(昭和58年6月30日受理)

FRP積層板の弾性率と強度の解析

名古屋工業大学高分子工学科 高橋清久・木村昌樹・原川和久
工業技術院製品科学研究所 伴 菊夫
東京工業大学有機材料工学科 酒井哲也

ANALYTICAL PROCEDURE TO PREDICT THE ELASTIC MODULI
AND BREAKING STRENGTHS OF FRP LAMINATES

By Kiyohisa Takahashi ^{*1}, Masaki Kimura ^{*1}, Kazuhisa Harakawa ^{*1},
Kikuo Ban ^{*2} and Tetsuya Sakai ^{*3}

^{*1} (Department of Polymer Engineering, Nagoya Institute of Technology,
Gokiso-cho, Showa-ku, Nagoya 466, Japan)

^{*2} (Industrial Products Research Institute, 1-1-4, Yatabe-machi Higashi,
Tsukuba-gun, Ibaraki 305, Japan)

^{*3} (Tokyo Institute of Technology, O-okayama, Meguro-ku, Tokyo 152,
Japan)

An analytical procedure to predict the effective stress-strain relations of FRP laminates is developed, based on the stress analysis of unidirectional FRP reported in a previous paper¹⁾. The laminate is considered to consist of N plies of unidirectional FRP. Each ply is composed of continuous, transversely isotropic fibers and an isotropic matrix. The stress components in the thickness direction of the laminate are assumed to vanish. The quadratic failure criterion proposed by Tsai and Wu²⁾ is applied to each ply, and the external stress σ_B^i at which i -th ply fails is estimated ($i=1\sim N$). The ply which has the minimum value of σ_B^i is considered to fail at first. Once any one of the plies has failed, the effective modulus of the laminate is again calculated taking into account the elastic degradation of the failed ply. This procedure is repeated until all plies have failed. Numerical calculations were conducted on a carbon/glass hybrid FRP laminate subjected to uniaxial tension or compression. Calculated results were compared with experimental data obtained for carbon/glass hybrid FRP-FW pipes, and the availability of the proposed analysis was discussed.

(Received June 30, 1983)

1. 緒 言

本研究は、ガラス繊維の延性、炭素繊維の軽量性・高剛性等、強化繊維の特性を有効に利用したFRP積層板の開発と、その設計基準となる解析法を確立することを目的とする。筆者らは前報¹⁾で、強化繊維の異方性を考慮に入れた一方向FRPの弾性率解析法を提示した。本報告では、その手法を基礎としてFRP積層板の平面応力場における弾性率と強度の解析法を導く。

解析では、一方向FRPを任意の枚数貼り合わせたモデルを考え、以下の3つの仮定をおいた。(1)マトリクス樹脂および強化繊維は、破損に至るまで線形弾性であ

る。(2)積層板厚さ方向の応力成分はゼロである(平面応力場)。(3)積層板の厚さ方向と垂直な平面内の歪は、すべての層について等しい。

また、積層板各層の破損の判定にはTsai-Wuの2次破損条件式²⁾を用い、すべての層が破損するまでの応力-歪関係の計算法を定式化した。CFRP/GFRPハイブリッド積層板が一軸引張り、または一軸圧縮を受ける場合の数値計算を行ない、FWパイプの実験結果と比較した。

2. 弾性率解析

2.1 一方向FRPの弾性率

積層板を構成する各層(一方向FRP)の弾性率解析法は前報¹⁾で詳述したので、ここでは必要な事項のみ簡単に記述する。一方向FRPは、見かけ上面内等方性(transversely isotropic)であり、弾性率の独立な成分は5個である。5個の独立成分を決定するために、試料に加える外部応力 σ_{ij}^A として図1に示した5通りの組合せを設定する。

Fig. 1 Calculating procedure of the elastic compliance S_{pqrs}^U of unidirectional FRP. x_3 -axis is taken along the fiber axis.

まず、 σ_{ij}^A から e_{mn}^A を決定する。

$$e_{mn}^A = S_{mnij} \sigma_{ij}^A \quad (1)$$

ここで S_{mnij} はマトリクスの弾性コンプライアンスである。 e_{mn}^A を(2)式に代入して e_{kl}^* を計算する。

$$C_{pqmn}(e_{mn}^A + (1-V_f)(T_{mnkl}e_{kl}^* - e_{mn}^*)) \\ = C_{pqmn}^*[e_{mn}^A + (1-V_f)T_{mnkl}e_{kl}^* + V_f e_{mn}^*] \quad (2)$$

ここで、 C_{pqmn} 、 C_{pqmn}^* はマトリクスおよび強化繊維の弾性率、 T_{mnkl} はマトリクスのポアソン比によって決まる Eshelby のテンソル¹⁾、 V_f は繊維の体積分率である。

(2)式の解 e_{kl}^* を用いて、図1に示した様に、一方向FRPの見かけの弾性コンプライアンス S_{pqrs}^U を決定する。図1で E 、 ν 、 μ は、それぞれマトリクスのヤング率、ポアソン比、剛性率である。

2.2 積層板の弾性率

本報告では、 N 層の一方向FRPを貼り合わせた積層

Fig. 2 Coordinate system $\hat{x}_n$ ($n=1,2,3$) is fixed in the laminate (a), and the coordinate system x_m ($m=1,2,3$) is taken along the principal axes of each ply (b). T_i , θ_i ($i=1 \sim N$) denote the thickness and orientation angle of i -th ply, respectively. The coordinate system x_m depends on the fiber orientation θ_i .

板を考える。図2(a)で θ_i 、 T_i ($i=1 \sim N$)はそれぞれ i 層目の繊維配向角と厚さを表わす。各層の厚さ比 t_i を(3)式で定義する。

$$t_i = \frac{T_i}{\sum_{j=1}^N T_j} \quad (i=1 \sim N) \quad (3)$$

層によって繊維配向角 θ_i が異なるので、各層の主軸方向座標系を (x_1, x_2, x_3) とし、試料中に固定した座標系を $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ と表示する(図2(b))。ただし、繊維方向を x_3 軸とした。各層の主軸方向座標系 x_m は、その層の繊維配向角 θ_i に依存する。 x_m 座標と $\hat{x}_n$ 座標との間の方向余弦を a_{mn} とする。

$$x_m = a_{mn} \hat{x}_n \quad (4)$$

図2(b)の場合、次式が成立つ。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

前節の手法を各層($i=1 \sim N$)に適用し、各層の主軸方向座標系 x_m における弾性コンプライアンス $S_{pqrs}^i = S_{pqrs}^U$ を求め、それを方向余弦 a_{mn} を使って、試料中に固定した座標系 $\hat{x}_n$ に変換する。

$$\hat{S}_{kimn}^i = a_{pk} a_{ql} a_{rm} a_{sn} S_{pqrs}^i \quad (6)$$

各層の厚さ($x_2 = \hat{x}_2$)方向の応力成分をゼロと仮定すると、 i 層目の層の応力と歪の関係は次式で表わされる。

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{11}^i \\ \hat{\sigma}_{33}^i \\ \hat{\sigma}_{31}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{S}_{1111}^i & \hat{S}_{1133}^i & 2\hat{S}_{1131}^i \\ \hat{S}_{3311}^i & \hat{S}_{3333}^i & 2\hat{S}_{3331}^i \\ \hat{S}_{3111}^i & \hat{S}_{3133}^i & 2\hat{S}_{3131}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\epsilon}_{11}^i \\ \hat{\epsilon}_{33}^i \\ \hat{\epsilon}_{31}^i \end{pmatrix} \quad (7)$$

(7)式を応力 $\hat{\sigma}^i$ について解き、

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{11}^i \\ \hat{\sigma}_{33}^i \\ \hat{\sigma}_{31}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}^i & C_{13}^i & C_{15}^i \\ C_{31}^i & C_{33}^i & C_{35}^i \\ C_{51}^i & C_{53}^i & C_{55}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\epsilon}_{11}^i \\ \hat{\epsilon}_{33}^i \\ \hat{\epsilon}_{31}^i \end{pmatrix} \quad (8)$$

の形に整理する。(8)式は平面応力場でだけ成り立つ関

係であり、平面歪場または一般の3次元応力場では係数 C^i の値が異なる点に注意されたい。

積層板の厚さ方向と垂直な平面($\hat{x}_1-\hat{x}_3$)内の歪がすべての層について等しいと仮定すると、積層板全体の応力と歪の関係は次式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{11} \\ \hat{\sigma}_{33} \\ \hat{\sigma}_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N C_{11}^i t_i & \sum_{i=1}^N C_{13}^i t_i & \sum_{i=1}^N C_{16}^i t_i \\ \sum_{i=1}^N C_{31}^i t_i & \sum_{i=1}^N C_{33}^i t_i & \sum_{i=1}^N C_{35}^i t_i \\ \sum_{i=1}^N C_{61}^i t_i & \sum_{i=1}^N C_{53}^i t_i & \sum_{i=1}^N C_{55}^i t_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\epsilon}_{11} \\ \hat{\epsilon}_{33} \\ \hat{\epsilon}_{31} \end{pmatrix} \quad (9)$$

(9)式は、(8)式を使って各層の応力を平均することの意味する。 t_i は(3)式で定義した厚さ比である。また $\hat{x}_1-\hat{x}_3$ 平面内の歪がすべての層について等しいという仮定は、各層が完全接着しており、積層板の厚さが幅と長さ比べて充分小さい場合を想定している。

(9)式を歪 $\hat{\epsilon}$ について解くと、積層板全体の見かけの弾性コンプライアンス S^{**} を得る。

$$\begin{pmatrix} \hat{\epsilon}_{11} \\ \hat{\epsilon}_{33} \\ \hat{\epsilon}_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11}^{**} & S_{13}^{**} & S_{16}^{**} \\ S_{31}^{**} & S_{33}^{**} & S_{35}^{**} \\ S_{61}^{**} & S_{53}^{**} & S_{55}^{**} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{11} \\ \hat{\sigma}_{33} \\ \hat{\sigma}_{31} \end{pmatrix} \quad (10)$$

(10)式は $\hat{x}_1-\hat{x}_3$ 平面内の平面応力場における積層板全体の応力-歪関係を表わす。 $\hat{\sigma}_{12}=\hat{\sigma}_{22}=\hat{\sigma}_{23}=0$ と仮定しているが、 $\hat{\epsilon}_{12}$, $\hat{\epsilon}_{22}$, $\hat{\epsilon}_{23}$ は必ずしもゼロではない。

以上が積層板の弾性率解析法である。

3. 破断強度の予測

3.1 平面応力場における破損の判定

図2(a)に示した N 層からなる積層板に、 $\hat{x}_1-\hat{x}_3$ 平面内の平面応力($\hat{\sigma}_{11}$, $\hat{\sigma}_{33}$, $\hat{\sigma}_{31}$)を加えた場合について、各層の破損を判定する。

(1) まず前節で述べた手法により、積層板全体の見かけの弾性コンプライアンス S^{**} を計算する。

(2) 積層板に加えた外部応力($\hat{\sigma}_{11}$, $\hat{\sigma}_{33}$, $\hat{\sigma}_{31}$)を(10)式に代入し、試料に生ずる歪($\hat{\epsilon}_{11}$, $\hat{\epsilon}_{33}$, $\hat{\epsilon}_{31}$)を求める。本報告では、 $\hat{x}_1-\hat{x}_3$ 平面内で積層板全体の歪と各層の歪が等しいと仮定している。

(3) ($\hat{\epsilon}_{11}$, $\hat{\epsilon}_{33}$, $\hat{\epsilon}_{31}$)を(8)式に代入して、積層板各層の応力 $\hat{\sigma}_{kl}^i$ ($i=1\sim N$)を計算する。

(4) (4)式の方法余弦 a_{mn} を使って、 $\hat{\sigma}_{kl}^i$ を i 番目の層の主軸方向座標系に変換する(図2(b)参照)。

$$\sigma_{mn}^i = a_{mk} a_{nl} \hat{\sigma}_{kl}^i \quad (11)$$

(5) $\sigma_L = \sigma_{33}^i$, $\sigma_T = \sigma_{11}^i$, $\tau_{LT} = \sigma_{31}^i$ をTsai-Wuの式、(12)式に代入して破損を判定する。

$$\sigma_L \left(\frac{1}{X} - \frac{1}{X'} \right) + \sigma_T \left(\frac{1}{Y} - \frac{1}{Y'} \right) + \frac{\sigma_L^2}{XX'} - \frac{\sigma_L \sigma_T}{\sqrt{XX'YY'}} + \frac{\sigma_T^2}{YY'} + \frac{\tau_{LT}^2}{S^2} = 1 \quad (12)$$

Tsai & Hahn³⁾は、 $\sigma_L \sigma_T$ の係数を、

$$2F_{xy} = \frac{2F_{xy}^*}{\sqrt{XX'YY'}}$$

と置き、破損条件式が垂直応力成分の平面で閉曲線を表わすためには、

$$-1 < F_{xy}^* < 1$$

でなければならないことを示している。また、等方性材料に関する von Misesの破損条件⁴⁾も矛盾なく包含するためには、

$$F_{xy}^* = -\frac{1}{2}$$

と置けばよいと指摘している。そこで本報告では、 $F_{xy}^* = -1/2$ を採用した。

(12)式で、 X, X' は一方方向FRPの繊維(L)方向の引張および圧縮強度、 Y, Y' は横(T)方向の引張および圧縮強度、 S は主軸方向の剪断強度である。これらの定数は積層板各層に予め指定しておく。

(3)~(5)の手順を、 $i=1\sim N$ について繰返す。(12)式左辺の値が1以上であれば、その層は破損すると判定する。

3.2 積層板の一軸引張および圧縮強度

図2(a)の積層板に $\hat{x}_3$ 軸方向の垂直応力 $\hat{\sigma}_{33} = \sigma^A$ を加えた場合を考える。

(1) 前節と同様の手順で、各層($i=1\sim N$)について、 σ_L , σ_T , τ_{LT} を σ^A の関数として計算し、(12)式に代入する。(12)式は σ^A に関する2次方程式であり、その正の根は引張破損応力を、負の根は圧縮破損応力を表わす。すなわち積層板全体に σ^A を加えた時、注目している層に関する(12)式左辺の値が1に達すればその層は破損する。以下の記述では簡単のため引張強度の計算法のみを記す。

(2) N 層の破損応力(正の根)を比較し、その最小値をさがす。 k 番目の層が最小でその値が $\sigma_{\min}$ であるとする。本報告の計算では、 $\sigma^A \leq \sigma_{\min}$ の範囲では、ヤング率 $E^{**} = 1/S_{33}^{**}$ の線形弾性であり、 $\sigma^A = \sigma_{\min}$ で k 番目の層が最初に破損すると予測する(S_{33}^{**} は(10)式の値)。

(3) 第 k 層の破損以降は、その層の積層板全体の剛性に対する寄与が減少する。これを厚さ比 t_k の修正によって考慮する。

$$t_k \rightarrow \beta_k t_k \quad (0 \leq \beta_k < 1) \quad (13)$$

β_k を劣化定数(coefficient of degradation)と呼び、

繊維配向角等によって決まる各層 ($k=1 \sim N$) に固有の定数とする。破損した層の厚さ比を (13) 式で修正した後 (9) 式に代入して、再び積層板全体の弾性コンプライアンス S^{**} を計算し直す。この S^{**} が、 $\sigma^A > \sigma_{\min}$ におけるヤング率を与える。

(4) 手順(1)へ戻って同様の計算を、すべての層が破損するまで繰返す。ただし、手順(2)の比較ではすでに破損した層は除く。

(12) 式の正の根を σ_B^k と表示して、計算手順を図3に示した。圧縮強度の計算では、(12) 式の負の根を σ_B^k と置き、その絶対値を比較すればよい。

Fig. 3 Calculating procedure of elastic compliance of the laminate; S^{**} , and the tensile stress σ_B^k at which k -th ply fails. Uniaxial tensile stress σ^A is applied to x_3 -direction in Fig. 2. When k -th ply has failed, the thickness ratio t_k is multiplied by the degradation coefficient β_k ($0 \leq \beta_k < 1$). And the calculation of S^{**} and σ_B^k is repeated until all plies have failed.

^a In comparing σ_B^k , the plies which have already failed are excluded.

^b When all plies have failed, the calculation is closed.

Table 1. Elastic moduli of constituents.

	Young's modulus (kg/mm ²)		Poisson's ratio ^{a)}		Shear modulus (kg/mm ²)
	E_1	E_3	ν_{12}	ν_{13}	μ_{23}
Carbon fiber	2100	23000	0.33	0.31	4200
Glass fiber		7400		0.22	3033
Epoxy resin		350		0.38	1268

^{a)} Poisson's ratio ν_{12} indicates the strain ratio $-e_{11}/e_{22}$, when tensile stress (σ_{22}) was applied in x_2 -direction only.

Table 2. Layer structure of CFRP/GFRP hybrid laminate.

Layer No.	C or G	V_f	θ (°)	t_i	β_i
1	CFRP	0.701	+49	0.182	0.8
2	CFRP	0.701	-49	0.182	0.8
3	GFRP	0.452	90	0.271	0.8
4	GFRP	0.452	+24	0.1825	0
5	GFRP	0.452	-24	0.1825	0

Table 3. Parameters for failure criterion.

	(kg/mm ²)				
	X	X'	Y	Y'	S
CFRP	130	70	5	10	8
GFRP	90	60	4	9	7

4. 数値計算例

炭素繊維またはガラス繊維とエポキシ樹脂とで出来た一方方向FRPを構成要素とする、CFRP/GFRPハイブリッド積層板に関する数値計算例を示す。計算に用いた素材の弾性率を表1に示す。

積層板の層構成は、筆者らが行なったFRP-FWパイプの実験⁵⁾と合わせて設定した。積層順、各層の繊維体積分率、繊維配向角、厚さ比および劣化定数 β_i を表2に示す。FWパイプでは $+\theta$ と $-\theta$ の繊維が同一層中に混在しているが、計算では別々の層と考えた。(12) 式の破損判定に用いる定数を表3に示す。これは、一方方向FRPに関する基礎実験⁶⁾から決定した値である。

表4に一軸引張および圧縮の計算結果を示す。引張では、初期ヤング率が1964 kg/mm²、ポアソン比が0.472で、引張応力9.7 kg/mm²でフープ(GFRP 90°)層が最初に破損する。次に、ヤング率が1884 kg/mm²に低下し、引張応力13.4 kg/mm²でCFRP +49°層と-49°層が同時に破損する。その後ヤング率が1745 kg/mm²に低下し、最終的に応力32.8 kg/mm²でGFRP $\pm 24^\circ$ 層が破断する。

この応力-歪曲線を図4に実線で示した。図5は圧縮応力-歪曲線である。図中の破線はC/GFRP-FWパイプに関する実験結果⁵⁾である。実験値は計算値より大きな延性を示しているが、歪1%程度までは引張、圧縮と

Table 4. Calculated results of tensile and compressive properties of CFRP/GFRP hybrid FW pipes.

	Young's modulus (kg/mm ²)	Poisson's ratio	Failed layer	Failure stress (kg/mm ²)
Tension	1964	0.472	G 90°	9.7
	1884	0.495	C±49°	13.4
	1745	0.476	G±24°	32.8
Compression	1964	0.472	C±49°	-17.4
	1822	0.451	G 90°	-20.1
	1745	0.476	G±24°	-25.4

Fig. 4 Tensile stress-strain relation of C/G hybrid FRP-FW pipes. Specification of the specimen is shown in Table 2, and numerical values calculated are given in Table 4.

Fig. 5 Compressive stress-strain relation of C/G hybrid FRP-FW pipes. Calculated diagram (—) is relatively in good agreement with experimental result (-----), except for large elongation observed in experiment.

も、実験値と計算値との間に良い一致が得られた。

5. 結 言

FRP 積層板の弾性率と強度を予測するための数値計算法を提示した。弾性率の解析では、一方向FRPを N 枚貼り合わせたモデルを考え、厚さ方向の応力成分はゼロと仮定した。また、各層は完全接着しており、厚さ方向と垂直な平面内における歪はすべての層について等しいと仮定した。積層板各層の破損

の判定にはTsai-Wuの2次破損条件式²⁾を用いた。ある層が破損すると、積層板全体の剛性に対するその層の寄与は低下する。この影響を、破損した層の厚さ比の修正によって考慮し、すべての層が破損するまでの応力-歪関係を計算する手順を導出した。

C/GハイブリッドFRP積層板が一軸引張または圧縮を受ける場合の数値計算を行ない、FRP-FWパイプの実験結果と比較した。実験で観測される大きな延性は予測できないが、歪1%程度までの応力-歪関係についてはほぼ良い一致が得られた。

本報告の実験とは別に行なった、一方向FRPの剪断強度(S)を測定する基礎実験(フープ巻だけのFWパイプのねじり試験)では剪断応力-歪関係に大きな非線形性が表われ⁶⁾、また繊維巻角度 $\pm 30^\circ \sim 60^\circ$ のFWパイプの一軸引張・圧縮試験では降伏が明確に表われ特に $\pm 45^\circ$ 付近の試料は著しく大きな延性を示す結果を得た^{7,8)}。このことは(12)式に用いる S としては最終的な剪断破壊応力よりも降伏応力のほうが適切であることを示唆している。また一軸引張・圧縮によって大きな剪断応力 τ_{LT} を生ずる繊維配向角 $30^\circ \sim 60^\circ$ の層に対しては、降伏後剛性の低下に応じて劣化定数 β_k を設定する必要がある。すなわち、 β_k を一定値に固定せず歪の関数として、歪の増加と共に β_k を小さくしていく段階的繰返し計算を行なえば計算の精度をより高めることが可能と考えられる。図4, 5に示した数値計算では、CFRP $\pm 49^\circ$ 層の β_k を単純に0.8とおいたため歪1%程度までしか計算値と実験値に良好な一致が得られず、かつ実験結果に表われる大きな延性も予測できなかった。

なお筆者らが先に行なった実験⁷⁾から、GFRP 24°層はほぼ線形弾性を示し脆性破断すると予測されるため、 $\beta_k=0$ とおいた。一方向FRPの横(90°)方向引張・圧縮強度(Y, Y')の測定では、破断に至るまでほぼ線形弾性を示した⁶⁾。この点からは、フープ(90°)層の劣化定数を $\beta_k=0$ とおくべきであるが、 $\beta_k=0$ よりも0.8とおいた計算値の方が実験値と良い一致を示した。その原因

として、フープ層は、FWパイプの長さ方向に破損した後、円周方向の変形を拘束する効果を保持することが考えられる。

また本報告の解析法は、層間応力が無視できない場合や、自由端を持つ積層平板で自由端近傍の応力特異性が破損に重要な影響を及ぼす場合には適用できない。しかし、以下に述べる2つの理由からFWパイプに対しては適用性があると考えられる。

(1) プリプレグシートを積層する場合と比べて、フィラメントワインディング(FW)法で成形した試料は層と層との境界が入り組んでおり、層間剪断破壊の危険性が少ない。

(2) パイプ形状であるため自由端が存在しない。

次の報告では、本報告の解析法を種々のFRP-FWパイプに応用し、一方向FRPの破損判定基準(X , X' , Y , Y' , S)および劣化定数 β_k の設定について検討する。

付記：本研究は昭和57, 58年度文部省科学研究費(総合研究(A)課題番号57390012)の補助を受けた。

参考文献

- 1) 高橋清久, 原川和久, 伴 菊夫, 酒井哲也; 繊維学誌, **39**, 349 (1983)
- 2) S. W. Tsai and E. M. Wu; *J. Composite Materials*, **5**, 58 (1971)
- 3) S. W. Tsai and H. T. Hahn; "Introduction to Composite Materials", Technomic Pub. Co., Westport, Connecticut, p. 277 (1980)
- 4) R. von Mises; *Zeits. ang. Math. Mech.*, **8**, 161 (1928)
- 5) K. Ban, K. Takahashi and T. Sakai; "Progress in Science and Engineering of Composites" (ed. by T. Hayashi, K. Kawata and S. Umekawa), JSCM, p. 1153 (1982)
- 6) 高橋清久, 伴 菊夫; 投稿準備中
- 7) 伴 菊夫, 大塚裕光, 高橋清久; 繊維学誌, **37**, 420 (1981)
- 8) 高橋清久, 伴 菊夫, 酒井哲也; 繊維学会, 昭和58年度年次大会研究発表会講演要旨集, p. 238 (1983)