歪み解析と変形解析の数理：7. 非共軸変形解析のための逆解法

Lecture note on the theories of strain and deformation analyses: 7. Inverse method for determining non-coaxial, finite deformations

山路 敦*

Atsushi Yamaji*

2017年12月4日受付.
2017年12月28日受理.

* 京都大学大学院理学研究科地球惑星科学専攻
Division of Earth and Planetary Sciences,
Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan

Corresponding author: A. Yamaji,
yamaji@kueps.kyoto-u.ac.jp

Fig. 1. An outcrop of the lower part of the Kiyosumi Formation (Pliocene) in the Boso Peninsula, central Japan, which was documented by Sato et al. (2014). The non-coaxial deformation representing the brittle deformations and tilting of the strata is evaluated in §4. 房総半島の清澄層下部(鮮新統)の露頭(佐藤ほか, 2014). 断層変位と傾動を粗視化により平均化した, この露頭があらわす非共軸変形を §4 で見積もる.

1. はじめに

本講座の最終回として, 非共軸有限変形を評価するための逆問題を扱う. そして, 幾条もの断層により複雑に脆性変形した Fig. 1 の堆積岩体に, この逆解法を適用した例を紹介する. そのためにまず, 前回(山路, 2018)に続いて二次元の定常線形力学系で表現される累進変形が, 双曲平面 H^2 上の双曲的回転として表現されることについて復習する. そしてそれが, Minkowski 空間におけるベクトル値関数として表現されることを解説する. それにもとづいて逆問題を構成しよう.

変形解析や歪み解析と似て非なるものとして, 幾何学的形態計測学(geometric morphometrics; e.g., Zeiditch et al., 2012)がある. 最後にこれを取りあげる. 変形・歪み解析では, 位置情報とサイズ情報を捨象して, 変形マーカーの形と方向を問題とすることによって, 双曲幾何学が現れた. 統計的形態解析では, 位置とサイズと方向の情報を捨象して, 形態の情報のみを扱うのだが, はやりそこにも双曲幾何学が現れるのである.

以下, 前回までと同様, 位置ベクトルとその終点が表す点を同一視する. 特に断らない限り, ベクトルは列ベクトルで表現する.

2. 定常流における楕円型マーカーの累進変形

逆問題を構成する前に, まずそのフォワード・モデルを考える. すなわち, 定常流により楕円形マーカーがどうなるかを考えるわけである. 二次元の速度勾配テンソル $\mathbf{L}$ が与えられたとして, 楕円形変形マーカーの累進変形を計算するにはどうするか. これまでと同様に, 変形に伴う面積変化を無視する. すなわち $\text{trace } \mathbf{L} = 0$ と仮定する(ハーシュほか, 2007). Ramberg (1975)はこの問いに答えるため, 線形力

学系の式 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{L}\mathbf{x}$ を数値積分した.

しかし定常流なら数値積分の必要はなく, 次のようにして解析的に答えが得られる. まず, 前回示した $\mathbf{F} = \exp(t\mathbf{L})$ により変形勾配テンソルが求まる. そうすると本講座第3回(山路, 2016b, 式19)のように, 変形前の楕円の形状行列を $\mathbf{N}_i$ として, 変形後の楕円の形状行列が $\mathbf{N}_f = (\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{N}_i \mathbf{F}^{-1}$ と求まる. $\mathbf{N}_f$ の2つの固有値のうち大きい方が変形後の楕円のアスペクト比を表し, その固有値に対応する固有ベクトルが長軸方向を表す.

$\mathbf{F} = \exp(t\mathbf{L})$ の計算では, $\det \mathbf{L}$ の符号から変形の様子をまず判定する. すなわち $\det \mathbf{L} < 0$ なら subsimple shear, > 0 なら supersimple shear であり, また, $= 0$ なら純剪断である. Subsimple shear なら, $G = \sqrt{-\det \mathbf{L}}$ として

$$\mathbf{F} = \frac{1}{G} \sinh(Gt) \mathbf{L} + \cosh(Gt) \mathbf{I} \quad (1)$$

となる(前回の式(7, 8)). 単純剪断なら apophysis は1本しかないので, $\mathbf{L}$ の2つの固有値は縮退し, 固有ベクトルが apophysis, すなわち単純剪断の運動方向を表す. そこで, 第1座標がその方向になるように座標回転すれば,

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の形になる. $\mathbf{L}^2$ はゼロ行列なので, $\exp(t\mathbf{L}) = \mathbf{I} + \mathbf{L}t$

+ $(L^2/2!)t^2 + \dots$ の右辺から 2 次以降の項が消えて,

$$F = \exp(tL) = I + Lt = \begin{pmatrix} 1 & vt \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Supersimple shear の場合, G は純虚数で, $G = \sqrt{-\det L} = si$ の形になる. ただし s は実数で, i は虚数単位である. 任意の実数 x について $\sinh xi = i \sin x$, $\cosh xi = \cos x$ なので, 式(1)は

$$F = \frac{1}{si} \sinh(sti) L + \cosh(sti) I \\ = \frac{1}{s} \sin(st) L + \cos(st) I$$

となる(前回の §3).

面積を保存する定常流の L が与えられると, こうして任意の楕円形マーカーがどんな楕円になるかが計算できるわけである. この変化を H^2 上の軌跡として表現することができる. どんな軌跡になるかは, 上述のようにして時刻 t の関数として形状行列を求め, H^2 上の点を表す位置ベクトル $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2)^T$ と形状行列 N との対応関係(本講座第5回, 山路, 2017b)

$$N = \begin{pmatrix} x_0 + x_1 & -x_2 \\ -x_2 & x_0 - x_1 \end{pmatrix}$$

からわかる. しかし, この軌跡は双曲幾何学を使うと, もっと簡単に計算できるのである.

3. Minkowski 空間での累進変形の表現再論

3.1 双曲的回転

位置ベクトルを $\mathbf{x}$ として, 二次元の定常流が線形力学系 $\dot{\mathbf{x}} = L\mathbf{x}$ で表されるなら, その流体中の累進変形が Minkowski 空間の中の双曲的回転で表現されることを前回説明した(山路, 2018). すなわち, 定常流による累進変形が時間の関数としての変形勾配テンソル $F(t)$ で表されるなら, それと対応した Minkowski 空間内の 1 次変換 $\mathbf{y} = T(t)\mathbf{x}$ で, 任意の 2 点間の Lorentz 距離を保つ変換が存在したわけである. これは実空間における, 原点を通る軸の周りの回転で, 任意の 2 点間のユークリッド距離が不変であることにたとえることができる. そこで前回, T で表される変換を双曲的回転と呼んだ.

さて, 実空間における回転は, 回転行列を使って $\mathbf{y} = R\mathbf{x}$ のように表すこともできるが, 回転行列 R の成分は, オイラー角を含む複雑な式になる(例えば, 山路, 2000, 式(A64)). それに対して, Rodrigues の回転公式 $\mathbf{y} = \mathbf{x} \cos \theta + (\mathbf{k} \times \mathbf{x}) \sin \theta + \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})(1 - \cos \theta)$ は単純な式ながら, 回転軸と回転量を陽に含むので便利である. この式では θ が回転量, 単位ベクトル $\mathbf{k}$ は回転軸, $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ が回転前後の位置ベクトル, $\times$ はベクトル積, $\cdot$ はベクトルの通常の内積を表す. 同様に, 双曲的回転でも回転軸と回転量を陽に含む表現がある(中岡, 1993). それを紹介するために, まず, 本講座第4回(山路, 2017a)のおさらいをする.

三次元 Minkowski 空間の直交デカルト座標を $O-012$ と

Fig. 2. Schematic illustration of Lorentz distance, ρ_s , between points on H^2 in a three-dimensional Minkowski space. The points represent ellipses with the area of π in the physical space. The distance equals the strain needed to transform one of the ellipses to the other. L depicts the light cone. 三次元 Minkowski 空間中の双曲平面 H^2 の模式図. その上の 2 点は, 実空間にあって面積が π の 2 つの楕円を表し, 一方の楕円を他方にする歪み量が 2 点間の Lorentz 距離 ρ_s に等しい. L は光錐.

し, 任意のベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ の Lorentz 内積を $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = -a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$, $\mathbf{a}$ の Lorentz ノルムを $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{|\mathbf{a} \circ \mathbf{a}|}$ とする. 2 点 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ の間の Lorentz 距離は $\cosh^{-1}(-\mathbf{x} \circ \mathbf{y})$ である. Minkowski 空間中の 2 点を結ぶルートで, Lorentz 距離が最小のものを, それら 2 点間の測地線と呼び, それに沿った Lorentz 距離を測地距離という. また, 任意のベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ の Lorentz 外積 (Lorentzian cross product; e.g., Ratcliffe, 2006) を

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -(a_1b_2 - a_2b_1) \\ a_2b_0 - a_0b_2 \\ a_0b_1 - a_1b_0 \end{pmatrix}$$

と定義する(中岡(1993)は擬外積とよんでいる).

アスペクト比が R , 長軸方向が ϕ で, 面積が π の楕円は, この Minkowski 空間の点 $\mathbf{x} = (\cosh \rho, \sinh \rho \cos \psi, \sinh \rho \sin \psi)^T$ が対応する. ただし, $\rho = \log_e R$, $\psi = 2\phi$ である. この空間中で式 $\mathbf{x} \circ \mathbf{x} = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -1$ かつ $x_0 > 0$ で定義される面が H^2 である. この Minkowski 空間中の直交デカルト座標 $O-012$ を三次元ユークリッド空間の中の座標と見なしたときのこの面は, 第 0 軸周りに回転対称の曲面である (Fig. 2). H^2 上の 2 点を結ぶ測地線は, その 2 点と原点で定義される平面と H^2 との交線である. この測地線上の任意の点を $\mathbf{x}$ とすると, それと Lorentz 直交すなわち $\mathbf{p} \circ \mathbf{x} = 0$ を満たすベクトル $\mathbf{p}$ が存在する. これをこの平面の極とよぶ. Fig. 2 の L は $\mathbf{x} \circ \mathbf{x} = 0$ かつ $x_0 \geq 0$ を満たす点 $\mathbf{x}$ の集合, すなわち原点を頂点とし, H^2 に漸近する光錐 (light cone) である. 極 $\mathbf{p}$ の始点を原点に置いたとき, 終点が光錐より下にあるなら, この平面と H^2 の交線は測地線である. $\mathbf{p}$ をこの測地線の極という. T は, 一つの固有値のみ 1 という値を持つ. それに対応した固有ベクトルが $\mathbf{p}$ である.

実空間における回転を考える. 回転軸が原点を含むとして, 回転軸の方向を表す単位ベクトルを $\mathbf{p}$ とすると, この

Fig. 3. Profiles of H^2 on the plane parallel to $\mathbf{p}$ and the 0th coordinate axis. L depicts a light cone. (a) Dot-dash line depicts the plane through the origin, O , and Lorentz orthogonal to $\mathbf{p}$. The intersection of this plane and H^2 is a geodesic on H^2 . Dotted line depicts a plane Lorentz orthogonal to $\mathbf{p}$. The intersection of this line and H^2 is a line with the constant hyperbolic distance, d , from the geodesic, and corresponds to the progressive subsimple shear of an elliptical marker. (b) Dotted line depicts the plane perpendicular to the 0th coordinate axis and parallel to $\mathbf{p}$. The intersection of this plane and H^2 is a horocycle, which corresponds to the progressive simple shear of an elliptical marker. (c) The intersection of a plane and H^2 defines a circle on H^2 with the radius of r and the center, $\mathbf{p}$. The circle corresponds to the progressive supersimple shear of an elliptical marker. H^2 の第 0 座標軸を通る断面。破線で表された L は光錐。 dS_2 は式 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 1$ で表される一様双曲面。原点を通り、極 $\mathbf{p}$ を有する平面(一点鎖線および点線)と H^2 の交線は、(a)では測地線、(b)ではホロサイクル、(c)では円。これら 3 つの場合は、実空間における定常 subsimple shear, 単純剪断, supersimple shear に相当する。

回転に対して $\mathbf{p}$ が表す点は不動であり、任意の位置ベクトル $\mathbf{x}$ を回転軸に正射影した影の長さ $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$ は、この回転に対して不変である。同様に、 $\mathbf{p}$ を曲とする双曲的回転で $\mathbf{p}$ が表す点は不動であり、 $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$ は不変である。速度勾配テンソルを

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

とすると、これによって表される定常流の極の成分は、式

$$p_0 = -\left(\frac{\beta - \gamma}{\alpha - \delta}\right)p_2, \quad p_1 = -\left(\frac{\beta + \gamma}{\alpha - \delta}\right)p_2$$

によって決定される(前回の式(22))。 $\mathbf{p}$ と第 12 座標平面のなす角 Γ は、式

$$\tan \Gamma = \frac{|\beta - \gamma|}{\sqrt{(\alpha - \delta)^2 + (\beta + \gamma)^2}}$$

を満たし、 $\Gamma = 0^\circ$ なら純剪断、 $0 < \Gamma < 45^\circ$ なら subsimple shear、 $\Gamma = 45^\circ$ なら単純剪断、 $\Gamma > 45^\circ$ なら supersimple shear である(前回の §4) (Fig. 3)。

〔問題〕 H^2 上の点 $(1, 0, 0)^T$ を C とする。ある測地線が極 $\mathbf{p}$ を持つとして、この測地線上にあって点 C からの Lorentz 距離が最小になる点を求めよ。ただし、 $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = 1$ とする。

〔答え〕 $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = -p_0x_0 + p_1x_1 + p_2x_2 = 0$ と $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -1$ を制約として、 $\cosh^{-1}(-\mathbf{x} \cdot (1, 0, 0)^T) = \cosh^{-1}x_0$ を最小にする $\mathbf{x}$ を求めることになる。 H^2 上の点は $x_0 \geq 1$ である。等号の場合は問題の測地線が点 C を通るので、点 C 自体が求める点である。 $x_0 > 1$ の場合、 $\cosh^{-1}x_0$ が単調増加関数なので、測地線上で x_0 を最小にする点を求めることになる。そこで、Lagranges の未定乗数法を使う。すなわち、 $F = x_0 + \lambda(-p_0x_0 + p_1x_1 + p_2x_2) + \mu(-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + 1)$ として、

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} = 1 - \lambda p_0 - 2\mu x_0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \lambda p_1 + 2\mu x_1$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = \lambda p_2 + 2\mu x_2.$$

これらを連立させて $\mathbf{x}$ の成分で解くと、

$$x_0 = -\frac{\lambda p_0 - 1}{2\mu}, \quad x_1 = -\frac{\lambda p_1}{2\mu}, \quad x_2 = -\frac{\lambda p_2}{2\mu}.$$

さらにこれらを 2 つの制約条件の式に代入すると、 $\lambda = -p_0$ 、 $\mu = \pm\sqrt{p_0^2 + 1}/2$ 。複号のうち負号の方を上の式に代入すると $x_0 < 0$ となって、 H^2 に乗らない点になるので、正符号の方をとって、

$$\mathbf{x} = \frac{(p_0^2 + 1, p_0p_1, p_0p_2)^T}{\sqrt{p_0^2 + 1}}$$

これは、第 0 座標軸と $\mathbf{p}$ が張る平面と問題の測地線の交点である。

3.2 軌道のパラメータ表示

あるベクトル $\mathbf{p}$ を極とする H^2 上の測地線や、それとつねに等距離にある H^2 上の線を、 t をパラメータとして簡単な式で表現することができる。定常流が subsimple shear, 単純剪断, supersimple shear の場合に分けてそれを解説する。

Subsimple shear 光錐 L の下側に $\mathbf{p}$ があるなら、それを極とする H^2 上の測地線には、

$$\mathbf{x} = (\cosh t)\mathbf{a} + (\sinh t)\mathbf{p} * \mathbf{a}$$

というパラメータ表示がある。ここで $\mathbf{a}$ は任意の測地線上の点、 t は媒介変数で、 $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = 1$ とする。つまり、極 $\mathbf{p}$ の終点は本講座第 4 回で紹介した、第 0 座標軸のまわりの回転双曲面 dS_2 の上にある (Fig. 3a)。これは光錐より外側にあって、 $x_0 \rightarrow \infty$ で光錐に漸近する曲面である。 t を変化させ

Fig. 4. Orthogonal projection of the geodesic (thick line) and its parallels (dashed lines) onto the O -12 coordinate plane for the case of $\Gamma = 40^\circ$ and $p_2/p_1 = \tan 30^\circ$. Solid circle indicates the orthogonal projection of p . The Lorentz distances of the parallels from the geodesic are 1. The curves have the symmetry with respect to the dot-dash line. Thick arrows indicate the directions corresponding to the apophyses of the steady flow that has the p value. H^2 上の測地線(太線)とそれから Lorentz 距離が 1 の線を、第 12 座標平面に正射影した図($\Gamma = 40^\circ$, $p_2/p_1 = \tan 30^\circ$). この測地線の極 p の正射影を黒丸で示す. これらの線は、一点鎖線に対して対称. 曲線の方法は太矢印の方法に漸近するが、それらの方法は実空間における apophyses の方法に対応する.

たときの x が描く H^2 上で軌道が測地線で、その軌道上の始点 a における接ベクトルが $p * a$ である. この測地線から一定の Lorentz 距離 d だけ離れた H^2 上の線は、 t を媒介変数とする

$$x = (\cosh d \cosh t) a + (\cosh d \sinh t) p * a + (\sinh d) p \quad (2)$$

という式で表される(中岡, 1993, p.114) (Fig. 3a). これは p を極とする Minkowski 空間の中の双曲的回転を表していて、実空間における変形としては subsimple shear が対応し、 t はその歪み量を表す. この式は純剪断($p_0 = 0$)でも成り立つ. 球面上の測地線は大円であり、大円から一定距離にある線は小円である. H^2 上で測地線から一定距離にある線は、小円に相当する図形である. ただし、この線は無限遠まで伸びている. 式(2)により計算した H^2 上の軌道の例を第 12 座標平面への正射影で Fig. 4 に示す. この図でそれらの線は、 p の正射影を通る一点鎖線に対して対称で、なおかつそのトレンドは太矢印の方法に漸近する. この方法は、subsimple shear の apophyses の方法に相当する. この定常流の運動論的渦度を W_k とすると、apophyses のなす角 Ψ は $\Psi = \cos^{-1} W_k = \cos^{-1}(\tan \Gamma)$ という式を満たす(本講座前回). ただし Γ は p と第 12 座標平面のなす角である. W_k が 1 に近づくと、 Ψ は 0° に近づく.

単純剪断 実空間における単純剪断に対応する双曲的回転では、極 p が光錐上にある(Yamaji, 2008). この p と Lorentz 直交する平面と H^2 の交線は、ホロサイクル(horocycle)とよばれる曲線で(Fig. 3b), H^2 上の点 a を始点とする

Fig. 5. Orthogonal projection of the horocycles with the pole, $p = (1, \cos 30^\circ, \sin 30^\circ)^T$, corresponding to simple shear in the physical space. The lines are symmetric with respect to the dot-dash line. Thick arrow indicates the direction of apophysis. 実空間における単純剪断に対応したホロサイクルの第 12 座標へ面への正射影. 太矢印は apophysis の方法を示す.

この曲線の媒介変数表示は

$$x = a - \frac{t^2}{2} (a \circ p) a + t a * a$$

である(中岡, 1993, p.115). ただし p は $p_0 = 1$ かつ $p_1^2 + p_2^2 = 1$ を満たすものとする. この曲線に沿った Lorentz 距離が t である. この式で表されるホロサイクルの例を Fig. 5 に示す. 単純剪断の apophysis は剪断運動の方法であるが、この図の太矢印の方法が、apophysis の方法に対応している.

Supersimple shear 極 p の終点が光錐より上にある場合は、それと Lorentz 直交する平面と H^2 の交線は閉曲線で、 H^2 上の半径が r で中心が H^2 上の c にある円である. その媒介変数表示は、

$$x = (\cosh r) c + (\sinh r \cos \theta) u + (\sinh r \sin \theta) v \quad (3)$$

ただし p の終点は H^2 上にあるものとし、 c , $u = p * c / \|p * c\|$, $v = u * c / \|u * c\|$ が互いに Lorentz 直交して、Minkowski 空間の直交系を構成する. 円周上の位置がパラメータ θ で表されている(Fig. 3c) (中岡, 1993, p.113). この軌道は、実空間における supersimple shear による楕円形の変形マーカーの形状変化を表す(Yamaji, 2008). Fig. 6 に H^2 上の円の例を示す. 円の中心が $\times$ で、一点鎖線は対称軸を表す.

3.3 極分解

変形勾配テンソルは $F = RU$ という具合に、共軸変形 U と剛体回転 R に極分解することができた(本講座第 1 回; 山路, 2016a). 面積変化のない二次元変形では、 R には第 0 座標軸の周りの回転

$$T_r(\psi_r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi_r & -\sin \psi_r \\ 0 & \sin \psi_r & \cos \psi_r \end{pmatrix}$$

が対応し、 U には極が第 12 座標平面上にある双曲的回転

Fig. 6. Orthogonal projection of circles onto the 12-coordinate plane. The circles lying on H^2 are centered by the point $c = (\cosh 1, \sinh 1 \cos 30^\circ, \sinh 1 \sin 30^\circ)^T$, which is indicated by a cross. Dot-bar line is the symmetry axes of lines. H^2 上の円の第 12 座標平面への正射影.

$$T_0(\rho_s, \psi_s) = T_r(\psi_r) \begin{pmatrix} \cosh \rho_s & \sinh \rho_s & 0 \\ \sinh \rho_s & \cosh \rho_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T_r(-\psi_r)$$

が対応する。すなわち、実空間の $F = RU$ には、Minkowski 空間の

$$T = T_r(\psi_r) T_0(\rho_s, \psi_s) \quad (4)$$

が対応する。その例を Fig. 7 に示す。そこでは、黒丸で示された H^2 上の点に $T_0(2 \log(1.5), 40^\circ)$ を作用させた結果が灰色の丸印で、それに $T_r(60^\circ)$ を作用させた結果が白丸である。前者は実空間において基準方向から反時計回りに 20° 回転した方向に 1.5 倍に伸ばし、それと直交方向に $1/1.5$ 倍にする純剪断が対応する。この図では H^2 上の点や軌道を第 12 座標平面に正射影しているの、純剪断 U の効果は平行な直線で表され、 R の効果は原点の周りの同心円弧で表される。

【問題】 Fig. 7 の黒丸から白丸への変換に対応した実空間における F を求めよ。また、その F による変形は、super-simple shear であることを示せ。

【答え】 $T_0(2 \log(1.5), 40^\circ)$ と $T_r(60^\circ)$ から、

$$R = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \cos 20^\circ & -\sin 20^\circ \\ \sin 20^\circ & \cos 20^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1/1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 20^\circ & \sin 20^\circ \\ -\sin 20^\circ & \cos 20^\circ \end{pmatrix}$$

$$F = RU \approx \begin{pmatrix} 1.09 & -0.15 \\ 0.93 & 0.80 \end{pmatrix}.$$

F の固有値は $0.94 \pm 0.35i$ であり、実固有値がないことから apophysis が存在しないことがわかる。したがって super-simple shear である。■

本講座の前回で紹介した式(20)は、 F から対応する T を計算する式であった。すなわちそれは、

Fig. 7. Orthogonal projection of H^2 onto the 12-coordinate plane. Solid and open circles indicate the pre- and post-deformation points due to the deformation, $F = RU$. Parallel arrows depict the isometry on H^2 corresponding to the pure shear, U , whereas the concentric arcs with arrow heads centered by O depict the transformation corresponding to R . Dotted lines are the circles on H^2 centered by the point indicated by the cross. H^2 上の点と軌道を第 12 座標平面に正射影した図。黒丸と白丸は、それぞれ変形前後の位置。 $F = RU$ としたときの U に対応した軌道を黒丸から灰色丸への矢印で示す。

$$F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

として、 $[\pm \pm \pm \pm] = \pm a^2 \pm b^2 \pm c^2 \pm d^2$ という略記法を使うと(複号同順)、

$$T = \begin{pmatrix} [++++] & [+--+ -] & ab+cd \\ [++- -] & [+-- +] & ab-cd \\ ac+bd & ac-bd & ad+bc \end{pmatrix}. \quad (5)$$

になるということである。この関係を Fig. 7 の変形に当てはめると、

$$T \approx \begin{pmatrix} 1.35 & 0.69 & 0.58 \\ 0.16 & 0.45 & -0.90 \\ 0.89 & 1.13 & 0.72 \end{pmatrix}.$$

であるが、 $\text{trace } T \approx 2.52$ となって、これが 3 より小さいことから、双曲的回転 T の軌跡が H^2 上の円になることがわかる(中岡, 1993, 第 7 章)。この T は 1 という固有値を一つだけ持つので、それに対応した固有ベクトルとしてこの円の中心 c が得られる。それを使い、式(4)により H^2 上の同心円弧を描いたのが Fig. 7 の点線である。変形前後の H^2 上の点が、点線で結ばれていることがわかる。 RU という 2 段階操作が、 H^2 上の円軌道で表されたわけである。

【問題】 T が与えられたとして、それに対応する F がユニークに決定できるだろうか。

【答え】 T の成分は、 F の成分の 2 次の量のみからなる(式 5)。ゆえに、 F には符号の不確定性が残る。すなわち、 T だけからは、 $+F$ と $-F$ を区別できない。しかし二次元変形の場合、この 2 つは 180° 回転の違いであり、区別するためには変形前の変形マーカーの方向が既知でなければならな

い。

4. 変形逆解析

Rf/φ 歪み解析では、変形前の状態として、多数の楕円の統計的性質を仮定していた(本講座第4, 5回)。また、変形勾配テンソルを $\mathbf{F} = \mathbf{VR}$ と極分解すると、それによって決定されるのは $\mathbf{V}$ だけであり、 $\mathbf{R}$ を評価することはできなかった。

しかし、回転を含めた変形が、地質学的に決定できることがある。変形マーカの、変形前の形だけでなく姿勢についても妥当な仮定ができる場合である。それが可能なことはあまりないが、バランス断面が描かれた場合には、変形前のそれが定量的にわかる。というのも、地層は変形前、ほぼ水平に横たわっていたと仮定してバランス断面を描けば、堆積岩体の変形前の形状がわかるからである。そこで、その方法を解説しよう。この方法は、また、古地磁気データを使って鉛直軸周りの回転を戻せる場合にも適用できるだろう。

4.1 問題設定

Rf/φ 歪み解析のときと同様に、二次モーメント(本講座第3回)により変形マーカにフィッティングした楕円で、その変形マーカの形と方向を代表させることにする。ここで解こうとする問題はしたがって、次のようになる。 N 個の楕円型変形マーカについて、変形前後の楕円のアスペクト比と長軸方向がわかっているとする。すなわち、 $(R_i^{(1)}, \phi_i^{(1)})$, $\dots$, $(R_i^{(N)}, \phi_i^{(N)})$ と、これらに対応する $(R_f^{(1)}, \phi_f^{(1)})$, $\dots$, $(R_f^{(N)}, \phi_f^{(N)})$ が既知であるとする。添え字の i と f は、変形前(initial)と後(final)のマーカに関わる量であることを示す。これから $\mathbf{F}$ を求めるにはどうしたらよいか、という問題である。以下、変形による面積変化がないとして、この問題を H^2 上の幾何の問題と見なし、最小自乗的に最適な $\mathbf{F}$ を決定する。なぜ H^2 を持ち出すのかというと、最小自乗法の残差として Lorentz 距離を使うことができ、Lorentz 距離は歪み量に対応するからである。これは変形解析の残差にふさわしい量である。

4.2 データ

Fig. 1 の露頭に露出する堆積岩体を例にして、何がデータになるかをまず解説する。この露頭写真に写っている地層と断層をトレースしたのが Fig. 8 の右上の図である。方法の解説が今の目的なので、写真に含まれる光学的な歪みは無視する。この図のなかの右列には、この露頭の全体および一部が示されている。断層活動前のそれらの形状を左列に示した。地層と平行な断層は、存在に気づくこと自体が難しいし、その変位量がわからないことが多い。この困難が、変形量の見積もりに不確定性を生むわけだが、Fig. 8 の左段の状態は、断層活動前の状態が正しく復元されているものとする。堆積直後に地層は水平だったと考えられるので、左列ではそのような姿勢にしてある。露頭全体を1番の岩体とし、その部分部分に2から9までの番号で識別し、それらを9つの変形マーカと見なす。そしてそれらに二次モーメントを使って楕円をフィッティングする。本講座第3回でフィッティングの原理を説明したが、楕円を当てはめる図形は一つ

ながりの(単連結)図形である必要がない。実際、この図の6, 7, 9番のマーカは複数の部分に分かれているが、それらを一体のマーカと見なしているわけである。なお、楕円のフィッティングによく利用される ImageJ は、各単連結(途切れのない一続きの)の図形に一つずつ楕円を当てはめる[URL]。今回の目的では単連結でない図形も扱うので、二次モーメントを計算できるプログラムを作成した。なお、水平方向を楕円の長軸方向を測るときの基準線に選ぶことにする。

4.3 逆解法

N 個の変形マーカについて上記のデータが与えられているとして、データを H^2 上の点の集合に書き直す。変形前後の楕円を表す H^2 上の点をそれぞれ位置ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ とすると、与えられたデータは、 $\mathbf{a}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(N)}$ と $\mathbf{b}^{(1)}, \dots, \mathbf{b}^{(N)}$ というように、 N 対の点の位置である。また、面積の大きなマーカほど残差が小さくなってほしいので、マーカの面積 $A^{(1)}, \dots, A^{(N)}$ をウェイトとして利用することにしよう。Fig. 8 の9つの変形マーカから抽出されたこれらのデータ点を、Fig. 9 に白丸と黒丸で示す。白丸から黒丸への位置の変化を最もよく説明できる双曲的回転 $\mathbf{T}$ を、最小自乗的に決定するわけである。

変形に伴う面積変化を無視するなら、双曲的回転 $\mathbf{T}$ は式(4)のように、3つのパラメータ ψ_r , ψ_s , ρ_s で規定される。そこで $\mathbf{T}(\psi_r, \psi_s, \rho_s)$ と書くことにする。そして H^2 上の任意の2点 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ の間の Lorentz 距離を $d_H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ とすると、与えられたデータについて最適なパラメータ組み合わせは、関数

$$f(\psi_r, \psi_s, \rho_s) \equiv \sum_{k=1}^N A^{(k)} d_H(\mathbf{T}(\psi_r, \psi_s, \rho_s) \mathbf{a}^{(k)}, \mathbf{b}^{(k)})^2$$

を最小にする組み合わせである。これを数値的に解いて最適解が得られるわけである(Yamaji, 2013)。これが、逆解法による変形テンソルの推定手法である。

こうして Fig. 8 の9つの変形マーカから決定された最適解は $\psi_r = 11^\circ$, $\psi_s = -74^\circ$, $\rho_s = 0.85$, すなわち

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0.66 & -0.38 \\ 0.07 & 1.48 \end{pmatrix}$$

であった。歪み楕円のパラメータに換算すると、 $R_s = 2.3$ および $\phi_s = -148^\circ$ である。佐藤ほか(2014)は素朴な図解により、同じ露頭で $R_s \approx 2$ と推定している。ただし彼らは、 $\mathbf{F} = \mathbf{RU}$ としたときの剛体回転成分 $\mathbf{R}$ を評価していない。上記の最適解 $\mathbf{F}$ は2つの実固有値を持つので、変形は sub-simple shear である。そこで、定常流を仮定したときの H^2 上軌道が、上記の最適歪み楕円とともに Fig. 9 に示されている。定常流と見なしたときの運動論的渦度は 0.51 である。結論として Fig. 1 の堆積岩体は、その露頭部分では水平方向にほぼ $1/R_s \approx 0.66$ 倍になったことがわかった。

さて、一様変形には H^2 上の等長変換が対応する(本講座第4回)。つまり、 H^2 上でデータ点間の距離は、 $d_H(\mathbf{a}^{(i)}, \mathbf{a}^{(j)}) = d_H(\mathbf{b}^{(i)}, \mathbf{b}^{(j)})$ というように変化しないはずである。もちろ

Fig. 8. The arrangements of the nine packages of faulted beds in Fig. 1 at their pre- and post-deformations states. The upper right panel (Sato et al., 2014) shows the traces of beds and faults in the entire outcrop in Fig. 1. The beds are assumed to have horizontal attitudes before deformation. Fig. 1 の露頭写真のトレース (右上の絵, Sato et al. 2014) を層理面と断層に沿って部分に分け、断層群の変位と地層全体の傾動による変形の前後の状態をしめした図. 変形前、地層は水平だったと仮定. 最上段が露頭全体で、それ以外はその一部.

ん i と j は 1 から N までの変形マーカーの番号である. しかし実際には一様変形から外れていたり測定誤差を含んでいたりするために、この距離は多少とも変化する. そこで、

$$\varepsilon^{(ij)} = \frac{d_H(\mathbf{b}^{(i)}, \mathbf{b}^{(j)}) - d_H(\mathbf{a}^{(i)}, \mathbf{a}^{(j)})}{d_H(\mathbf{a}^{(i)}, \mathbf{a}^{(j)})}$$

さらに

$$H = \sqrt{\frac{\sum_{i < j}^N [\varepsilon^{(ij)}]^2 A^{(i)} A^{(j)}}{\sum_{i < j}^N A^{(i)} A^{(j)}}}$$

とすると、 H は変形の一様性からのずれを表す指標になる

(Yamaji, 2013). $H = 0$ なら一様変形である. $H = 1$ なら、どのデータ点間距離も 100% 程度の伸縮があって、一様変形とは見なしにくいことを意味する. H は上述の逆解法の適用が妥当かどうかの目安である. Fig. 8 の変形マーカーの場合は $H = 0.37$ であった. この実例では、岩体の部分部分で断層変位量や断層のスペーシングが異なることは非一様変形を端的に示している. しかし、粗視化により一様変形と見なすことで(本講座第 3 回)、岩体の被った変形をごく大雑把に定量化したわけである(脆性変形した岩体の歪みを粗視化を通じて見積もる手法は, Arthaud (1969), Arthaud and Mattauer (1969) を嚆矢とする.).

Fig. 9. Equal-area projection of H^2 for the indicating the non-coaxial deformations of the ellipses fitted to the pre- and post-deformation arrangements of the nine packages in Fig. 8. Arrows depict the theoretical orbits that was calculated from the mean deformation determined in the least-square sense via the method of Yamaji (2013) from the nine couples of the ellipses. The cross with the label 'C' indicates the point that represent a circle. Bold cross indicates the point representing the strain ellipse corresponding to the mean deformation. Fig. 8 の各図に楕円をフィッティングし、Yamaji (2013) の方法でその図の地層群がこうむった非共軸変形を最小自乗的に推定した結果 (H^2 の等積投影). 十字は円 ($R = 1$) に対応する点. ×印は歪み楕円 (左下の絵) に対応した点.

ところで、どのデータ点間でも $\epsilon^{(ij)}$ がゼロに近いと、 H^2 上のデータ点のばらつき具合は変形前後であまり変化しない。 H^2 の等積投影図 (本講座第 4 回) なら、このばらつきの変化が、データ点の分布の広がりの変化として視覚的に表現される。Fig. 9 で等積投影を選んだのはそのためである。

5. 幾何学的形態計測学

歪み解析と似て非なるものに幾何学的形態計測学がある。第 1 節でも述べたように、そこでは物体の形から情報のみを抽出し、複数の物体の形の類似性や形の間の距離を定義する。それらが生物・古生物の形態分類などに利用されている (三中, 1999; 生形, 2005)。例えば Fig. 10a のような幅広の足形と細長い足形の違いを定量化するにはどうするか。親指と小指とかかとを結ぶ三角形を考えると、右足の概形のこの違いを三角形 ABC の形の違いに還元することができる。左が前を向くように足形を回転し、小指とかかとを結ぶ線分 BC が紙面で水平になるように置き、さらにこの線分の長さが 2 になるように三角形を伸縮させると、結局、足形的位置・方向・サイズの情報を捨象して、足形の幅が広いか狭いかという形の情報のみを抽出したことになる。そのうえで、2 つの形が近いか遠いかを定量化する。

そのための Bookstein (1991) の方法を紹介する。ただし、双曲幾何学とのつながりがわかりやすいよう、Bookstein 自身の定式化と変えたところがある。ここでは、三角形 ABC の頂点 B と C をそれぞれ二次元の直交デカルト座標 $O-xy$ の $(-1, 0)$, $(1, 0)$ に置くが、Bookstein は第 1 点を原点に置いている。辺 BC をその位置に置くと、三角形の形の情報が、この座標上における頂点 A の位置によって表現される (Fig. 10b)。点 A が縦軸上にあれば二等辺三角形で、横軸に近ければ扁平な二等辺三角形、横軸からずっと上

にあれば細長い二等辺三角形である。Fig. 9a のように三角形 ABC と足形との対応関係をとるならば、点 A が横軸に近いと狭い足形、横軸から遠いと幅広い足形を表す。こうしてあらゆる右の足形の概形が、横軸より上の点で表現されることになる。点 A が右の方にあると小指より親指が前に出ているが、左の方にあると逆に、小指の方が親指より突き出した足形になる (Fig. 10c)。Bookstein (1991) は点 B, C をそれぞれ $(0, 0)$ と $(0, 1)$ に位置づけているのだが、ここでは H^2 とのつながりを説明しやすくするために、その位置をずらしてある。

さて、頂点 A の座標が三角形の形状情報を表しているの、2 つの三角形の非類似度 (似ていない程度) を、2 つの三角形の頂点 A の位置のあいだの距離で表そうとするのは自然な発想である。しかし、次の例から、ユークリッド距離ではうまくいかないことがわかる。頂点 A が $(0, 1)$ にある三角形は直角二等辺三角形であるが、この点と $(0, 0.01)$ のあいだのユークリッド距離は 1 に近い。しかし、後者の点が表す三角形は、底辺に対して高さが非常に小さな三角形であって、直角二等辺三角形からは非常に異なった形である。ところが $(0, 110)$ と $(0, 111)$ の 2 点が表す 2 つの三角形は、どちらも細長い二等辺三角形で大差がないが、2 点間の距離はやはり 1 である。そこで、2 点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) の間の距離を

$$d = \cosh^{-1} \left[\frac{1 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{2y_1 y_2} \right] \quad (6)$$

と定義するなら (e.g., Ratcliffe, 2006, p.131), $(0, 1)$ と $(0, 0.01)$ の距離は約 4.6, $(0, 110)$ と $(0, 111)$ の距離は 0.01 となって、望ましい結果が得られる。このように距離が定義された $y > 0$ の半空間を、ポアンカレによる双曲幾何学の上半

Fig. 10. Schematic illustrations of the shape analysis of Bookstein. (a) Triangles representing the prints of right feet. (b) Solid circles indicating the points on the Bookstein coordinates that stand for the outlines of right feet without the information of size and direction. (c) Solid circles indicate various shapes of triangles. Booksteinの方法. (a) 右の足形の概形を表す三角形. (b) サイズと方向の情報を捨象した三角形を表すBookstein座標における点(黒丸). (c) 種々の三角形の形を表す点(黒丸).

平面ないし半平面モデルという(中岡, 1993). 2つの三角形がどれだけ異なるかを, この距離によって測ろうというのがBooksteinの発想である. この場合, 測地線は x 軸上に中心を持つ円弧または x 軸に直交する線分である.

いままで双曲幾何学を考えるのに, H^2 を用いてきたが, それは上半平面モデルとどんな関係にあるのだろうか. そもそも双曲幾何学というのは, 曲率が負の一定値を持つ曲面(双曲面)上の幾何学であるが, そのような曲面はユークリッド空間の中に存在しえない. 球面の曲率は球面状の場所によらず一定だが, 曲率値は正である. トランペットの先の朝顔状の部分や鞍型面は負の曲率を持つが, 曲率値は一定ではない. H^2 は回転双曲面であって, ユークリッド空間の中に存在する立体図形である. 非ユークリッド空間の中の立体図形をユークリッド空間に投影した像が H^2 なのである. 地図投影法にゆがみが不可避であるように, H^2 にもゆがみがある. H^2 上の測地線が横たわる平面は, その極 p と直交しているのだが, Fig. 3a でそらが鋭角をなしているのが, ゆがみの一例である. ポアンカレの上半平面もまた, 曲率が負の一定値を持つ曲面をユークリッド空間に射影した像なのである. 投影法によって異なる像になるが, いずれも, 双曲平面上の幾何学を, 実際に絵を描いて考えることができるようにするための手段なのである. それらの像を双曲幾何学のモデルという. H^2 も実はその一つで, 双曲面モデルとよばれている. また, H^2 のノモン投影図(本講座第5回)は, クラインの円板モデルである(中岡, 1993).

同じ双曲平面を表しているのだから, モデル間には対応関

Fig. 11. Schematic illustration of the transformation between the models of hyperbolic geometry. P , P' and P'' represent the corresponding points of the hyperboloid, Klein disk and Poincaré half-plane models. 双曲幾何学のモデル間の対応関係. 双曲面モデル, クラインの円板モデル, ポアンカレの半平面モデルで対応する点が P , P' , P'' .

係がある. それを図示したのが Fig. 11 である(橋本, 2015). H^2 が存在する空間に直交デカルト座標 O -012 を設定し, いつものように H^2 が第0座標軸に対して回転対称であり, H^2 とこの座標軸の交点を C , その座標を $(1, 0, 0)$ とする(Fig. 2). H^2 上の点 P に対応する上半平面の点を P''' とする(Fig. 11). この対応関係のためにまず, P と原点を結ぶ直線と C を通って第12座標平面と平行な平面 CD との交点を P' とする. これは点 P のノモン投影に他ならない. そして, 原点を中心とする単位球に P' から第0座標軸に平行に射影した点を P'' とする. そして P'' と点 $(0, -1, 0)$ を結ぶ直線と第02座標平面との交点が P''' である. すなわち, ポアンカレの半平面は, 第02座標平面の第0座標が正の領域なのである. H^2 と上半平面をこのように対応づけると, 上半平面上の距離(式6)が H^2 上のLonretz距離に一致することが出てくる. 形状解析では方向の情報が捨象されるが, 歪み解析ではそれが捨象されない. それにもかかわらず上記の対応づけができることが, Fig. 9 の三角形の中に描かれた楕円をみればわかるだろう. つまり, 形態解析では任意に選んだ2点間の線分を基準線として, それから測った相対的方向の情報が活用されるからである.

6. 講座あとがき

一昨年から7回にわたって, 歪み解析と変形解析の理論的背景を解説してきた. それを主題とする解説は幾つかあるが, 双曲幾何学を縦糸としたことがこの講座の特徴である. 歪み解析も変形解析も古いテーマであるから当然のことながら, 双曲幾何学の導入で画期的なことがわかるわけではない. それらを鳥瞰するために, 双曲幾何学が理論的な基盤になることを本講座で示してきたのだった. 双曲幾何学の導入により, 歪み解析や変形解析が幾何学の問題になり, 双曲面モデルや H^2 の種々の投影法により, 絵を描いて理論的な考察を進められるようになった.

本講座では, 二次元の歪み解析と変形解析を扱ってきた. しかし三次元の場合, それらに双曲幾何学がどう組み込まれ

るのかは未解決である。塑性力学のほうではすでに Liu らの一連の研究があって、6次元の Minkowski 空間を使って応力と歪みの両方が扱われている(e.g., Liu, 2004)。3次元で $\det \mathbf{F} = 1$ を満たす $\mathbf{F}$ は5自由度を持つので、それらで空間的な第1~5座標を構成し、第0座標を時間的な座標とすることで Minkowski 空間を定義するわけである。

ところで最近の応力解析の理論では、5次元の単位球を応力・歪みを表すパラメータ空間として使うのだが(佐藤ほか, 2017)、それに第0座標を加えることにより6次元 Minkowski 空間を構成し、応力解析と歪み解析を見通すことのできるのではなかろうか。この定式化は、応力解析の理論的研究をしやすくなるのではないかと筆者は予想している。

謝 辞

形態解析については、生形貴男氏との議論が参考になった。石井和彦氏と増田幸治氏には、それぞれ査読者および担当編集委員としてお世話になった。記して感謝の意を表する。

文 献

- Arthaud, F., 1969, Methode de determination graphique des directions de raccourcissement, d'allongement et intermediaire d'une population de failles. *Bull. Soc. Géol. Fr.*, **57**, 729–737.
- Arthaud, F. and Mattauer, M., 1969, Exemples de stylolites d'origine tectonique dans le Languedoc, leurs relations avec la tectonique cassante. *Bull. Soc. Géol. Fr.*, **57**, 738–744.
- Bookstein, F. L., 1991, *Morphometric Tools for Landmark Data: Geometry and Biology*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 435p.
- 橋本義武 (Hashimoto, Y.), 2015, 非ユークリッド幾何と時空 (*Non-Euclidean Geometry and Spacetime*)*. 放送大学教育振興会 (Foundation for the Promotion of the Open University of Japan), 176p.
- ハーシュほか, 桐木 紳・三波篤郎・谷川清隆・辻井正人訳 (Hirsch, M. W., Smale, S. and Devaney, R. L., translated by Kiriki, S., Minami, A., Tanikawa, K. and Tsujii, M.), 2007, 力学系入門: 微分方程式からカオスまで (*Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos*). 共立出版 (Kyoritsu Publ.), 433p.
- Liu, C.-S., 2004, Lie symmetries of finite strain elastic-perfectly plastic models and exactly consistent schemes for numerical integrations. *Int. Jour. Solids Struct.*, **41**, 1823–1853.
- 三中信宏 (Minaka, N.), 1999, 形態測定学 (Morphometrics)*. 棚部一成・森 啓編 (Tanabe, K. and Mori, K., eds.), 古生物の形態と解析 (*Morphology and Morphological Analyses of Fossils*)*, 朝倉書店 (Asakura, Publ.), 61–99.
- 中岡 稔 (Nakaoka, M.), 1993, 双曲幾何学入門: 線形代数の応用 (*Introduction to Hyperbolic Geometry: Application of Linear Algebra*)*. サイエンス社 (Saiensu-sha Co.), 224p.
- Ramberg, H., 1975, Particle paths, displacement and progressive strain applicable to rocks. *Tectonophysics*, **28**, 1–37.
- Ratcliffe, J. G., 2006, *Foundations of Hyperbolic Manifolds, 2nd Ed.* Springer, New York, 779p.
- 佐藤活志・大坪 誠・山路 敦 (Sato, K., Otsubo, M. and Yamaji, A.), 2017, 応力逆解析手法の発展と応用 (Development and applications of stress tensor inversion techniques). 地質雑 (*Jour. Geol. Soc. Japan*), **123**, 391–402.
- 佐藤活志・山路 敦・徳橋秀一 (Sato, K., Yamaji, A. and Tokuhashi, S.), 2014, 房総半島南部の下部鮮新統清澄層を切る脆性小断層群 (Outcrop-scale brittle faults in the Lower Pliocene Kiyosumi Formation, southern Boso Peninsula, central Japan). 地質雑 (*Jour. Geol. Soc. Japan*), **120**, V–VI.
- 生形貴男 (Ubukata, T.), 2005, 現代形態測定学: 化石, 人骨, 石器等のかたちの定量・比較ツール (Modern morphometrics: A tool for analysis of form in paleontology, anthropology and archeology). 第四紀研究 (*Quatern. Res.*), **44**, 297–313.
- 山路 敦 (Yamaji, A.), 2000, 理論テクニクス入門 (*Introduction to Tectonophysics*). 朝倉書店 (Asakura Publ.), 287p.
- Yamaji, A., 2008, Theories of strain analysis from shape fabrics: A perspective using hyperbolic geometry. *Jour. Struct. Geol.*, **30**, 1451–1465.
- Yamaji, A., 2013, Two-dimensional finite deformations evaluated from pre- and post-deformation markers: Application to balanced cross sections. *Jour. Struct. Geol.*, **51**, 144–155.
- 山路 敦 (Yamaji, A.), 2016a, 歪み解析と変形解析の数理: 1. 一樣変形 (Lecture note on the theories of strain and deformation analyses: 1. Homogeneous deformations). 地質雑 (*Jour. Geol. Soc. Japan*), **122**, 275–286.
- 山路 敦 (Yamaji, A.), 2016b, 歪み解析と変形解析の数理: 3. 歪み解析の基礎 (Lecture note on the theories of strain and deformation analyses: 3. Foundations of two-dimensional strain analysis). 地質雑 (*Jour. Geol. Soc. Japan*), **122**, 665–672.
- 山路 敦 (Yamaji, A.), 2017a, 歪み解析と変形解析の数理: 4. 双曲幾何学と Rf/φ 歪み解析 (Lecture note on the theories of strain and deformation analyses: 4. Hyperbolic geometry and Rf/φ strain analysis). 地質雑 (*Jour. Geol. Soc. Japan*), **123**, 31–40.
- 山路 敦 (Yamaji, A.), 2017b, 歪み解析と変形解析の数理: 5. 続 Rf/φ 歪み解析法 (Lecture note on the theories of strain and deformation analyses: 5. Supplements to Rf/φ strain analysis). 地質雑 (*Jour. Geol. Soc. Japan*), **123**, 117–118.
- 山路 敦 (Yamaji, A.), 2018, 歪み解析と変形解析の数理: 6. 累進変形と運動論的渦度解析 (Lecture note on the theories of strain and deformation analyses: 6. Progressive deformation and kinematic vorticity analysis). 地質雑 (*Jour. Geol. Soc. Japan*), **124**, 213–227.
- Zeiditch, M., Swiderski, D. and Sheets, H., 2012, *Geometric Morphometrics for Biologists: A Primer, 2nd Ed.* Academic Press, Oxford, 498p.
- [URL1] <https://imagej.nih.gov/ij/index.html>

* English translation from the original written in Japanese.