報 文

一般報文

(昭和52年7月27日受理)

2次元繊維集合体の繊維交差に関する一考察

岐阜大学工学部繊維工学科 小森尚志・牧島邦夫
氏原靖志・松永良勝

AN INVESTIGATION ON FIBER CROSSING IN A 2-DIMENSIONAL RANDOM FIBER ASSEMBLY

*By Takashi Komori, Kunio Makishima, Yasushi Ujihara
and Yoshikatsu Matsunaga*

(Faculty of Engineering, Gifu University, Naka-Monzen-cho,
Kakamigahara, Gifu, Japan)

We pointed out here a defect in Kallmes and Corte's theory of crossing of crimped fibers in a 2-dimensional random fiber assembly and derive a modified theory. It is concluded contrary to the above authors' opinion that crimps of fibers do not affect the average number of crossing points per fiber but affect the variance of distribution of the number of crossing points.

(Received July 27, 1977)

1. 緒 言

シート状のランダム繊維集合体の主な応用例には、紙、不織布以外に、各種フィルター材としての利用が挙げられる。後者に関する最近の研究には、Piekaar¹⁾による2次元繊維フィルターの空隙寸法分布の研究、Clarenburg²⁾らによる2次元ガラス繊維集合体を流れる気体の圧力降下に関する理論および実験的研究、またHarrap³⁾によるinertial impactionの理論等が挙げられる。いずれの研究においても、構成繊維の物理化学的性質に加えて、集合体の幾何学的構造が重要な役割を果たしている。

2次元繊維集合体の幾何学的構造の研究には、最近では前述のPiekaar¹⁾らのものがある。しかし、もっと以前に彼らの成果をほとんどすべて導き出し、さらに深くかつ広範に研究していたのはKallmesら⁴⁾である。

しかしながら、Kallmesらの得たいくつかの基本的な理論式には、不明確な点や明らかに誤解であると思われる

部分があり、それらの応用性がいちじるしく損われているように思われる。たとえば、直線的で等長の繊維集合体についての彼らの得た式は大部分正しいものであるようだが、繊維の屈曲、繊維長の分布を許すための一般化においていくつかの誤りを犯しているようである。

そこで、本報では特に繊維の屈曲に関する取扱いにおける彼らの考えの誤りを指摘し、正しい理論の提案とその実験的検証について報告する。

2. 繊維交差確率

本論文では2次元繊維集合体の幾何学モデルとして、平面上にランダムに分散した平面曲線の集団を考える。もし実際の集合体の構成繊維が近似的に一平面に平行になっており、しかも集合体の厚さが繊維直径の2倍に等しければ、繊維接触を論ずるのにこのモデルは適切であろう。なぜならこの場合、繊維が他の繊維と接触すれば、モデルにおいてそれらに相当する平面曲線は（一般に複数個の交点をもって）交差し、またその逆もいえる。そ

れゆえ、繊維の接触とモデルの平面曲線の交差は同義となり、接触点には曲線の交点(交差点)が対応する。このような意味で今後、繊維が(一般に複数個の点で)接触することを繊維交差といい、繊維接触点は単に交点ということにする。なおこのモデルでは、繊維接触に対する繊維の太さの効果はまったく考慮せず、繊維は単なる幾何学的曲線とみなす。

さて、Kallmes と Corte¹⁾らはこのようなモデルについて幾何確率的考察を行い、面積 A の平面上に長さ λ の 2 本の直線分を任意のしかたで配置するとき、それらがたまたま交差する確率(交差確率) p が

$$p = \frac{2\lambda^2}{\pi A} \quad (1)$$

で与えられることを示した。また線分が屈曲している場合について同様な交差確率が

$$p = \frac{2\lambda^2}{\pi A \tau^2} \quad (2)$$

で与えられるとした。ただし、 τ は屈曲繊維の両端点間の距離 δ に対する繊維の実長 λ の比の値 λ/δ のことで、彼らはこれを curl ratio と呼んだ。

ところが、式(2)の成立する根拠についてはあいまいな説明しかされていない。我々はこの公式は正しくないと考える。実際、式(2)が正しいとすると、まったく奇妙なことになる。たとえば、長さ λ の直線分をその中点で二つに折り合せた繊維について、その交差確率を考えてみよう。このとき繊維の両端間距離 δ は非常に小さくなるから、 τ はその定義に従って、非常に大きな値になり、式(2)の p はほぼ 0 になる。ところが一方、この繊維は実質的に長さ $\lambda/2$ の直線分とみなすことができるから、その交差確率は式(1)より

$$p = \frac{2(\lambda/2)^2}{\pi A} = \frac{\lambda^2}{2\pi A}$$

となり、0 にはならない。屈曲繊維間の交差確率を一般の場合に直接理論的に求めることが不可能であるため、彼らは curl ratio の導入によって、何んらかの近似公式を得ようとしたのであろうが、その方法は安易に過ぎたといわざるを得ない。

Kallmes らはこのように誤った式(2)に基づいて、繊維当りの平均交点数をはじめとする、いくつかの構造に関する量を導いている。

しかしながら、彼らの目的を遂行するためには、必ずしも屈曲繊維相互の交差確率そのものを知らなくてもよいように思われる。実際、彼らの導いた諸公式で最も重要な役目をしている繊維の単位長さ当りの平均の接触点数、すなわち平均交点数は、屈曲繊維の交差確率 p 自体が求まらなくても、一般的に得ることができるのである。

次節ではこれについて述べることにする。

3. 平均交点数

屈曲をもつ繊維が面積 A の 2 次元繊維集合体を形成しているとき、すべての繊維を等しい微小な長さ $\Delta\lambda$ の要素に等分割することを仮想する(ただし繊維の太さは考えないものとする)。ここで $\Delta\lambda$ が十分小さければ各要素を直線分とみなせる。また、各繊維の配向および位置がまったくランダムであれば、これらの微小要素もこの面内にランダムに分散しているとみなせる。したがって、任意の一つの要素に他の要素が交わる確率は、式(1)より、

$$p = \frac{2(\Delta\lambda)^2}{\pi A} \quad (3)$$

となる。

平面 A 内の繊維の総長を A をすれば、一つの要素にできる平均交点数は式(3)より

$$\begin{aligned} \bar{c} &= \left(\frac{A}{\Delta\lambda} - 1\right) p \\ &\approx \frac{A}{\Delta\lambda} p = \frac{2\Delta\lambda \cdot A}{\pi A} \quad (\Delta\lambda \ll A) \end{aligned} \quad (4)$$

従って、繊維の単位長さ当りの平均交点数 $\bar{c}_l$ は

$$\bar{c}_l = \frac{\bar{c}}{\Delta\lambda} = \frac{2A}{\pi A} \quad (5)$$

となる。

特に、すべての繊維の長さが λ で、繊維本数 N のときには

$$\bar{c}_l = \frac{2N\lambda}{\pi A} \quad (5')$$

となる。

これより、繊維がどんな屈曲をもっているても、単位長さ当りの平均交点数は総繊維長 A だけできまることがわかる。また、以上の導き方からわかるように、これらの公式は任意の繊維長分布があるときにも成立する。これに対して、Kallmes らの考えによれば

$$\bar{c}_l = \frac{2N\lambda}{\pi A \tau^2} \quad (5'')$$

である。

4. 交点数分布

以上のように屈曲繊維の集合体の平均交点数を得るには、交差確率を知る必要がないこと、またさらに繊維屈曲の有無は平均交点数に影響しないことが知られた。しかし、繊維の交差確率が一般的には求められないとはいえ、その大きさは繊維屈曲の度合いに左右されることは明らかであるから、そのことを反映する量が存在すると

思われる。実際、以下に示すように繊維当りの交点(総)数の分布について調べることににより、このことが確認されるのである。

以下、簡単のため屈曲した等しい長さの繊維 N 本がある平面上にランダムに分散しているとする。いま仮に、任意の一本の繊維が他の繊維に交差し、その際 i 個の交点ができる、という確率 p_i が(一般的には求められないけれども)定まっているとする。ここで $i \geq 0$ である。以後 i 個の交点をもたらしうな繊維の交差を、単に i 点交差と呼ぶことにする。 $i=0$ は交点ができないこと、したがって交差しないことに相当する。

さて、1本の繊維 F に着目し、他の $N-1 \approx N$, ($N \gg 1$)、本の繊維のうち、 F と i 点交差をするものの本数を x_i ($i=0, 1, 2, \dots$) とすると、 $x_0, x_1, x_2, \dots$ に対する同時確率分布はいわゆる多項分布

$$p(x_0, x_1, x_2, \dots) = \frac{N!}{x_0! x_1! x_2! \dots} p_0^{x_0} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots \quad (6)$$

ただし

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i = N-1 \approx N, \quad \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$$

であたえられる。このとき繊維 F と i 点交差をしている繊維の本数 x_i の平均および分散、共分散はそれぞれ

$$\bar{x}_i = N p_i \quad (7)$$

$$\sigma_i^2 = N p_i (1 - p_i) \quad (8)$$

$$\sigma_{ij} = -N p_i p_j \quad (i \neq j) \quad (9)$$

となる⁶⁾。

このとき、着目する1本の繊維 F の上にできる交点の総数 c は

$$c = \sum_{i=1}^{\infty} i x_i$$

である。 $\{x_i\}$ の同時分布が式(6)であたえられるとき、上式で得られる繊維当りの交点数 c の確率分布が具体的にどのような式であたえられるかはここでは示さないが、その分布の平均値と分散は、式(7)~(9)を用いて

$$\bar{c} = \sum_{i=1}^{\infty} i \bar{x}_i = N \sum_{i=1}^{\infty} i p_i \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= N \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} i^2 p_i (1 - p_i) - \sum_{i,j \geq 1, i \neq j} i j p_i p_j \right\} \\ &= N \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} i^2 p_i - (\bar{c}/N)^2 \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

となる。

一般に屈曲が存在するとき、その屈曲の度合いに応じて i 点交差がおこる確率 p_i が変る。ところが前節の結論から、平均交点数 $\bar{c}$ は屈曲によらず一定であるのだから、式(10)より、

$$\sum_{i=1}^{\infty} i p_i = \text{一定} \quad (12)$$

となる。しかし、このとき式(11)であたえられる交点数の分散 σ^2 は屈曲の状態に依存し得るであろう。

実際、二つの異なる屈曲について、それぞれの場合の交差の確率が $\{p_i\}$, $\{p'_i\}$ であるとし、

$$\sum_{i=1}^{\infty} i p_i = \sum_{j=1}^{\infty} j p'_j = \text{一定}$$

となる場合にも、もし

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i > \sum_{j=1}^{\infty} p'_j$$

であるならば、簡単な代数学により

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^2 p_i < \sum_{j=1}^{\infty} j^2 p'_j$$

が証明でき、したがってそれぞれの分散 σ^2 , σ'^2 の間に $\sigma^2 < \sigma'^2$

が成立することがわかる。

また、繊維の形が1点交差のみが可能な直線の場合からどのように変形しても、交差確率の総和 $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$ は必ず減少する。実際、直線の場合の交差確率を p 、屈曲の場合を $\{p_i\}$ とすると式(12)より

$$p = \sum_{i=1}^{\infty} i p_i$$

であるが、このとき $p_1, p_2, \dots$ のうち少なくとも二つは0と異なるから

$$p > \sum_{i=1}^{\infty} p_i$$

であることはほとんど自明であろう。したがって、交点数の分散は直線の場合に最小となることがわかる。

5. 特殊な場合の理論と実験

任意の形の繊維については前に述べたように、その i 点交差確率 p_i を一般的に求めることはできないが、いくつかの一定の形の場合には比較的簡単に求めることができる。以下、特別な場合として直線、円、半円の交差確率 p_i 、繊維当りの平均交点数 $\bar{c}$ 、および交点数の分散 σ^2 を理論的に考察する。

a. 直線

長さ λ の2本の直線分の交差確率 p は Kallmes らにより

$$p = \frac{2\lambda^2}{\pi A}$$

である。1本の線分上にできる交点数の平均値 $\bar{c}$ および分散 σ^2 は(10), (11)より

$$\bar{c} = N p = \frac{2N\lambda^2}{\pi A}$$

$$\sigma^2 = Np(1-p) = \frac{2N\lambda^2}{\pi A} \left(1 - \frac{2\lambda^2}{\pi A}\right)$$

である。

b. 円

周長 λ 、したがって半径 $\lambda/2\pi$ の二つの円 C_1 、 C_2 の交差確率は次のように求められる。一方の円 C_1 と同心で半径が $2 \times (\lambda/2\pi)$ の円 C を考える (図 1)。他方の円 C_2 の中心がこの円 C の内部に入れば二つの円 C_1 、 C_2 は必ず交差する。したがって、交差確率は全面積 A に対する円 C の面積の比である。すなわち

$$p = \frac{\pi(\lambda/\pi)^2}{A} = \frac{\lambda^2}{\pi A}$$

この場合は、2 点交差のみが起こりうることを考えに入れて、繊維当りの交点数の平均値 $\bar{c}$ 、分散 σ^2 は (10)、(11) から

$$\bar{c} = 2Np = \frac{2N\lambda^2}{\pi A}$$

$$\sigma^2 = 4Np(1-p) = \frac{4N\lambda^2}{\pi A} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\pi A}\right)$$

となる。

Fig. 1 Region of contact of two circular fibers. When the center of circle C_2 is brought into the region of disc C , the two fibers C_1 and C_2 cross inevitably.

c. 半円

弧長 λ の半円の場合、1 点交差と 2 点交差が可能である。そこでまずそれらの確率 p_1 、 p_2 を求めよう。平面 A 上の同じ半径 $a (= \lambda/\pi)$ の二つの円 O 、 O' について、中心間距離が $s \sim s+ds$ となるように交わる確率は、円の中心がまったくランダムに置かれるとき

$$\frac{2\pi s ds}{A} \quad (0 \leq s \leq 2a)$$

である。

二つの半円をそれぞれ独立に、共に $\pi - 2 \cos^{-1}(s/2a)$

Fig. 2 Crossing of two semicircular fibers. The fibers can make one-point or two-point-crossing according to their positions on the circles O and O' .

に等しい角度だけ回転させる間は 2 点 B 、 C を共有するから、半円の円周上における位置のとり方がまったく任意であるときそれらが 2 点交差する確率は

$$p_2 = \int_0^{2a} \left\{ \frac{\pi - 2 \cos^{-1}(s/2a)}{2\pi} \right\}^2 \frac{2\pi s ds}{A} \\ = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} \right) \frac{\lambda^2}{\pi A}$$

となる。

また、一方の半円が 2 点 B 、 C 両方を含むように動く角度は $\pi - 2 \cos^{-1}(s/2a)$ で、このときさらに他方の半円が B または C のいずれか一方のみを含むのは、それが角 $2 \cos^{-1}(s/2a)$ だけ回転する間である。また両方の半円がいずれも、 B が C の一方のみを含むのは、それらが角 $2 \cos^{-1}(s/2a)$ だけ動く間である。以上を考慮すると、1 点交差の確率は

$$p_1 = \int_0^{2a} \left\{ 4 \left\{ \frac{\pi - 2 \cos^{-1}(s/2a)}{2\pi} \right\} \frac{\cos^{-1}(s/2a)}{\pi} \right. \\ \left. + 2 \left\{ \frac{\cos^{-1}(s/2a)}{\pi} \right\}^2 \right\} \frac{2\pi s ds}{A} \\ = \left(1 + \frac{4}{\pi^2} \right) \frac{\lambda^2}{\pi A}$$

となる。ただしここで $\lambda = \pi a$ を用いた。

以上の結果から、半円にできる交点数の平均値 $\bar{c}$ 、分散 σ^2 は (10)、(11) を用いて次のようになる。

$$\bar{c} = N(p_1 + 2p_2) = \frac{2N\lambda^2}{\pi A} \\ \sigma^2 = N\{p_1(1-p_1) + 4p_2(1-p_2) - 4p_1p_2\} \\ = \frac{3N\lambda^2}{\pi A} \left(1 - \frac{4}{3\pi^2} - \frac{4\lambda^2}{3\pi A} \right)$$

以上に得られた直線、円、半円の三つの場合の結果を比較してみる。円の交差確率は直線の交差確率の半分に

なっており、半円の場合は直線の交差確率と円の交差確率との中間の値をとっていることがわかる。しかし、円の場合1回交差すれば必ず二つの交点を生ずること、半円の場合1回の交差で一つの交点を生ずる場合と二つの交点を生ずる場合があるため、平均交点数は三者ともみな同じになる。また分散 σ^2 は明らかに異なっており、その値は直線、半円、円の順に大きくなっている。

上記の理論的結果を次に述べるようにモンテカルロ法によって実際に検討した。

【方法】

面積 $45 \times 45 \text{ cm}^2$ の正方形内に乱数を用いてランダムに324個の点をとる。ただし中央の $25 \times 25 \text{ cm}^2$ の領域A内にはちょうど100個の点が入るようにした。これらの点を中心にして、長さ10 cmの直線、周長10 cmの円、弧長10 cmの半円をそれぞれ描く。ただし、直線と半円の場合にはそれらの配向角もランダムに選んだ。

そこで、各繊維上にできる交点を計数して統計処理を行い、分布および平均値、分散を求め、理論値と比較した。また、前述のKallmesらの提案している公式(5")に基づいて求めた結果も併記した(表1)。さらに交点数分布の度数折線を図3に示す。

平均交点数については、我々の理論値は実験値によく一致していること、また、Kallmesらの理論値は直線の場合を除いて実際とは一致しないことが認められる。

一方分散については、理論と実験値にいくらかの食い違いが見られるが、この相違は実験値の偶然的な偏りによるものであると思われる。実際、95%信頼係数で分散の区間推定をした結果

直線 $5.75 < \sigma^2 < 10.08$

円 $13.82 < \sigma^2 < 24.23$

半円 $9.98 < \sigma^2 < 17.49$

を得た。したがって、我々の理論値と実験値の差は標本分散の偶然的な偏りによるもので、有意なものではない

Table 1 Theoretical and experimental values of the means and the variances of the numbers of crossing point, comparing with the results calculated by Kallmes and Corte's formulae.

		Theoretical	Experimental	Kallmes
Straight Segment	$\bar{c}$	10.20	10.20	10.20
	σ^2	9.16	7.46	
Semi-circle	$\bar{c}$	10.20	9.72	4.13
	σ^2	12.18	12.95	
Circle	$\bar{c}$	10.20	10.42	0
	σ^2	19.33	17.94

Fig. 3 Distributions of the numbers of crossing point per fiber.

と考えられ、理論の正当性が証明された。

6. 結 言

ランダムな2次元繊維集合体における繊維交差について、Kallmesらの理論における誤りの一つを指摘し、その修正理論を導き、結果をモンテカルロ法によるモデル実験で確かめ、その正しさを証明した。主要な結論は次のようである。

- 1) 繊維当りの平均交点数は繊維屈曲に依存せず、集合体の単位面積当りの繊維長のみで定まる。
- 2) 繊維屈曲は交点数分布の散布度(分散)に影響し、屈曲によって繊維相互の全体的な交差確率が小さくなると、交点数の分散は大きくなる。

文 献

- 1) H. W. Piekaar and L. A. Clarenburg; *Chem. Eng. Sci.*, **22**, 1399 (1967)
- 2) L. A. Clarenburg and H. W. Piekaar; *ibid.*, **23**, 765 (1968), *ibid.*, **23**, 773 (1968)
- 3) J. A. Harrop and J. I. T. Stenhouse; *ibid.*, **24**, 1475 (1969)
- 4) O. Kallmes and H. Corte; *Tappi*, **43**, 737 (1960)
- 5) I. Guttman and S. S. Wilks; *Introductory Engineering Statistics*, John Wiley & Sons, Inc., New York (1965)