2 - \sum^2 x_i y_i / n) / (n-1)}$$

iv. 等相対分散を仮定した最小二乗法。バラツキ

$\sum (y_i - Nx_i)^2 / x_i^2$ を最小ならしめるような N を求めると

と

$$N = (\sum y_i / x_i) / n \pm t_\alpha / \sqrt{n} \cdot \sqrt{(\sum y_i^2 / x_i^2 - \sum^2 y_i / x_i / n) / (n-1)}$$

3) 計算方法

dT/dT_0 は相となる 2 点よりその勾配を求めることによつて求めると、これに対応する T/T_0 の決め方が問題となる。これが本法において誤差の入ってくる本質的問題点である。いま Fig. 2 のように相となる実験値 A, B を考えると、 $T_0 - T$ の関係曲線 $\widehat{APB}$ において求める T/T_0 の値を $\widehat{OP}$ の勾配とすれば、 A, B の中点 M より勾配 $\widehat{OM}$ を求めるものと勾配 $\widehat{OA}$ と $\widehat{OB}$ の平均 $\widehat{OD}$ を求めるものとが考えられる。 $\widehat{OP}$ は $\widehat{AB}$ の勾配と $\widehat{APB}$ のわん曲の変化のぐあいから $\widehat{OM}$ より $O-T$ 軸よりになる。また $\widehat{OD}$ も同様である。一方計算の手間は $\widehat{OD}$ のほ

Fig. 2. A method for estimating the values of T/T_0 . A and B are experimental points and $\widehat{APB}$ is $T-T_0$ curve. Ideal value of T/T_0 is shown by the gradient of $\widehat{OP}$. M is the point of centre between A and B , and the gradient of $\widehat{OD}$ is the mean of the gradients $\widehat{OA}$ and $\widehat{OB}$. Then $\widehat{OD}$ is nearer to $\widehat{OP}$ than $\widehat{OM}$.

Table 1. An example of the calculation for $N \approx 1$, from Rubenstein's data. 100/36/4 continuous filament viscose (11.1 tex) lapping around a rough glass rod and sliding at speed 32 cm/sec.

T_0	difference	T	difference	dT/dT_0	T/T_0	mean of T/T_0
6.0 g	3.5	13.7	7.9	2.25	2.28	2.28
9.5	3.0	21.6	6.6	2.20	2.27	2.26
12.5	4.0	28.2	8.5	2.12	2.26	2.24
16.5	5.0	36.7	10.6	2.12	2.22	2.21
21.5	3.5	47.3	8.2	2.34	2.20	2.21
25.0	5.0	55.5	9.4	1.88	2.22	2.19
30.0		64.9			2.16

Fig. 3. Graphical demonstration of Table 1.

Table 2. An example of the calculation for general value of N , from Lyne's data. Continuous filament yarn made of cellulose acetate, lapping around a chromium plated cylinder and sliding at speed 100 m/min.

$$N = \sum y_i / \sum x_i = 4.592 / 5.904 = 0.78.$$

T_0	difference	T	difference	dT/dT_0	$\log dT/dT_0$	T/T_0	mean of T/T_0	$\log (\text{mean of } T/T_0)$
1 g		8.3				8.30		
2	1	14.3	6.0	6.00	0.778	7.15	7.72	0.888
5	3	28.2	13.9	4.64	667	5.64	6.40	806
7	2	35.1	6.9	3.45	538	5.01	5.32	726
10	3	44.7	9.6	3.20	505	4.47	4.74	676
15	5	60.1	15.4	3.08	489	4.01	4.24	627
20	5	74.4	14.3	2.86	456	3.72	3.87	588
25	5	87.3	12.9	2.58	412	3.49	3.60	556
30	5	99.7	12.4	2.48	395	3.32	3.41	533
40	10	122.2	22.5	2.25	352	3.05	3.19	504
					$\Sigma 4.592$			
						5.904		

うが一段階少ない。いずれにしてもその差は僅少であろう。よつて OA, OB の勾配の平均から T/T_0 を推定することにする。

従つて本報を用いるときは打点数を多くするほうが個々の点の精度を上げるよりもよいことになる。

3. 計算例

1) 摩擦指数が N に近い場合の計算例を Rubenstein²⁾ の実験結果より Table 1 および Fig. 3 に例示する。

N が 1 に近い場合は打点は 1 カ所に集中して表われるが、グラフは原点を通る性質を持っているので勾配の精度には影響しないのが本法の特徴である。

2) 摩擦指数 N が一般に表われるような値の場合についての計算例を Lyne⁴⁾ の実験結果より Table 2 および Fig. 4 に示す。

平均的考えによる計算値は 0.777 等分散を仮定した最小二乗法によるものは 0.785 そして等相対分散を仮定した最小二乗法によるものは 0.770 ± 0.045 (95% 信頼限界) となった。一方 Howell の最小二乗法的やり方で a のすなわち $a(1-N)\theta\rho^{1-N}$ の相対分散を $N=0.78, 0.79, 0.80$

Fig. 4. Graphical demonstration of Table 2.

Fig. 5. Graphical demonstrations of Table 3a with the variable values of $R_0\rho$.

- $R_0\rho = 0$ mg i. e. $N = 0.70$
- 5 0.75
- 10 0.79
- × 15 0.82

The best fit value is $N = 0.75$.

について調べるとその値は 8.4×10^{-4} , 6.7×10^{-4} , 7.1×10^{-4} となつた。よつて本法による場合は目のこままたは平均的考えによつて fitting するもので充分なものと考えられる。さらに精密な値がほしい場合は Howell の方法によらねばならないだろう。

3) 付着項のある場合のデータ Table 3a より (4) 式の $R_0\rho$ に適当な値を入れて平均偏差を最小ならしめる方法で, best fit を得た場合の計算例を Fig. 5 に示す。各 $R_0\rho$ の値に対する偏差の和 $\sum |y_i - Nx_i|$ と N の値を Table 3b に示す。

$N = 0.75$ が求める値である。

Table 3a. Experimental data of initial tension and final tension for Tetoron (polyester) 5 d (555 m tex) sliding on a mat finished 16 mm ϕ cylinder with speed 120 cm/min.

T_0	mg	13.6	37.3	94.9	154.6	281.7	471.4
T		50	100	200	300	500	800

Table 3b. Values of cohesion term $R_0\rho$ and of frictional index N with variance $\sum |y_i - Nx_i|$.

The best fitted value is $N = 0.75$ or $R_0\rho = 5$ mg.

$R_0\rho$	N	$\sum y_i - Nx_i $
0mg	0.70	0.10
5	0.75	0.05
10	0.79	0.07
15	0.82	0.09

4. ま と め

ベルト掛方程式

$$T^{1-N} = T_0^{1-N} + a(1-N)\theta\rho^{1-N}$$

ただし T 糸の終張力

T_0 糸の初張力

θ 糸の円筒に対する巻き付け角

ρ 円筒半径

N 摩擦指数

a 定数

において T_0 , T の値を得た場合, N を求める簡便法として次の方法を開発した。すなわち相となる T_0 , T の2つの点より勾配 dT/dT_0 を得, これに対応する T/T_0 の値としてこの2点の T/T_0 の値を求め, これを平均する。これより

$$\log dT/dT_0 = N \log(T/T_0)$$

なる関係を用いて $\log$ - $\log$ グラフより目のこまたは平均によつて N を求めることができる。

5. あ と が き

本法の特徴などをあげると

- i. 計算が簡便である。
- ii. グラフより直観的な判断ができる。
- iii. 任意の N の値の場合に適用できる。
- iv. 計算値の精度を上げるためには個々の点の精度を上げるよりも打点数を多くすべきである。
- v. さらに精密には Howell¹⁾ の最小二乗法的やり方によらねばならないが, 一般には本法で充分だろう。

文 献

- 1) H. G. Howell; *J. Text. Inst.*, 44, T 359 (1953)
- 2) C. Rubenstein; *J. Text. Inst.*, 49, T 181 (1958)
- 3) 久世, 古島; 本誌投稿中
- 4) D. G. Lyne; *J. Text. Inst.*, 46, P 112 (1955)