ゴム材料の力学特性同定と FEM 解析への利用

飯 塚 博^{*1}・山 下 義 裕^{*2}

Indentification of Stress-strain Data of Rubber for Finite Element Analysis

Hiroshi Iizuka (Jonan 4-3-16, Yonezawa 992-8510, Japan), Yoshihiro Yamashita (Yasaka-cho 2500, Hikone 522-8523, Japan)

The stress-strain behavior of rubber is non-linear and is usually described using the strain energy density function. From the viewpoint of the input data for finite element analysis (FEA), a number of models have been proposed to describe the behavior. Therefore, it is necessary to understand the feature of the models. Namely, the selection of the models is still a difficult subject when the FEA is performed. In this paper, the authors review the optimum identification of the stress-strain data of rubber for FEA input. This technical note is the summary of the discussion in the sectional meeting "mechanical properties of rubber" in the society of rubber industry, Japan. Ogden and Mooney-Rivlin models guarantee a marvelous expression under sufficient testing data, although they do not give a good description under insufficient testing data. Neo-Hookean model has possibilities to give an acceptable identification result under insufficient testing data, such as only a simple tensile testing data.

Key Words : Finite Element Analysis, Stress-Strain Data, Mooney-Rivlin model, Ogden model, Neo-Hookean model

1. は じ め に

ゴムの材料モデルを考える際には、物理化学的な観点から物性モデルを検討する立場と、材料力学的な観点から弾性モデルを検討する立場がある。本資料は、材料力学的立場からゴムの力学的な特性を表現する手法について取り上げる。

周知のように、ゴムの応力-ひずみ関係は直線状ではなく、ヤング率を用いた線形弾性体としての近似は不可能である。したがって、ヤング率以外のパラメータを用いた特性表現が必要になってくる。通常、その特性はエネルギー密度関数 W ^{1),2)} を用いて記述される。実用上良く使用される表現法に Mooney-Rivlin 則 (1940) や Neo-Hookean 則がある。また、最近では高次の項を用いた Ogden モデル (1972)³⁾

や Arruda-Boyce モデルなどが FEM 解析における材料特性入力に使用されることも多い⁴⁾。

ゴムを含む機械要素を設計する場合、これらのゴム特性表現法のどれを用いて FEM 解析を実施したら良いのだろうか。各種材料試験法とこれら表現法のマッチングはどうか、簡単に実施できる 1 軸伸長試験のデータのみが入手できる場合はどの表現法が妥当なのだろうか。これらに関する知見はゴムの FEM 解析を実施している者にとっては興味深く、また、切実な問題でもある。本資料は、このような要求に答えることを目的とし、ゴム協会研究部会・力学的性質研究分科会の講演会等を通して検討してきた内容をまとめたものである。

本内容は、分科会に参加した複数のベンダーやユーザの現時点における共通した認識である。取り上げたゴム弾性

^{*1}山形大学工学部機械システム工学科 (〒992-8510 米沢市城南 4-3-16)。昭和 55 年秋田大学大学院鉱山学研究科修了。同年、秋田大学鉱山学部勤務。平成 4 年、山形大学工学部へ異動し現在に至る。ゴム協会・力学的性質研究分科会・主査、ベルト伝動技術懇話会・幹事。専門は材料強度学。

^{*2}滋賀県立大学工学部 (〒522-8523 彦根市八坂町 2500)。平成 2 年京都大学大学院工学研究科博士課程学位認定退学。同年、ユニチカ株式会社入社。平成 7 年から滋賀県立大学工学部講師、現在に至る。ゴム協会・力学的性質研究分科会・副主査、専門は高分子・複合材料。

モデルの詳細については既存の優れた論文や解説を参照して頂きたい^{1),2)}。

2. ゴムの力学基礎と材料試験法

2.1 構成式の表示方法

図1にゴムのエネルギー密度関数 W の3次元表示を示す⁵⁾。この関数がわかれば、それを微分することによって応力を求めることができる¹⁾。ひずみエネルギー密度関数の形式としては様々なモデルが提案されている。古くからよく用いられている表現としては以下のものがある¹⁾。

Mooney-Rivlin(3次項)；

$$W = \sum_{i+j=1}^3 C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad (1)$$

Mooney-Rivlin(2項)；

$$W = C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3) \quad (2)$$

(2)式における C_{01} 項のみを用いて特性表示したものがNeo-Hookean則である。また、Ogdenモデル³⁾は

Ogden(3項)；

$$W = \frac{\mu_1}{\alpha_1} (\lambda_1^{\alpha_1} + \lambda_2^{\alpha_2} + \lambda_3^{\alpha_3} - 3) \quad (3)$$

Ogden(6項)；

$$W = \sum_{n=1}^2 \frac{\mu_n}{\alpha_n} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3) \quad (4)$$

のように表示される。ここで λ_i は i 軸方向の伸長比であり、式中の I_i は次式で定義される i 次の主伸長比の不変量である。

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \quad I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \\ I_3 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \end{aligned} \quad (5)$$

また、 C_{10} , C_{01} , α_n , μ_n 等は材料定数であり、実験を実施してこれらの値を決定する。

2.2 試験方法

図1に示した特性曲面を精度良く表現するために、通常、以下に示す3条件下の試験を実施する。すなわち、1軸伸長試験、1軸拘束1軸伸長試験、そして均等2軸伸長試験である^{1,6)}。各試験の図1中における位置を図2に示す。

図1 エネルギー密度関数 W の特性曲面

図1と図2を見比べると、図1の左下領域の急激な特性変化は、均等2軸伸長試験でない測定範囲に入らないことが分かる。したがって、2軸伸長試験はゴムの特性評価には欠かすことのできない試験である。また、図1の特性曲面を推定するに際して、上記3試験が揃えば、かなり広範囲なデータを確保でき、精度の良い特性推定が可能になることも理解できる。

図3にこれら3試験の概略を示す。1軸伸長試験は容易に実施できるが、1軸拘束1軸伸長試験はジグに工夫が必

図2 エネルギー密度関数 W を求める3試験の λ_1 - λ_2 領域図

(a) 1軸伸長試験

(b) 1軸拘束1軸伸長試験

(c) 均等2軸伸長試験

図3 実施した3種類のゴムの力学特性試験

要であり、均等2軸伸長試験は専用の試験装置が必要になる。各試験の境界条件は以下になる。

1) 1軸伸長試験(Simple Tension)

1軸方向に $\lambda_1 = \lambda$ 、2, 3軸方向には変形自由であり、 $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda^{-1/2}$ (同時に $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$)

2) 1軸拘束1軸伸長試験(Pure Shear)

1軸方向に $\lambda_1 = \lambda$ 、2軸方向に $\lambda_2 = 1$ (拘束)、3軸方向には変形自由であり、 $\lambda_3 = \lambda^{-1}$ (同時に $\sigma_3 = 0$)

3) 均等2軸伸長試験(Equi-Biaxial Tension)

1, 2軸方向に $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 、3軸方向に変形自由であり $\lambda_3 = \lambda^{-2}$ (同時に $\sigma_3 = 0$)

3. 試験結果と各モデルを用いた同定結果

実験は純ゴムおよび純ゴムに加硫剤として硫黄1phrを

表1 純ゴムと配合IRゴムにおける特性試験結果

(a) 純ゴム (IR)					
1軸伸張		1軸拘束1軸伸張		均等2軸伸張	
公称ひずみ	公称応力 [MPa]	公称ひずみ	公称応力 [MPa]	公称ひずみ	公称応力 [MPa]
0.00	0.000	0.00	0.000	0.00	0.000
0.04	0.043	0.04	0.058	0.04	0.085
0.06	0.061	0.06	0.083	0.06	0.122
0.08	0.086	0.08	0.113	0.08	0.165
0.10	0.106	0.10	0.137	0.10	0.198
0.12	0.126	0.12	0.161	0.12	0.229
0.14	0.143	0.14	0.184	0.14	0.257
0.16	0.162	0.16	0.205	0.16	0.284
0.20	0.196	0.20	0.245	0.20	0.330
0.24	0.227	0.24	0.282	0.24	0.372
0.30	0.270	0.30	0.334	0.30	0.421
0.60	0.433	0.60	0.512	0.60	0.610
0.90	0.553	0.90	0.628	0.90	0.744
1.20	0.651	1.20	0.724	1.20	0.862
1.50	0.740	1.50	0.809	1.50	0.974
1.80	0.827	1.80	0.887	1.80	1.082
2.10	0.919	2.10	0.959	2.10	1.190

(b) 配合IRゴム					
1軸伸張		1軸拘束1軸伸張		均等2軸伸張	
公称ひずみ	公称応力 [MPa]	公称ひずみ	公称応力 [MPa]	公称ひずみ	公称応力 [MPa]
0.00	0.000	0.00	0.000	0.00	0.000
0.10	0.224	0.10	0.260	0.10	0.324
0.20	0.378	0.20	0.427	0.20	0.520
0.30	0.495	0.30	0.537	0.30	0.624
0.40	0.582	0.40	0.619	0.40	0.708
0.50	0.659	0.50	0.694	0.50	0.797
0.60	0.740	0.60	0.770	0.60	0.892
0.70	0.824	0.70	0.855	0.70	1.012
0.80	0.918	0.80	0.950	0.80	1.184
0.90	1.028	0.90	1.061	0.90	1.448
1.00	1.160	1.00	1.200	1.00	1.848
1.10	1.330	1.10	1.400	1.10	2.324

添加した配合IRゴムを用いて実施した。上記3種類の試験結果を表1に示す。伸長試験におけるひずみ速度は80%/min.である。純ゴムでは大変形域での急激な応力上昇はないが、配合IRゴムにおいてはその挙動が現れてくる。

市販のFEM解析ソフトにはプリポストとしてカーブフィッティング機能が付いていることが多い。また、エネルギー密度関数を表示するモデルとしてMooney-Rivlin, Neo-Hookean, そして, OgdenのモデルがほとんどのFEM解析ソフトに組み込まれている。

本資料では以下に、そのカーブフィッティング機能を用いて、高ひずみ域に応力の立ち上がりが見られている配合IRゴムについて実施した同定結果について示す。カーブフィッティング機能では、表1に示した公称応力-公称ひずみの数値データを用いて、エネルギー密度関数から得られる応力式の係数項を求めている。誤差の最小自乗法を計算して各モデルの係数を同定しても同様の結果が得られる。

3.1 1軸伸長試験データのみを用いた同定結果

図4に、最も簡単に実施できる1軸伸長試験の結果のみを使用して応力-ひずみ特性を同定した結果を示す。すな

図4-1 1軸伸長試験データのみを基にしたNeo-Hookean則による同定結果

図4-2 1軸伸長試験データのみを基にしたMooney-Rivlin (2項)則による同定結果

わち、1軸伸長試験結果を基に特性を同定し、その同定結果を用いて1軸拘束1軸伸長と均等2軸伸長試験の特性を予測している。これによって各モデルの特徴を判断することができる。

図4-1に示したNeo-Hookean則の結果は、高ひずみ域の立ち上がりが表現できず精度はさほど良くない。ただし、低ひずみの領域では全試験条件下の特性はほぼ表現できて

いる。これに対して、図4-2～図4-5に示すその他のモデルを用いた同定においては、極端に試験データから外れる特性表現が含まれるようになる。すなわち、複雑な数式を用いて特性表現するモデルは、1軸伸長試験のデータのみに手元にある場合には使用すべきでないことが判る。

3.2 3試験データに基づく同定結果

図5に、1軸伸長、1軸拘束1軸伸長、および均等2軸伸長試験全ての結果を使用したときの同定結果の比較を示

図4-3 1軸伸長試験データのみを基にしたMooney-Rivlin(3次項)則による同定結果

図5-1 全試験データを基にしたNeo-Hookean則による同定結果

図4-4 1軸伸長試験データのみを基にしたOgden(3項)則による同定結果

図5-2 全試験データを基にしたMooney-Rivlin(2項)則による同定結果

図4-5 1軸伸長試験データのみを基にしたOgden(6項)則による同定結果

図5-3 全試験データを基にしたMooney-Rivlin(3次項)則による同定結果

す。

図5-1に示したNeo-Hookean則では、基になる試験データを増しても、同定精度は図4-1に示した結果と大差ない。

図5-2に示したMooney-Rivlin(2項)則における精度もNeo-Hookean則と大差ない。これに対して、図5-3～図5-5に示した高次項を用いたモデルでは、その精度は格段に向上している。すなわち、十分な実験データを用意

すれば、高次項を含むモデルを用いると、精度の良い特性表現が可能になることがわかる。

3.3 均等2軸伸長試験データに基づく同定結果

図1に示したように、均等2軸伸長試験はゴムの特性を把握するためには欠かせない試験である。そこで、この均等2軸伸長試験データのみを用いたときの同定結果の良否も興味深い。図6に均等2軸伸長試験データのみに基づく各モデルの同定結果を示す。Neo-Hookean則は図4-1や

図5-4 全試験データを基にしたOgden(3項)則による同定結果

図6-2 均等2軸伸長試験データのみを基にしたMooney-Rivlin(2項)則による同定結果

図5-5 全試験データを基にしたOgden(6項)則による同定結果

図6-3 均等2軸伸長試験データのみを基にしたMooney-Rivlin(3項)則による同定結果

図6-1 均等2軸伸長試験データを基にしたNeo-Hookean則による同定結果

図6-4 均等2軸伸長試験データのみを基にしたOgden(3項)則による同定結果

図6-5 均等2軸伸長試験データのみを基にしたOgden (6項)則による同定結果

図5-1に示した結果と大差ない。これに対して、高次項を含むモデルになると、Mooney-Rivlin則よりもOgden則の方が精度よく特性表現できることがわかる。

最近、FEM解析用のカーブフィッティングではOgden則が精度良く特性表現できるという認識があるが、これは、図6-4や図6-5に示したような特徴に関連しているものと思われる。

4. その他のモデル

本資料では詳細は触れないが、市販のFEM解析ソフトにはその他にYeohモデル⁷⁾、Arruda-Boyceモデル⁴⁾、Van der Waalsモデル⁸⁾など多くのモデルが付属しているものもある。Arruda-Boyceモデルは、1軸伸長試験の結果のみを用いて高ひずみ域の挙動まで精度良く表示できるモデルとして最近注目されている。このモデルは、高分子のネットワーク理論から導き出されたものであり、各材料パラメータには夫々物理的意味がある。表1に示した配合IRゴムの実験データを用いて、これらモデルの特徴を確認することができる。

また、解析対象の機械要素によっては20-30%程度の比較的小ひずみ域が重要となる場合もある。このような場合には、高ひずみ域の実験データを含めずに特性を同定すると高精度の同定が可能になる。更に、実験的に簡単に求められるヤング率 E から、

$$C_{10} = E/6 \quad (6)$$

の関係式を用いてNeo-Hookean則の C_{10} を求めることもできる。ゴムの硬度試験の結果から C_{01} を推定する手法もある⁶⁾。Neo-Hookean則に基づく同定精度はそれほど高くないが、大きく外れることもないことから、低ひずみ域で

それほど高精度のFEM解析結果を期待しない時には有効な手法と言うこともできる。

5. ま と め

以上結果を整理すると以下ようになる。

(1) 1軸引張試験データのみを使用する場合には、Neo-Hookean則は低ひずみ領域で他の試験モードに対してもほぼ妥当な表現を与える。均等2軸伸長試験データが利用できる時にはOgden則が良い特性表現を与える。

(2) 多種類の試験データが利用できる場合、Neo-Hookean則の精度はデータ数が増しても向上しない。Mooney-Rivlin則は、2項表現では精度が上らないが、3次の不変量まで含めた表現にすると精度が高くなる。Ogden則の精度もかなり良い。

(3) 高次項を含むその他のモデルにおいても、多くの試験データを利用できる場合には精度の良い表現が期待できる。

謝辞；本内容は、平成15年10月に開催したゴム協会分科会の内容を、講師の了解を得てまとめたものである。当日の講師は、ABAQUS Inc. 大阪支社・片山正孝氏、MSC-Software 大阪支店・石川覚志氏、ニュートンワークス・山本千秋氏、そして本分科会メンバーである横浜ゴム・小石正隆氏、メカニカルデザイン・永田孝弘氏である。各氏には本資料の投稿に際しても格段の支援を頂いた。謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) Fukahori, Y.: *Kobunshi No Rikigaku*, p.31, Gihodo-syuppan (2000)
- 2) Ogden, R.W.: *Non-Linear ELASTIC Deformations*, Dover Pubns., (1997)
- 3) Ogden, R.W.: *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 326, 565 (1972)
- 4) Arruda, M., Boyce, M.C.: *J. Mech. Phys. Solids*, **41**-2, 389 (1993)
- 5) Mech D & A Ed.: *Mech D & A News*, 99-4 (1999)
- 6) Nippon Gomu Kyokai Ed.: *Gomu Shikhenho*, p.248 (1988)
- 7) Yeoh, O.H.: *Rubber Chem. Technol.*, **63**, 792 (1991)
- 8) Kilian, H.G., Schenk, H., Wolff, S.: *Colloid. Polym. Sci.*, **265**-5, 410 (1987)

日本語表記参考文献

- 1) 深堀美英：高分子の力学，p.31 技報堂出版，(2000)
- 5) 株メカニカルデザイン：Mech D & A News, 99-4 (1999)
- 6) 日本ゴム協会：ゴム試験法，p.248, (1988)

*

*

*

*

*