与えられた地層間の新旧関係から地層群間の新旧関係を定める 原理についての論理地質学的検討*

塩野 清治**

Logical Discussions on Definition of Time Relations between Grouped Strata Based on Given Relations of Individual Strata*

Kiyoji SHIONO**

Abstract : Grouping of strata is one of the most fundamental works in geological studies. The grouping is mathematically formulated as the work to define an equivalence relation D on a set of strata B . The equivalence relation D constructs a quotient set B/D , and each group of strata corresponds to an equivalence class relative to the equivalence relation D . The grouping of strata introduces the problem how we should define relations on B/D from relations given on the original set B . As a logical approach to such a problem, this paper discusses how to define the time relation K' on a quotient set B/D , based on Shiono and Wadatsumi (1991)'s formulation of a relation K on set B of strata such that aKb if and only if a stratum a is older than a stratum b . It is concluded that the relation K' on B/D can be derived from the relation K given on B in such a manner that $[a] K' [b]$ if and only if xKy for every $x \in [a]$ and $y \in [b]$, where $[a]$ and $[b]$ are any equivalence classes in B/D , and then the relation $K' \cup E'$ on B/D is also a partial ordering if the relation $K \cup E$ is a partial ordering.

Key Words : Geology-Oriented Logical System, Formulation, Ordering, Equivalence relation, Grouping, Stratigraphic sequence

1. はじめに

著者らは地質情報の有効なコンピュータ処理法を開発するための基礎として、論理地質学という学問分野を提唱した(弘原海ほか, 1987; 塩野・弘原海, 1988). 従来主として自然言語で表現されてきた地質学的概念や法則の定式化を通じて、地質学における推論の論理構造の解明(塩野・弘原海, 1988, 1991, 1992; Shiono and Wadatsumi, 1991)やコンピュータ処理アルゴリズムの開発(坂本・塩野, 1990, 1992)を試みてきた。

本論文では、坂本・塩野(1990, 1992)による層序の推定アルゴリズムの発展を念頭において、地層をまとめる作業について論理地質学的観点から考察する。

小単位で区分された地層をより大きな単位の地層群にまとめる作業は、地質調査の諸段階で不可欠な作業のひとつ

である。たとえば、層序を確立したり、地層の分布を地質図に有効に表現しようとするとき、露頭単位で識別した小単位の地層(たとえば部層)のいくつかを一括して、連続性のある地層(たとえば累層)としてまとめる必要が生じる。また、いくつかの既存の地質図をコンパイルするときには、目的とする対象が適切に表現できるように適当な単位で地層をまとめなおす作業が不可欠である。

いくつかの小単位の地層をひとつの大きな単位の地層群にまとめるとき、地層群の新旧関係や累重関係などを新たに定めなおさなければならない。この作業は従来専門家の総合判断として行われてきたが、これをコンピュータ上で実行するためには、論理的に矛盾のない一般的な形式で定式化する必要がある。

一般的にいつて、地層をまとめる作業は

- ① 小単位の地層の集合 B 上に同値関係 D を設定し、集合 B の元を同値類の集まりとしてグルーピングする、いいかえれば商集合 B/D を定める処理と
- ② 集合 B 上の関係 R を商集合 B/D 上の関係 R' に移し

* Geoinforum '91 (1991年6月, つくば) で一部講演。

** 大阪市立大学理学部地球学教室 Department of Geosciences, Faculty of Science, Osaka City University, 3-3-138 Sugimoto, Sumiyoshi-ku, Osaka 558, Japan

かえる処理

という2つの処理を同時に行うことであるとみなすことができる。本論文では、地層の新旧関係 K に注目して、①の処理がなされたとき、②の B/D 上の新旧関係 K' はどのように定義されるべきかを検討する。

なお、以下の議論における問題の基本設定や数学記号等は主として塩野・弘原海(1991)にしたがう。

2. 地層の集合と新旧関係

まず最初に、塩野・弘原海(1991)にしたがって、地層の新旧関係を定義する(第1図参照)。

調査地域に相当する3次元の部分空間 Ω から、 Ω 内に存在する地層(の名称)の集合 B への関数 $f: \Omega \rightarrow B$ が存在すると仮定する。この関数 f による p の値が a であることを $f(p) = a$ とかくが、これは「点 p の地層は a である」という空間内の点 $p \in \Omega$ と地層名 $a \in B$ の対応関係を表す。このような関数 f の存在を仮定することは、 Ω 内における地層の分布がわかっていると仮定することを意味する。このとき、 $a \in B$ という名前の地層の分布域は、 f による a の逆像 $f^{-1}(a)$ であるといえる。以下これを $\sigma(a)$ で表す。

$$\sigma(a) = \{p \mid f(p) = a\} = f^{-1}(a).$$

また、 Ω 内の各点 p に、絶対年代という意味で、岩石の形成年代を表す実数(未来に向かって正の方向をとる)を対応づける関数 $\tau: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ が存在すると仮定する。地層 a の形成時期は $\sigma(a)$ を構成する各点の形成年代の分布する区間と考えられるので、以下、地層 a の形成時期を関数 τ による $\sigma(a)$ の像 $\tau(\sigma(a))$ で表す。

地層 a の形成時期が地層 b の形成時期よりも古いことは、 $\sigma(a)$ のどの部分をとってもその形成年代は $\sigma(b)$ のどの部分の形成年代よりも古いことであると考えて、地層の新

旧関係 K を次のように定義する。

[定義1] B 上の関係 K を次のように定義する。

$$(A) \quad aKb \Leftrightarrow \sup \{ \tau(\sigma(a)) \} \leq \inf \{ \tau(\sigma(b)) \}.$$

ここで、 $\sup$ と $\inf$ はそれぞれ上限と下限を表す記号である。

なお、以下で議論する地層の新旧関係は、単にある地層 a の形成時期が別の地層 b の形成時期よりも古いというだけの意味で用いる。一般に地層の順序を表す地質概念として「層序」という用語がある。“これはある地域における地層の新旧の序列による区分を示す用語であり、地層の分布、産状、含有化石、順序、相互関係などを総合して、地層が区分されたとき、層序が確立されたという(地学団体研究会編, 1977)”。したがって、上で定義された地層の新旧関係は地層の新旧の序列を表しているが、層序よりも狭く限定された概念である。

塩野・弘原海(1991)で証明したように、この関係 K について次のことがいえる。

[定理1] B 上の関係 K は次の(1)~(4)の性質をもつ。

- (1) $\sim aKa \quad (a \in B)$,
- (2) aKb と bKa が同時に成り立つことはない,
- (3) aKb かつ $bKc \Rightarrow aKc$,
- (4) $K \cup E$ は半順序である。

ここで、 $\sim P$ は命題 P の否定(P でない)を表し、 E は $xEx \ (x \in B)$ のみが成り立つ関係を表す。また、集合 B 上の関係 R が反射律(aRa)、反対称律(aRb かつ $bRa \Rightarrow a=b$)、推移律(aRb かつ $bRc \Rightarrow aRc$)を満たすとき、これを半順序という。

3. 商集合 B/D 上の新旧関係 K' の定義

小単位の地層を適当な基準でグルーピングしてより大き

第1図 3次元の部分空間 Ω と地層の集合 B および地層の形成時期

な単位の地層群にまとめたとき、地層群の新旧関係がどのように定義されるべきかを考える。

グルーピングの基準は目的によっていろいろなものがあり、砂質のもの、泥質のものといった互いに層相の近いものをまとめる場合もあるし、ある特定の時代を示す鍵層を境として堆積時期が同じものをまとめる場合もある。ここでは、地質学的な観点からみたグルーピングの基準には立ち入らず、地層をグルーピングすることは、地層の集合 B 上にひとつの同値関係 D を定めることであると一般化して以下の議論を進める。ここで、反射律 (aDa)、対称律 ($aDb \Rightarrow bDa$)、推移律 (aDb かつ $bDc \Rightarrow aDc$) を満たす関係 D を同値関係という。

集合 B 上に、ある同値関係 D を定めたとする。以下、 aDx が成り立つような x の集合を、 a を含む同値類といい、 $[a]$ で表す。

$$[a] = \{x \mid aDx\}.$$

また、このような同値類の集合を (D に関する) B の商集合といい、 B/D で表す。

$$B/D = \{[a] \mid a \in B\}.$$

このとき、 $[a]$ としてまとめられた地層群の分布域は関数 f による $[a]$ の逆像 $f^{-1}([a])$ であり、これを $\sigma([a])$ で表す。また、 τ による $\sigma([a])$ の像 $\tau(\sigma([a]))$ は、 $[a]$ としてまとめられた地層群の形成時期を表す。

<例1> $[a] \in B/D$ を構成する元を

$$[a] = \{a_1, \dots, a_n\}$$

のように適当な番号をつけて表したとすれば、 $\sigma([a])$ と $\tau(\sigma([a]))$ はそれぞれ

$$\sigma([a]) = \sigma(a_1) \cup \dots \cup \sigma(a_n)$$

$$\tau(\sigma([a])) = \tau(\sigma(a_1)) \cup \dots \cup \tau(\sigma(a_n))$$

のように表現される。

商集合 B/D の各元は上のような分布域と形成時期をもつから、 $[a], [b] \in B/D$ に関する新旧関係 K' は、 B 上の新旧関係 K の定義 (A) における a と b のところに、それぞれ $[a]$ と $[b]$ を代入したもので定義できる。

[定義2] 商集合 B/D 上関係 K' を次のように定義する。

$$(B) \quad [a] K' [b] \Leftrightarrow \sup(\tau(\sigma([a]))) \leq \inf(\tau(\sigma([b]))).$$

すなわち、 $\sigma([a])$ のどの部分をとってもその形成年代は $\sigma([b])$ のどの部分の形成年代よりも古いときかつそのときに限り、 $[a] K' [b]$ と定義するのである。この定義は (A) と同じ内容の定義であるから、 B 上の関係 K と同様に次のことがいえる (証明略)。

[定理2] (B) のようにして定められる B/D 上の関係 K' は次の (1') ~ (4') の性質をもつ。

$$(1') \sim [a] K' [a] \quad ([a] \in B/D),$$

$$(2') \quad [a] K' [b] \text{ と } [b] K' [a] \text{ が同時に成り立つことはない,}$$

$$(3') \quad [a] K' [b] \text{ かつ } [b] K' [c] \Rightarrow [a] K' [c],$$

$$(4') \quad K' \cup E' \text{ は半順序である.}$$

ここで、 E' は $x E' x$ ($x \in B/D$) のみが成り立つ B/D 上の関係を表す。

4. B 上の新旧関係 K から B/D 上の新旧関係 K' を定める方法

(A) では各点 $p \in \Omega$ の形成年代を与える関数 $\tau: \Omega \rightarrow R$ を仮定して、地層の新旧関係 K を定義した。現実には関数 τ を知ることは不可能であるため、この定義 (A) は空想的である。(B) による地層群の新旧関係 K' の定義についても同様である。一方、地層の新旧関係を知る具体的手段として、露頭単位で観察した地層の累重関係から推定する方法や地層に含まれる化石を利用する生層序学的方法など多様な方法がとられている。著者の立場からみれば、いずれの方法でも、定義 (A) と矛盾せずまた定理1で述べた性質をもつ新旧関係が推定できるような注意と工夫がなされているように思われる。

適当な方法で B 上の新旧関係 K が推定できれば、それを使って B/D 上の新旧関係 K' が定める具体的方法が存在する。このことを次に示す。

$[a], [b] \in B/D$ を構成する各元に適当な番号をつけて

$$[a] = \{a_1, \dots, a_n\}$$

$$[b] = \{b_1, \dots, b_m\}$$

のように表したとき、それぞれの形成時期は

$$\tau(\sigma([a])) = \tau(\sigma(a_1)) \cup \dots \cup \tau(\sigma(a_n))$$

$$\tau(\sigma([b])) = \tau(\sigma(b_1)) \cup \dots \cup \tau(\sigma(b_m))$$

である。したがって、すべての $x \in [a]$ とすべての $y \in [b]$ の間に

$$\sup(\tau(\sigma(x))) \leq \inf(\tau(\sigma(y)))$$

が成り立つときかつそのときに限り

$$\sup(\tau(\sigma([a]))) \leq \inf(\tau(\sigma([b])))$$

が成り立つといえる。この性質は次のような定理として述べることができる (第2図参照)

[定理3] 集合 B 上に同値関係 D を定めて、商集合 B/D を構成したとする。(A) で定義される B 上の関係 K と (B) で定義される B/D 上の関係 K' に関して、次のことがいえる。

どの $x \in [a], y \in [b]$ に対しても、 xKy が成り立つときかつそのときに限り、 $[a] K' [b]$ が成り立つ。すなわち

$$(C) \quad [a] K' [b] \Leftrightarrow (\forall x, y) (x \in [a] \text{ かつ } y \in [b] \Rightarrow xKy).$$

この定理3は、 B 上の関係 K があらかじめ与えられていれば、(C) にしたがって B/D 上の関係 K' が定められることを意味する。

<例2> 第3図(a)に示すように、 $B = \{a, b, c, d\}$ 上の関係 K が次のように与えられているとする。

$$aKb, aKc, aKd, bKd, cKd$$

第2図 $[a]K'[b]$ がいえるための条件

(b)のように、 b と c をひとまとめにするような商集合

$$B/D = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$$

を与える同値関係 D を定めたとき、

$$aKb \text{ かつ } aKc \Rightarrow \{a\}K'\{b, c\}$$

$$bKd \text{ かつ } cKd \Rightarrow \{b, c\}K'\{d\}$$

$$aKd \Rightarrow \{a\}K'\{d\}$$

となる。これとは別に(c)のように a と c をひとまとめにするような同値関係 D を考えて商集合

$$B/D = \{\{a, c\}, \{b\}, \{d\}\}$$

を定めたとき

$$aKd \text{ かつ } cKd \Rightarrow \{a, c\}K'\{d\}$$

$$bKd \Rightarrow \{b\}K'\{d\}$$

である。しかし、この場合、 aKb ではあるが cKb ではないので、 $\{a, c\}K'\{b\}$ とはいえない。

(C)にしたがって定められる関係 K' は、もとの定義(B)で定められる関係と同値であるから、定理2で述べたような性質をもつことが期待される。

[定理4] B 上の関係 K が

$$(1) \sim aKa \quad (a \in B)$$

$$(2) aKb \text{ と } bKa \text{ が同時に成り立つことはない}$$

$$(3) aKb \text{ かつ } bKc \Rightarrow aKc$$

$$(4) K \cup E \text{ は半順序である}$$

という性質をもつとき、(C)で定義された B/D 上の関係 K' もまた

$$(1') \sim [a]K'[a] \quad ([a] \in B/D)$$

$$(2') [a]K'[b] \text{ と } [b]K'[a] \text{ が同時に成り立つことはない}$$

$$(3') [a]K'[b] \text{ かつ } [b]K'[c] \Rightarrow [a]K'[c]$$

$$(4') K' \cup E' \text{ は半順序である}$$

という性質をもつ。

(証明)

(C)によれば、

$$\sim aKb \Rightarrow \sim [a]K'[b]$$

である。したがって

$$(1') \sim aKa \Rightarrow \sim [a]K'[a]$$

$$(2') \sim aKb \text{ または } \sim bKa$$

$$\Rightarrow \sim [a]K'[b] \text{ または } \sim [b]K'[a]$$

$$(3') (C) \text{ の定義と}$$

$$aKb \text{ かつ } bKc \Rightarrow aKc$$

という仮定から

$$[a]K'[b] \text{ かつ } [b]K'[c]$$

$$\Rightarrow \forall x, y (x \in [a] \text{ かつ } y \in [b] \Rightarrow xKy) \text{ かつ}$$

$$\forall y, z (y \in [b] \text{ かつ } z \in [c] \Rightarrow yKz)$$

$$\Rightarrow \forall x, y, z (x \in [a] \text{ かつ } y \in [b] \text{ かつ } z \in [c] \Rightarrow xKy \text{ かつ } yKz)$$

$$\Rightarrow \forall x, z (x \in [a] \text{ かつ } z \in [c] \Rightarrow xKz).$$

$$\therefore [a]K'[b] \text{ かつ } [b]K'[c] \Rightarrow [a]K'[c].$$

$$(4') (1') \sim (3') \text{ より、 } B/D \text{ 上の関係 } K' \cup E' \text{ は}$$

$$\text{反射律} : [a](K' \cup E')[a] \quad ([a] \in B/D)$$

$$\text{反対称律} : [a](K' \cup E')[b] \text{ かつ } [b](K' \cup E')[a]$$

$$\Rightarrow [a] = [b]$$

$$\text{推移律} : [a](K' \cup E')[b] \text{ かつ } [b](K' \cup E')[c]$$

$$\Rightarrow [a](K' \cup E')[c]$$

を満たすので半順序である。(証明終)

第3図 地層群間の新旧関係 K' の例(1). (a) $B = \{a, b, c, d\}$ 上の新旧関係 K .

(b) $B/D = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$ 上の関係 K' . (c) $B/D = \{\{a, c\}, \{b\}, \{d\}\}$ 上の関係 K'

5. 段階的な地層のグルーピング

定理4で述べたように、(C)にしたがって地層群間の新旧関係 K' を定める限り、 B 上の新旧関係 K に関する性質 (1)～(4) は、 B/D 上でも地層群間の新旧関係 K' の性質 (1')～(4') として保存される。そのため、地層群に対しても新旧の序列という順序概念を矛盾なく導入できることになる。さらに、商集合 $B' = B/D$ 上に新たな同値関係 D' を設定して、その商集合 $B'' = B'/D'$ 上の新旧関係 K' を (C) の原理で定めたときにも同様な性質の保存が期待できる。これを一般化すると次のようになる (証明略)。

[定理5] 集合 B_0 上に

- (1) $\sim aK_0a$ ($a \in B_0$)
- (2) aK_0b と bK_0a が同時に成り立つことはない
- (3) aK_0b かつ $bK_0c \Rightarrow aK_0c$
- (4) $K_0 \cup E_0$ は半順序である

という性質をもつ新旧関係 K_0 が与えられているとする。次の①と②の操作

- ① 集合 B_i 上に同値関係 D_i を設定して、 D_i に関する商集合 $B_{i+1} = B_i/D_i$ を定める
- ② B_i 上の新旧関係 K_i から、 B_{i+1} 上の新旧関係 K_{i+1} を $[a]K_{i+1}[b] \Leftrightarrow (\forall x, y) (x \in [a] \text{ かつ } y \in [b] \Rightarrow xK_iy)$ にしたがって定める

を $i=0, 1, \dots, N-1$ について繰り返したとき、すべての $i=0, 1, \dots, N$ について

- (1') $\sim xK_ix$ ($x \in B_i$)
- (2') xK_iy と yK_ix が同時に成り立つことはない
- (3') xK_iy かつ $yK_iz \Rightarrow xK_iz$
- (4') $K_i \cup E_i$ は半順序である

が成り立つ。ここで、 E_i ($i=0, 1, \dots, N$) は xE_ix ($x \in B_i$) のみが成り立つ B_i 上の関係である。

6. 議 論

- a) B 上の新旧関係が商集合 B/D 上に反映されるための条件

関係 K が与えられた集合 B にどのような同値関係 D を定義しても、(C)にしたがって商集合 B/D 上の関係 K' を定めることができる。しかし、 D の定めかたによっては、第3図の例でみたように、

$$aKb \Rightarrow [a]K'[b] \quad ([a] \neq [b])$$

がいえる場合 (第3図(b)参照) やいえない場合 (第3図(c)参照) が生じる。この違いについて少し議論する。

関係 K が与えられている集合 B 上にある同値関係 D を定めたとする。任意の同値でない a, b ($\sim aDb$) について

$$(G) \quad aKb, aDx \text{ かつ } bDy \Rightarrow xKy$$

が成り立つとき、 D は条件Gを満たす、あるいは D は条件Gを満たす同値関係であるとよぶことにする (第4図)。

<例3> 第3図(b)のように b と c をひとまとめにするような同値関係 D は

・ $\{a\}$ と $\{b, c\}$ に注目したとき

$$aKb, aDa \text{ かつ } bDc \Rightarrow aKc$$

$$aKc, aDa \text{ かつ } cDb \Rightarrow aKb$$

・ $\{b, c\}$ と $\{d\}$ に注目したとき

$$bKd, bDc \text{ かつ } dDd \Rightarrow cKd$$

$$cKd, cDb \text{ かつ } dDd \Rightarrow bKd$$

であるから、条件Gを満たす。しかし、第3図の(b)のような同値関係 D では

・ $\{a, c\}$ と $\{b\}$ に注目したとき、

$$aKb, aDc \text{ かつ } bDb \Rightarrow cKb$$

とはいえないので、条件Gを満たさない。

B 上に条件Gを満たす同値関係 D を定めたとする。このとき、同値でない a, b ($\sim aDb$) について aKb が成り立てば、任意の $x \in [a]$ と任意の $y \in [b]$ の間には xKy が成り立つので、(C)により $[a]K'[b]$ であるといえる。したがって、一般に次のことがいえる。

[T₁] 集合 B 上に条件Gを満たす同値関係 D を定めたとき、

$$(D) \quad aKb \Rightarrow [a]K'[b] \quad (\text{ただし}, [a] \neq [b])$$

が成り立つ。

このように、条件Gを満たすような同値関係を集合 B 上に設定すれば、(D)にしたがって、与えられた関係 K が商集合 B/D 上の関係 K' としてもれなく反映されることになる。

地層をグルーピングする基準は調査地域の地層の性質や調査の目的などにより様々である。条件Gはあくまでも地層の新旧関係のみに注目したときの条件であって、ある地質学的な基準からみて適切であると考えた同値関係が条件Gを満たさないこともありうる。このときは当然(C)にしたがって厳密に新旧関係 K' を定めなければならない。

なお、小野(1974)は「関係の代数」(28頁～29頁)において、集合 A 上の関係 R と同値関係 $\equiv$ に対し

$$xRy, x \equiv x' \text{ かつ } y \equiv y' \Rightarrow x'Ry'$$

が成り立つとき、「 R と $\equiv$ が両立する」とよんでいる。条

第4図 条件G

件Gとよく似ているが、 x と y が同値である場合 ($x \equiv y$) を含めて上の関係が成り立たなければ両立するといえない。条件Gは同値である場合を除いている点でこれとは異なる。

b) 条件Gを満たす同値関係の例

条件Gを満たす同値関係のいくつかの例を以下に示す。

・ $K \cup E$ が全順序であるとき

$K \cup E$ が全順序であるとき、 B の元を $K \cup E$ にしたがって

$$a_1, a_2, \dots, a_n \quad (\text{ただし } i \leq j \Rightarrow a_i(K \cup E)a_j)$$

のように1列にならべることができる。このとき、添え字が連続するものをひとまとめにするような同値関係は条件Gを満たす。

<例4> $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ 上の関係 $K \cup E$ が全順序であり、 $i \leq j$ であれば $a_i(K \cup E)a_j$ であるように添え字の番号が付られているものとする。このとき、商集合

$$B/D = \{\{a_1\}, \{a_2, a_3, a_4\}, \{a_5, a_6\}\}$$

を与える同値関係 D は明らかに条件Gを満たし、 B/D 上の関係 K' は次の通りである。

$$\{a_1\} K' \{a_2, a_3, a_4\}$$

$$\{a_2, a_3, a_4\} K' \{a_5, a_6\}$$

$$\{a_1\} K' \{a_5, a_6\}$$

・ $K \cup E$ が全順序でないとき

B 上の関係として次のような関係 ϵ を考える。

$$\epsilon = \sim (K \cup K^{-1}) = \sim K \cap \sim K^{-1}$$

$a \epsilon b$ は、 aKb でも bKa でもないこと、いいかえれば a と b の新旧関係が不明であるという関係を表す。

<例5> 第3図(a)のような新旧関係が与えられている場合、 ϵ は(b)のようなグルーピングを与える同値関係となる。この ϵ は明らかに条件Gを満たす。さらに、 B/ϵ 上の関係 K' は第3図(b)に示すように全順序となる。

この性質を一般化すると次のようになる。

[T_2] 集合 B 上に定理1の(1)~(4)の性質をもつ関係 K が与えられているとする。関係 $\epsilon = \sim (K \cup K^{-1})$ が同値関係となるとき、次のことがいえる。

(1) ϵ は条件Gを満たす同値関係である。

(2) 商集合 B/ϵ 上の関係 K' は

$$aKb \Rightarrow [a] K' [b] \quad (\text{ただし } [a] \neq [b])$$

で定まる。

(3) (2)のようにして B/D 上の関係 K' を定めたとき、 $K' \cup E'$ は全順序となる。

(証明)

(1) 異なる同値類 $[a], [b]$ ($[a] \neq [b]$) について、

$$aKb, a \epsilon x \text{ かつ } b \epsilon y$$

を仮定したとき、 xKy が成り立つことを証明する。

$a \epsilon x$ であるような x と b の関係は

$$\textcircled{1} xKb \text{ かつ } bKx \quad \textcircled{2} \sim xKb \text{ かつ } \sim bKx$$

$$\textcircled{3} \sim xKb \text{ かつ } bKx \quad \textcircled{4} xKb \text{ かつ } \sim bKx$$

のいずれかである。 K の性質より①はありえない。また、②であれば $x \epsilon b$ となり $[a] \neq [b]$ の仮定に反する。③であれば、

$$aKb \text{ かつ } bKx \Rightarrow aKx$$

となり、 $a \epsilon x$ の仮定に反する。したがって、④の xKb でなければならない。さらに、 $b \epsilon y$ であるような y と x の関係は

$$\textcircled{1} xKy \text{ かつ } yKx \quad \textcircled{2} \sim xKy \text{ かつ } \sim yKx$$

$$\textcircled{3} \sim xKy \text{ かつ } yKx \quad \textcircled{4} xKy \text{ かつ } \sim yKx$$

のいずれかであるが、上と同様にして、④の xKy が成り立つことがわかる。

(2) ϵ が条件Gを満たすことから明かである。

(3) $K' \cup E'$ が半順序であることがわかっているから、任意の異なる同値類 $[a], [b]$ ($[a] \neq [b]$) について、 $[a] K' [b]$ または $[b] K' [a]$ が成り立つことを示せばよい。

もし、 aKb でも bKa でもなければ、 ϵ の定義より $a \epsilon b$ となり $[a] \neq [b]$ と矛盾する。したがって、 aKb あるいは bKa のいずれかが成り立たなければならない。このとき、(2)より $[a] K' [b]$ あるいは $[b] K' [a]$ のいずれかが成り立つ。(証明終)

上で述べた関係 ϵ は反射律と対称律を満たすが、推移律を満たすとは限らない。そこでその推移的閉包

$$\epsilon^+ = \epsilon \cup \epsilon^2 \cup \dots$$

を考える。 ϵ^+ は同値関係であることは明かである。

<例6> 第5図(a)に示すように集合 $B = \{a, b, c, d, e\}$ 上に

$$aKb, aKc, aKd, aKe, bKe, cKd, cKe, dKe$$

という関係 K が与えられているとする。このとき、 ϵ は(b)のように表される。 $c \epsilon b$ かつ $b \epsilon d$ であるが $c \epsilon d$ ではないので、この ϵ は推移律を満たさない。この場合でも、 ϵ^+ は(c)に示すように同値関係となる。(a)と(c)を比べると、この ϵ^+ は条件Gを満たすことがわかる。 B/ϵ^+ 上の関係 K' を(d)にしたがって定めたとき、(d)に示すように、関係 $K' \cup E'$ は全順序になる。

この例に示されるように、一般に次のことがいえる。

[T_3] 集合 B 上に定理1の(1)~(4)の性質をもつ関係 K が与えられているとする。このとき、関係 $\epsilon = \sim (K \cup K^{-1})$ の推移的閉包

$$\epsilon^+ = \epsilon \cup \epsilon^2 \cup \dots$$

について次のことがいえる。

(1) ϵ^+ は条件Gを満たす同値関係である。

(2) この同値関係 ϵ に関する B の商集合 B/ϵ 上の関係 K' は

$$aKb \Rightarrow [a] K' [b] \quad (\text{ただし, } [a] \neq [b])$$

で定めることができる

(3) (2)のようにして B/ϵ^+ 上の関係 K' を定めたとき、

第5図 地層群間の新旧関係 K' の例(2). (a) $B = \{a, b, c, d, e\}$ 上の新旧関係 K . (b) $\epsilon = \sim(K \cup K^{-1})$.
(c) $\epsilon^+ = \epsilon \cup \epsilon^2$. (d) $B/\epsilon^+ = \{\{a\}, \{b, c, d\}, \{e\}\}$ 上の関係 K'

$K' \cup E'$ は全順序となる.

(証明)

(1) ϵ^+ が同値関係であることは明かであるので, $[a] \neq [b]$ であるような任意の2つの同値類 $[a]$, $[b]$ について, 条件Gが成り立つことを証明すればよい. $a \epsilon^+ x$ と $b \epsilon^+ y$ は

$$a \epsilon^+ x \Leftrightarrow$$

ある $a_0 = a$, $a_1, \dots, a_r, a_{r+1} = x$ が存在して,
すべての $i = 0, \dots, r$ について, $a_i \epsilon a_{i+1}$

$$b \epsilon^+ y \Leftrightarrow$$

ある $\beta_0 = b$, $\beta_1, \dots, \beta_s, \beta_{s+1} = y$ が存在して,
すべての $j = 0, \dots, s$ について, $\beta_j \epsilon \beta_{j+1}$

を意味する. このような $\alpha_i (i = 0, \dots, r+1)$ と $\beta_j (j = 0, \dots, s+1)$ について, T_2 の(1)の証明と同様にして,

$$\alpha_i K \beta_j \Rightarrow \alpha_{i+1} K \beta_j$$

$$\alpha_i K \beta_j \Rightarrow \alpha_i K \beta_{j+1}$$

$$\alpha_i K \beta_j \Rightarrow \alpha_{i+1} K \beta_{j+1}$$

がいえる. これを $\alpha_0 K \beta_0$ ($a K b$) に次々に適用していくことにより, $\alpha_{r+1} K \beta_{s+1}$ ($x K y$) を導くことができる.

(2) ϵ^+ が条件Gを満たすことから明かである.

(3) $K' \cup E'$ が半順序であるから, $[a] \neq [b]$ である任意の $[a]$, $[b]$ について

$$[a] K' [b] \text{ あるいは } [b] K' [a]$$

であることを示せばよい.

$[a] \neq [b]$ かつ $\sim[a] K' [b]$ であると仮定する. このとき

$$\sim[a] K' [b] \Leftrightarrow \sim(\forall x, y) (x \in [a] \text{ かつ } y \in [b] \Rightarrow x K y)$$

$$\Leftrightarrow \exists x, y (x \in [a], y \in [b] \text{ かつ } \sim x K y)$$

より, $\sim x K y$ であるような $x \in [a]$, $y \in [b]$ が存在することになる. もし, この x, y について, $\sim y K x$ であるとすれば

$$\sim x K y \text{ かつ } \sim y K x \Leftrightarrow x \epsilon y \Rightarrow x \epsilon^+ y$$

となり, $[a] \neq [b]$ という仮定に反する. したがって, $y K x$ でなければならない. ϵ^+ が条件Gを満たすことから,

$$y K x \Rightarrow [y] K' [x] \Rightarrow [b] K' [a].$$

$$\therefore \sim[a] K' [b] \Rightarrow [b] K' [a].$$

以上のことから, $[a] \neq [b]$ である任意の $[a]$, $[b]$ について

$$[a] K' [b] \text{ あるいは } [b] K' [a]$$

のいずれかが成り立ち, $K' \cup E'$ は全順序である. (証明終)

このような同値関係の例として, 鍵層を基準にして層相の異なる地層をまとめるような同値関係が考えられる.

<例7> 3つのルートI, II, IIIを調査して, それぞれ

$$\text{I} : a \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow b$$

$$\text{II} : a \rightarrow y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow b \rightarrow y_3 \rightarrow c$$

$$\text{III} : b \rightarrow z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow c$$

という順序の地層の新旧関係を観察したとする. この結果は第6図のようにグラフ表現できる. ルート間での対比が可能な地層 a, b, c に注目して, a と b の間にはさまれた地層と b と c の間にはさまれた地層をそれぞれひとまとめにする. このグルーピングは地層の集合 $B = \{a, b, c, x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2\}$ 上の同値関係 ϵ^+ にしたがって, 商集合

$$B/\epsilon^+ = \{\{a\}, \{x_1, x_2, y_1, y_2\}, \{b\}, \{y_3, z_1, z_2\}, \{c\}\}$$

を定めたことに相当する. その結果, えられる B/ϵ^+ 上の関係 K' から

$$\{a\} \rightarrow \{x_1, x_2, y_1, y_2\} \rightarrow \{b\} \rightarrow \{y_3, z_1, z_2\} \rightarrow \{c\}$$

という地層群の形成順序が定まる.

第6図 3つのルートで観察した地層の順序

c) 今後の課題

小単位の地層をいくつかまとめた地層群の新旧関係を論理地質学的な観点から分析した。しかし、専門家が現実に行うグルーピング作業では、新旧関係のほかに地層の累重関係や構造関係も同時に考慮される。したがって、地層をまとめる作業の完全な定式化を行うには、新旧関係だけでなく、累重関係や構造関係についても分析する必要がある。

塩野・弘原海(1991)では地層の累重関係についての定式化を行い、さらに塩野・弘原海(1992)では地質学の基本法則である「地層累重の法則」、「初生的水平性の法則」および「初生的側方連続性の法則」の定式化を試みている。これらの定式化を基礎にすれば、地層群間の累重関係はどのように定義すべきであるか、地層群間でも地層間の関係に関する基本的性質が保存されか、あるいは地層累重の法則などの法則が保存されるかなど累重関係に関する多様な問題へのアプローチが可能となろう。

整合・不整合などの構造関係については、まずその定式化が必要であり、グルーピングの問題を考えるまでには至っていない。今後の課題である。

7. ま と め

塩野・弘原海(1991)による地層の新旧関係 K の定式化に基づいて、新旧関係 K が与えられている集合 B 上に、ある同値関係 D を設定したとき、商集合 B/D 上の新旧関係 K' はどのように定義すればよいかという、地層をまとめる処理に密接に関連する問題を論理地質学的な観点から議論した。結論として B/D 上の新旧関係 K' は、すべての $x \in [a]$, $y \in [b]$ について xKy が成り立つときかつそのときに限り $[a]K'[b]$ が成り立つという原理で定められる

ことがわかった。さらに、このようにして K' を定めたとき、地層を順序づけるという新旧関係のもつ基本的性質が B/D 上でも保存され、地層群に対しても新旧の序列という順序概念を矛盾なく導入することができる。

文 献

- 地学団体研究会編(1977) 地層と化石 (新地学教育講座6), 東海大学出版, 218p.
- 小野寛晰(1974) 関係の代数(シリーズ新しい応用の数学6), 教育出版, 164p.
- 坂本正徳・塩野清治(1990) 記号論理演算による層序組み立ての基本アルゴリズム—論理型言語 Prolog を用いて—, 情報地質, 1, 211-217.
- 坂本正徳・塩野清治(1992) 関係行列による層序の推定—二項関係の行列表現と基本演算—, 情報地質, 3, 121-138.
- 塩野清治・弘原海 清(1988) 論理地質学のための関係の代数, 情報地質, No.13, 261-296.
- 塩野清治・弘原海 清(1991) 論理地質学的にみた地層累重の法則の論理構造, 情報地質, 2, 9-22.
- Shiono, K. and Wadatsumi, K. (1991) Binary relations and symbolic expression of geological knowledge for Artificial Intelligence: The Principle of Superposition. *Geoinformatics*, 2, 225-233.
- 塩野清治・弘原海 清(1992) 地層累重の法則に関連する公理系の試案, 情報地質, 3, 203-210.
- 弘原海 清・塩野清治・升本眞二(1987) 地質図自動作成システム (GEOMAP-CAD) 開発の現状と課題, 情報地質, No.12, 351-358.

要 旨: 与えられた地層間の新旧関係から地層群間の新旧関係を定める原理についての論理地質学的検討

: 塩野清治

地層をまとめる作業は地質調査におけるもっとも基本的な作業のひとつである。この作業は地層の集合 B 上にある同値関係 D を定めて、商集合 B/D を構成することに相当する。商集合 B/D の各元は同値関係 D によって同じものとしてまとめられた地層群である。このとき、もとの集合 B 上で定義された関係からいかにして矛盾なく商集合 B/D 上の関係を定めたらよいかという問題が生まれる。

本論文はこの問題に対する論理地質学的なアプローチとして、塩野・弘原海(1991)で定義された新旧関係 K (地層 a が地層 b より形成時期が古いことを aKb で表す) を例にして、商集合 B/D 上の新旧関係 K' を矛盾なく定義する原理を考察した。結論として、 $a \in B$ の D による同値類を $[a]$ とかくとすれば、すべての $x \in [a]$ と $y \in [b]$ の間に xKy という関係が成り立つときに限り $[a]K'[b]$ であるという原理で定められることがわかった。さらに、このように K' を定めたとき、地層を順序づけるという関係 K のもつ基本的性質が、 B/D 上の関係 K' においても保存されることがわかった。

キーワード: 論理地質学, 定式化, 順序, 新旧関係, 同値関係, グルーピング, 層序