表計算ソフトウェアを利用した消光角変化曲線の求め方

Drawing method for variation curves of extinction angle
using spread sheet-type calculation soft wear

高橋 裕平 (Yuhei TAKAHASHI)*

Extinction angle can be calculated with using spherical trigonometry and Biot-Fresnel's law. The variation curves of extinction angle are useful for the determination of twinning laws, estimation of angle between crystallographic axis and optic elastic axis, and analyses of petrofabric. This paper describes how to draw the variation curves of extinction angle using spread sheet-type calculation soft ware in a personal computer.

Keywords: Optics, Extinction angle, Plagioclase, Twinning law

I. まえがき

与えられた結晶方位座標から、薄片上で劈開面などの問題とする切断面(線)に対する消光角の変化曲線を市販の表計算ソフトウェアで求める。斜長石双晶片の消光角変化曲線を求める目的で、既に筆者は本資料の考え方の骨子を示したが、その際、ステレオネットからの読み取り作業などが必要だった(高橋, 2000)。表計算ソフトウェアで三角関数などが与える結果に範囲があり、正負の符号などに注意が必要である。今回はこれらの作業も論理文を使うことで一義的に消光角が求まるようにした。計算の過程をステレオ投影図で表示するようにして理解の一助とした。

消光角の変化曲線の求め方自体は既に確立していて、多くの公表された図面がある(例えば, Suwa *et al.*, 1974; 坪井ら, 1977)。今回あえて表計算ソフトウェアを利用したのは、偏光顕微鏡実習における理論を自習で深める教材としての利用も意図している。なお、筆者は Mac OS 9.1 上で Microsoft 社 Excel98 を使用した。

II. 結晶方位データの入力とステレオ投影

結晶内の諸方向を示すための座標は、一般にステレオ投影面に垂直で互いに直交する大円からの角度で示す。球面投影の方位関係を模式的に Figure 1a に示し、それらをステレオ投影したものを Figure 1b に示す。Figure 1a で T は天頂(Top), C は中心(Center)で, NTS, ETW は投影面に垂直で互いに直交する大円で, Figure 1b の投影面上で

NCS, ECW となる。Figure 1a で任意の方向 P は, NTS からの角度 ϕ と ETW からの角度 λ で示すことができ, Figure 1b のステレオ面上で p として投影される。 ϕ は NTS (Figure 1b で NCS) から E に向かって測るとき正, W に向かって測るとき負, λ は ETW (Figure 1b で ECW) から N に向かい測るとき正, S に向かって測るとき負とする。

消光角変化曲線を求めるためには、光軸、問題とする面

Fig. 1. Schematic stereographic projections for a thin section. (a) Relationship of crystallographic directions. (b) Projection on a stereonet. (c) Basics for understanding stereographic projection points. (d) Stereographic projection at x-y coordinate.

(平成 13 年 1 月 24 日受付, 平成 13 年 7 月 11 日受理)

*産業技術総合研究所札幌北サイト, 〒060-0808 札幌市北区北 8 西 2 合同庁舎

*AIST Sapporo-kita, Kita-8, Nishi-2, Kita-ku, Sapporo 060-0808, Japan E-mail: takahashi.yuh@aist.go.jp

の極, 変化曲線の原点の座標角が必要である。消光位の伸長性を知るために光学的弾性軸 X と Z の位置も必要である。斜長石については, 坪井ら (1977) から, 投影面を結晶軸 c に垂直で (010) を NS 軸方向とした場合の諸方向の座標角を利用できる。座標角で 90° や 0° は, 計算やステレオ投影の都合上 89.999 や 0.001 など近似させる。度で入力した値はラジアンに直しておく。

ある方向 P に座標角 ϕ と λ が与えられているとき, ステレオ投影面上の投影点 p の位置を計算で求めている。Figure 1a で CP を通る投影面に垂直な大円, すなわち T, P を含む大円を考える。球面三角形 TPQ を考えると, $TP = \angle TCP$, $TQ = \lambda$, $QP = \phi$ である。Q の投影点を q とする。大円 PQ と大円 TQ は 90° で交わるから球面三角形 TPQ は $\angle TQP = 90^\circ$ の球面直角三角形である。球面直角三角形の公式から

$$\cos \angle TCP = \cos \phi \cdot \cos \lambda \quad \therefore \angle TCP = \arccos(\cos \phi \cdot \cos \lambda)$$

$$\tan \angle qCp = \tan \phi / \sin \lambda \quad \therefore \angle qCp = \arctan(\tan \phi / \sin \lambda)$$

ステレオ投影面上で基円の半径を 1 とすると, Cp の長さは, $\tan(\angle TCP/2)$ である (Figure 1c)。直交座標で表すと Figure 1d を参照して

$$x = \tan((\arccos(\cos \phi \cdot \cos \lambda))/2) \cdot \sin(\arctan(\tan \phi / \sin \lambda))$$

$$y = \tan((\arccos(\cos \phi \cdot \cos \lambda))/2) \cdot \cos(\arctan(\tan \phi / \sin \lambda))$$

表計算ソフトでは諸関数が与える値の範囲が限られ, 正負が異なることがあるので, 条件文で入力した ϕ と λ の符号と今求めた x と y の符号がそれぞれ同じになるようにする。IF 文でもとの ϕ と x をかけあわせ, 正ならそのまま求めた x を使い, 負ならば x に (-1) を乗じたものを使えばよい。こうしてあらたに得た x と y の座標を直交座標 (散布図) で示すと半径 1 のステレオ投影したことになる (Figure 2a)。投影点の NS 軸からの角度は $\angle qCp = \arctan(\tan \phi / \sin \lambda)$ であるが, $\arctan$ 関数が $-\pi/2$ から $\pi/2$ の範囲しか与えないので ϕ と λ がともに負なら, $\pi - \arctan(\tan \phi / \sin \lambda)$ を, ϕ が正で λ が負ならば $\arctan(\tan \phi / \sin \lambda) + \pi$ を, そうでなければ $\arctan(\tan \phi / \sin \lambda)$ を使うよう

Fig. 2. Examples of stereographic projection. (a) Stereogram, showing the optical orientations of An 50 low-temperature plagioclase after Tsuboi *et al.* (1977). O is $\bar{b}$ axis. H is pole of rhombic section. (b) Stereogram, showing the optical orientations of An 50 low-temperature plagioclase after rotation for matching H on N-S ($\phi=0$). Dashed curve is trace of thin section (rhombic section in this case).

にする。

問題とする面の極 H が NS 軸 (y 軸) 上にのるように今求めた NS 軸となす角度だけ回転する。他の点もこの角度だけ回転する。ある方向 P の天頂からの角度 $\angle TCP$ は変わらない。新たに投影面を回転して NS 軸からの角度が $\angle NCp$ となったとすると, 新しい座標は

$$\phi = \arcsin(\sin \angle NCp \cdot \sin \angle TCP),$$

$$\lambda = \arctan(\cos \angle NCp \cdot \tan \angle TCP)$$

となる。 ϕ と λ の正負は投影点の NS 軸からの角度で知りうる。こうして諸方向の新たな座標角が得られ, 前述と同様に半径 1 の円のステレオ投影を行う (Figure 2b)。

III. 薄片の方位の指定と消光角の計算

薄片 S が問題とする面 H に垂直な場合, 薄片の λ_s は H の λ_h に $\pi/2$ を加減したものである。そのほか, 選択肢としてその面からの角度 (ラジアン) を任意に与えることができるようにしておく。消光角曲線を求めるのに, 既に与えてある原点以外に設定できるようにもしておく利用範囲が広がる。ただし任意の原点であっても λ は薄片のそれと同じで, 指定できるのは ϕ である。原点からの回転角 U を -5° から 185° まで 5° おき程度定めておき, ラジアンに換算する。最終的には 0° から 180° における消光角の変化を求めるが, 後述するように消光角の変化を前後で調べる必要があるので前後の幅をもたせている。この角度に原点の座標角 ϕ を加えたものが薄片の方位 S の ϕ 座標である。このようにして得られた薄片の座標角を (ϕ_s, λ_s) とする。

薄片 S , 問題とする面 H , 2つの光軸 A, B の座標をそれぞれ (ϕ_s, λ_s) , (ϕ_h, λ_h) , (ϕ_A, λ_A) , (ϕ_B, λ_B) とする。坪井 (1959) の 406.2 式から

$$\cos \angle AOH = \sin \phi_A \cdot \sin \phi_h + \cos \phi_A \cdot \cos \phi_h \cdot \cos (\lambda_A - \lambda_h)$$

$$\cos \angle AOS = \sin \phi_A \cdot \sin \phi_s + \cos \phi_A \cdot \cos \phi_s \cdot \cos (\lambda_A - \lambda_s)$$

$$\cos \angle SOH = \sin \phi_s \cdot \sin \phi_h + \cos \phi_s \cdot \cos \phi_h \cdot \cos (\lambda_s - \lambda_h)$$

$$\cos \angle BOH = \sin \phi_B \cdot \sin \phi_h + \cos \phi_B \cdot \cos \phi_h \cdot \cos (\lambda_B - \lambda_h)$$

$$\cos \angle BOS = \sin \phi_B \cdot \sin \phi_s + \cos \phi_B \cdot \cos \phi_s \cdot \cos (\lambda_B - \lambda_s)$$

これらを求めて坪井 (1959) の (406.3) 式から

$$\cos \angle ASH = (\cos \angle AOH - \cos \angle AOS \cdot \cos \angle SOH) / (\sin \angle AOS \cdot \sin \angle SOH)$$

$$\cos \angle BSH = (\cos \angle BOH - \cos \angle BOS \cdot \cos \angle SOH) / (\sin \angle BOS \cdot \sin \angle SOH)$$

すると

$$\angle ASH = \arccos((\cos \angle AOH - \cos \angle AOS \cdot \cos \angle SOH) / (\sin \angle AOS \cdot \sin \angle SOH))$$

$$\angle BSH = \arccos((\cos \angle BOH - \cos \angle BOS \cdot \cos \angle SOH) / (\sin \angle BOS \cdot \sin \angle SOH))$$

以上を原点からの回転角毎に計算する。

通常の表計算ソフトでは $\arccos$ 関数は 0 から π の範囲で値を与える。 $\angle ASH$ と $\angle BSH$ は 0 や π を境にしても連続的に変化するように $\angle ASH$ と $-\angle BSH$ も同時に求め, 条件文をつけて自動的に選択するようにする。例えば, あるセルの $\angle ASH$ が, 前のセルの値 (原点からの角度で 5° 前の

∠ASH) に変化分を加えた値が π より大きくなるか, 変化分を減じた値が 0 より小さくなるかの真偽を問うなどして, ∠ASH か -∠ASH を選ぶ。選択した ∠ASH または -∠ASH と ∠BSH または -∠BSH をそれぞれ α, β とする。以後の計算では度にして用いる。消光角 δ は坪井 (1959) の 406.1 式から $\delta = 90 - (\alpha + \beta)/2$ である。

消光角は消光位の伸長性により 2 つに分けておく。消光角 1 を $\delta, \delta + 180, \delta - 180$, 消光角 2 を $\delta + 90, \delta - 90, \delta + 270, \delta - 270$ とした。これらを原点からの角度を横軸に 0° から 180° とし, 縦軸に消光角 1 のグループか, 2 のグループかを選択して散布図に表示する。諸方位を投影したステレオ図に薄片の方位の大円を加えたもの (Figure 2b) を参照して, 光軸 A と B の間に光学的弾性軸の X があるのか Z があるのかで消光角 1 か 2 かを選ぶ。図の表示範囲を消光角を -90° から 90° の範囲にとり表示すれば通常使われている光学図と同じである。散布図では系列 (消光角) 毎に自動的に異なる記号で表示されるが, 同じ記号に統一して利用してもよい。筆者は確認のため, あえて記号を変えずに表示している。そのかわり消光角が -90° から 90° の角度を示すもの (セル番号) を入力して散布図をなめらかな曲線で描くようにした。

IV. 双晶片の消光角の変化

接合面に垂直な薄片における相接する双晶片の消光角を, 接合面に対称な場合, 接合面上原点からの回転角 $U = 90^\circ$ の軸に対称な場合, 同様に $U = 0^\circ$ (180°) の軸に対称な場合にわけて整理した。なお, 斜長石については, 坪井ら (1977) に示されている投影面を結晶軸 c に垂直で, (010) を NS 軸方向とした場合の諸方向の座標角を利用することを前提とする。坪井ら (1977) では菱形断面の座標角は示されていないが, 定義からその極の ϕ 座標は b 軸の ϕ から 90° 隔たり, λ 座標は b 軸のそれと同じである。

接合面に対称な場合, ある U での結晶の消光角に -1 を乗じたものが相接する結晶片の U での消光角である。斜長石では接合面が (010) ならアルバイト双晶, (001) ならマネバツハ双晶がこの例である。

原点からの回転角度 90° に対称になる場合, ある U で接する結晶の消光角はもとの結晶の $180 - U$ での消光角となる。斜長石で接合面が (010) で $U = 90^\circ$ に結晶軸 c をとるならカールスバッド双晶である。

$U = 0^\circ$ (180°) を対称とする場合, ある U で接する結晶の消光角はもとの結晶の $180 - U$ での消光角に -1 を乗じたものである。接合面が (010) で原点から 90° に結晶軸 c があるとき, アルバイト-カールスバッド双晶である。双晶軸 $b(\bar{b})$ が原点 ($U = 0$) の方向にある場合には, 接合面が菱形断面ならペリクリン双晶, 接合面が (001) ならアクラリン双晶である。例としてペリクリン双晶の消光角変化曲線を

Fig. 3. Variation curves of extinction angles X' of the adjoining twinning lamellae with a rhombic section perpendicular to the thin section for low-temperature plagioclase (An 50) twinned after the pericline law. Thick line, for original crystal, showing extinction angle at rotation angle from $\bar{b}$ axis; thin line, for twinned crystal.

Figure 3 に示した。

V. おわりに

消光角の変化を表計算ソフトで求める得る方法の概略を示した。詳細は小論受理日より少なくとも 1 年間ホームページ (<http://staff.aist.go.jp/takahashi.yuh/>) で公開するので参照願いたい。

小論を草するにあたり, 日本福祉大学の水谷伸治郎教授から菱形断面と b 軸との関係について有益な御助言を頂いた。産業技術総合研究所の宝田晋治博士からは球面三角形の数学的な扱いを御教示いただいた。日本福祉大学学長諏訪兼位教授からは常日頃から双晶の光学的取り扱いについて御指導いただいている。東北大学の工藤康弘教授ならびに匿名の 2 名の査読者から原稿の改良について多大な御教示をいただいた。以上の方々に感謝いたします。

引用文献

- Suwa, K., Mizutani, S. and Tsuzuki, Y. (1974): Proposed optical method of determining the twinning laws of plagioclase. *Memories of Geol. Soc. Japan*, no. 11, 167-250.
- 高橋裕平 (2000): 斜長石双晶識別のための消光角変化曲線—接合面が菱形断面及び (001) の場合—. *地調月報*, **51**, 309-315.
- 坪井誠太郎 (1959): 偏光顕微鏡. pp. 294, 岩波書店, 東京.
- 坪井誠太郎, 水谷伸治郎, 諏訪兼位, 都築芳郎 (1977): 斜長石光学図表. pp. 175, 岩波書店, 東京.