ゴムのダメージモデルの数値計算手法

石 川 覚 志^{*1}・永 田 孝 弘^{*2}

Numerical Solution Methods for the Elastometric Damage Model

Satoshi ISHIKAWA^{*1}, Takahiro NAGATA^{*2} (^{*1}; Mechanical Design & Analysis Corporation, Nagoya Office, Nishiki Chuo Building 8F, 3-5-7 Nishiki, Naka-ku, Nagoya 460-0003, Japan, ^{*2}; Mechanical Design & Analysis Corporation, AXIS Chofu 2F, 1-40-2 Fuda, Chofu, Tokyo 182-0024, Japan)

Many rubber-like materials consist of a cross-linked elastomers substance with a distribution of small carbon particles as fillers. A piece of filler loaded rubber subjected to a series of loadings typically displays pronounced stress softening associated with damage. This stress softening phenomenon is referred to as the Mullins effect. The effects of strain history on the stresses and the formulation of constitutive models for filled and unfilled elastomers have been a particular focus of attention during the last few years. In this general remark, some representative damage functions are compared and two examples of permanent set are showed with maximal use of user-subroutine.

Key Words : Mullins Effect, Stress Softening, Pseudo Elastic Model, Permanent Set

1. 緒 言

ゴム材料に対して引張側もしくは圧縮側に繰り返し負荷を与えた場合、いわゆる Mullins 効果といわれるダメージの影響が見られる。

ヒステリシスを伴うダメージの要因となる主要なメカニズムは以下のように整理できる。

- 応力軟化
- 内部摩擦
- ひずみに誘起される結晶化現象
- 構造的な破壊
- 領域変形の影響

この物理現象を有限要素法で取り扱うには、超弾性体の構成則を負荷時と除荷時で異なる則を使用することで表現できる。これまでに様々な研究者による定式化が考案されている。本稿では Mullins 効果に関するモデル化とその数

値計算手法の分野における各種ダメージ関数とその違いについて説明する。なお、現行の汎用有限要素法コードでは扱いきれない超弾性体の永久ひずみをユーザーサブルーチンで取り扱った事例を示す。

2. Simo¹⁾ によるダメージモデル

Simo は本来(ダメージの影響を考慮しない)のひずみエネルギー関数にダメージの影響を表現する関数を掛け合わせることでダメージを受けた材料の接線剛性の寄与率を表現した。

$$W = W(\mathbf{C}, \Xi) = g(\Xi) W_0(\mathbf{C}). \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{C}$ は右コーシーグリーンテンソル、 Ξ はダメージパラメータ、 $g(\Xi) \in [0, 1]$ はダメージ関数、 $W_0(\mathbf{C})$ は本来のひずみエネルギー関数である。

ひずみエネルギー関数を用いてグリーンラグランジェひ

^{*1}(株)メカニカルデザイン名古屋支社(〒460-0003 名古屋市中区錦3-5-27 錦中央ビル8階)名古屋支社長。1992年日本マーク(株)入社、1999年合併吸収によりエムエスシーソフトウェア(株)勤務、2006年4月より現職。現在に至る。専門分野は非線形構造解析。日本ゴム協会、日本材料学会、日本機械学会会員。

^{*2}(株)メカニカルデザイン(〒182-0036 調布市布田1-40-2 アクシス調布2階)構造解析課。1993年、熊本大学工学部機械工学科卒業。同年、京セラ(株)入社、1998年、(株)メカニカル・デザイン・アンド・アナリシス(現メカニカルデザイン)入社、現在に至る。専門分野は非線形構造解析。日本ゴム協会、日本材料学会、溶接学会、エレクトロニクス実装学会会員。

ずみ $\mathbf{E}$ と第2ピオラキルヒホッフ応力 $\mathbf{S}$ の関係は

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} = 2 \frac{\partial W(\mathbf{C}, \Xi)}{\partial \mathbf{C}} = g(\Xi) \cdot 2 \frac{\partial W_0(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}}, \quad (2)$$

であり、通常の応力にダメージ関数を乗じた値となる。

この定式化においてSimoはダメージの具体的な関数として次を提唱した。

$$\Xi = \max_{s \in (-\infty, t]} \sqrt{2W_0(\mathbf{E}(s))}, \quad (3)$$

$$g(x) = \beta + (1 - \beta) \frac{1 - \exp(-x/\alpha)}{x/\alpha}. \quad (4)$$

式(3)中の $s \in (-\infty, t]$ で示されるようにダメージパラメータは過去から現在までに受けた変形によるひずみエネルギーの最大値が取られる。そのパラメータを変数としてダメージ関数は指数関数を用いた式(4)となる。ここで α は緩和係数であり、 β は漸近値である。加えられた最大ひずみが大きいほど、剛性低下も大きくなる

ひずみ空間でのダメージの判定は次式で行われる。

$$\phi(\mathbf{C}, \Xi) = \sqrt{2W_0(\mathbf{E}(s))} - \Xi \leq 0. \quad (5)$$

Figure 1に示すように $\phi(\mathbf{C}, \Xi) = 0$ はダメージ曲面を表し、ダメージ曲面での法線ベクトル $\mathbf{N} = \frac{\partial \phi(\mathbf{C}, \Xi)}{\partial \mathbf{C}}$ との関係から

$$\phi = 0 \quad \text{and} \quad \begin{cases} \mathbf{N} : \dot{\mathbf{E}} < 0, & \text{unloading (除荷)} \\ \mathbf{N} : \dot{\mathbf{E}} = 0, & \text{neutral (中立)} \\ \mathbf{N} : \dot{\mathbf{E}} > 0, & \text{loading (負荷)} \end{cases} \quad (6)$$

の判定式が得られる。

最終的にダメージを考慮した速度形式での応力とひずみの関係は接線係数より

$$\dot{\mathbf{S}} = \begin{cases} \left[g(\Xi) \frac{\partial^2 W_0}{\partial \mathbf{E}^2} + g'(\Xi) \frac{\partial W_0}{\partial \mathbf{E}} \otimes \frac{\partial W_0}{\partial \mathbf{E}} \right] : \dot{\mathbf{E}}, & \text{if } \phi = 0 \text{ and } \mathbf{N} : \dot{\mathbf{E}} > 0 \\ g(\Xi) \frac{\partial^2 W_0}{\partial \mathbf{E}^2} : \dot{\mathbf{E}}, & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (7a, b)$$

Figure 1 Damage surface on the principal strain space

となる。ここで $g'(\Xi) = dg/d\Xi$ であり、式(7a)中での $\partial W_0 / \partial \mathbf{E}$ つまり今まで受けた応力の2乗にダメージ関数の微分係数 $g'(\Xi)$ を乗じた項が接線係数に加えられる。これは弾塑性計算に現れる塑性パラメータと同等の挙動を示すので、負荷中に与えられるダメージの影響による剛性低下を表現できる。しかしながらダメージを考慮しない本来のひずみエネルギー関数を同定するのが困難であることが弱点といえる。

3. 不連続・連続ダメージモデル

Miehe²⁾は先のSimoによるダメージモデルを拡張し、これまでに受けた負荷の最大値(不連続ダメージ)と履歴(連続ダメージ)の二つのタイプに区別してダメージ関数を表現した。

$$\alpha(t) = \max_{s \in [0, t]} W(s), \quad \beta(t) = \int_0^t |\dot{W}(s)| ds, \quad (8a, b)$$

$$\hat{d}_\alpha(\alpha) = \hat{d}_\alpha \left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{\eta_\alpha}\right) \right], \quad \hat{d}_\beta(\beta) = \hat{d}_\beta \left[1 - \exp\left(-\frac{\beta}{\eta_\beta}\right) \right], \quad (9a, b)$$

$$d = \hat{d}_\alpha(\alpha) + \hat{d}_\beta(\beta). \quad (10)$$

ここで α はSimoによる定義と同等でこれまでに受けた負荷による最大のひずみエネルギー値をダメージパラメータとして扱われる。一方 β は追加項であり、除荷の最中にも積算されるダメージパラメータとして扱われる。これらの二つのパラメータからダメージ関数が定義され、Simoと同様の数値計算処理がなされる。 α は不連続ダメージ、 β は連続ダメージとしての特徴をもつ。追加された連続ダメージ関数を用いることで一定のひずみサイクルにおける摩耗現象などのシミュレーションを行うことが可能となる。しかしながら、Simoのダメージモデルと同様に本来のひずみエネルギー関数を同定する作業が難しい。 $\hat{d}$ は最大のダメージ率であり無次元数となる。 η はダメージの飽和状態を表す指標であり、応力と同じ次元となる。

Ogden体のひずみエネルギー関数³⁾

$$W = \sum_{n=1}^3 \frac{\mu_n}{\alpha_n} \left[(\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n}) - 3 \right], \quad (11)$$

において、各定数を

$$\mu_1 = 0.62999, \quad \mu_2 = 1.193 \times 10^{-3}, \quad \mu_3 = -1.00133 \times 10^{-2}, \\ \alpha_1 = 1.3, \quad \alpha_2 = 5.0, \quad \alpha_3 = -2.0, \quad (12)$$

とし、連続・不連続ダメージのパラメータには

$$\hat{d}_\alpha = \hat{d}_\beta = 0.4, \quad \eta_\alpha = \eta_\beta = 4.0, \quad (13)$$

を与え、純せん断試験を模擬した解析結果をFigure 2に示す。連続ダメージモデルでは除荷の過程および再負荷の過程においてもダメージによる剛性低下の影響を見ることが

Figure 2 Pure shear test for Ogden material with damage. Comparison of continuous and discontinuous damage evolution. One solid line is continuous damage model, other dashed line is discontinuous damage model, the other dotted line is no damage model.

ができる。

4. Pseudo elastic modelによるダメージモデル

一方、別の概念によるゴムのダメージモデルの数式化がある。生体材料では超弾性体であるが、負荷時と除荷時で応力ひずみ挙動が異なる材料が多い。このヒステリシスをもつ材料モデルをダメージという概念はもたずに行きと帰り異なる構成則をもつモデルとしてFung⁴⁾により提案されたのがPseudo elastic modelである。

OgdenとRoxburgh⁵⁾がPseudo elastic modelの概念を用いて考案したダメージモデルのひずみエネルギー関数を以下に示す。

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \eta) = \eta \tilde{W}(\lambda_1, \lambda_2) + \phi(\eta) \quad (14)$$

$$\eta = 1 - \frac{1}{r} \operatorname{erf} \left[\frac{1}{m} (W_m - \tilde{W}(\lambda_1, \lambda_2)) \right], \quad (15)$$

$$\phi(\eta) = \int_1^\eta f(\eta) d\eta + (1-\eta) W_m. \quad (16)$$

ここで、 λ_1, λ_2 は主伸張比、 $\tilde{W}(\lambda_1, \lambda_2)$ は本来のひずみエネルギー関数、 η はダメージパラメータ、 W_m はひずみ履歴の最大値、 $\phi(\eta)$ はダメージ関数、 r, m は材料定数となる。

このモデルでは数値計算上、負荷時において剛性低下をまねかないので、本来のひずみエネルギー関数の同定が通常のカーブフィット等で簡単に得られる点が長所となる。言い換えれば物理的にはダメージを受けているにせよ、数値計算的にはダメージレスのエネルギー関数を使用できる点が長所となる。無次元数 r は初期のひずみエネルギー関数に対する減少率であり、 m はひずみエネルギーと同じ単位をもち、変形量に対するダメージの寄与率を表す。

(15)

Figure 3 Mullins effect by Ogden & Roxburgh model. Solid line is numerical results. Circle plots are experimental data obtained from Mullins & Tobin (1957).

Mullins と Tobin⁶⁾が計測したデータに対して、式(11)のOgden体のひずみエネルギー関数において

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 8.00, \quad \mu_2 = 0.76, \quad \mu_3 = -4.50, \\ \alpha_1 &= 1.25, \quad \alpha_2 = 4.0, \quad \alpha_3 = -2.0, \end{aligned} \quad (17)$$

とし、ダメージパラメータを $r = 2.104$, $m = 22.45$ の値を用いて単軸引張状態で繰り返し負荷を与えた解析結果をFigure 3に示す。実測値に対して良好な数値解を得られている。

5. 永久ひずみの取り扱い

これまでに示したダメージモデルではダメージにより応力ひずみ線図がヒステリシスを描く挙動(いわゆる理想的なMullins効果)をシミュレーションできる。しかしながら、数学的には超弾性体と位置づけられるゴム材料に繰り返し負荷を与えると、物理的には永久ひずみを伴う挙動が見られる。事実MullinsとTobinが計測したデータにおいても無視できない程度の永久ひずみが存在している。この永久ひずみを有限要素法に組み込んだ例を以下に示す。

5.1 伸張比に基づくモデル

伸張比をパラメータとして永久ひずみを表現するためにHolzapfelとOgden⁷⁾は次の構成則を考案した。

$$\begin{aligned} W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ = \tilde{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + \Omega(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3). \end{aligned} \quad (18)$$

ここで、 ξ_1, ξ_2, ξ_3 は主伸張比に対応するダメージ変数であり、関数 Ω はダメージによる永久ひずみを表すための追加関数である。それぞれ、

$$\xi_a = \frac{1}{c} (\lambda_a - \bar{\lambda}_a), \quad (19)$$

$$\Omega = \sum_{a=1}^3 \left[\xi_a (\lambda_a - \bar{\lambda}_a) + \phi(\xi_a) \right], \quad (20)$$

Figure 4 Simple tension loading/unloading curves. Solid line is Cauchy stress against the principle stretch, dashed line is nominal stress.

であり、 $\bar{\lambda}_a$ はそれまでのひずみサイクルにおける各軸方向での最大の主伸張比、 c は定数となる。

$\phi(\xi_a)$ はダメージ関数である。すなわち、主軸方向の最大伸張比に依存したダメージ変数を永久ひずみとして取り扱っていることが理解できる。

式(11)のOgden体のひずみエネルギー関数において

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 6.3 \times 10^5, & \mu_2 &= 0.012 \times 10^5, & \mu_3 &= -0.1 \times 10^5, \\ \alpha_1 &= 1.3, & \alpha_2 &= 5.0, & \alpha_3 &= -2.0, \end{aligned} \quad (21)$$

とし、ダメージパラメータを $C = 10^{-6}$ として、単軸引張状態で繰り返し負荷を与えた結果をFigure 4に示す。除荷後に大きな永久ひずみが残っていることが確認できる。このモデルでは応力軟化を考慮しないが、主軸方向の最大伸張比に依存したダメージを永久ひずみとして取り扱うことができる。

5.2 エネルギーに基づくモデル

DorfmannとOgden⁸⁾は4章で示したPseudo elastic modelによるダメージモデルに追加のエネルギー関数を寄与させることで応力軟化と永久ひずみの2つの挙動を同時に表現した。

$$\begin{aligned} W(\lambda_1, \lambda_2, \eta_1, \eta_2) &= \eta_1 \tilde{W}(\lambda_1, \lambda_2) \\ &+ (1 - \eta_2) N(\lambda_1, \lambda_2) + \phi(\eta_1, \eta_2), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\eta_1 = 1 - \frac{1}{r} \tanh \left[\frac{W_m - \tilde{W}(\lambda_1, \lambda_2)}{\mu m} \right], \quad (23)$$

$$\eta_2 = \tanh \left[\left(\frac{\tilde{W}(\lambda_1, \lambda_2)}{W_m} \right)^{\alpha(W_m)} \right] / \tanh(1.0). \quad (24)$$

式(23)の η_1 は式(15)と等価であり、応力軟化のダメージパラメータを表す。一方、新たに追加された式(24)の η_2 は永久ひずみのダメージパラメータであり、指数部は

$$\alpha(W_m) = 0.3 + 0.16 \frac{W_m}{\mu} \quad (25)$$

で与えられ、ひずみエネルギーの最大履歴に線形に依存す

る。ここで μ は初期のせん断剛性でありOgden体では

$$\mu = \sum_{i=1}^N \mu_i \alpha_i, \quad (26)$$

で与えられる。

永久ひずみを表現するための追加関数 N にはNeo-Hooke体のひずみエネルギー関数を修正した

$$N(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{1}{2} \left[v_1 (\lambda_1^2 - 1) + v_2 (\lambda_2^2 - 1) + v_3 (\lambda_3^2 - 1) \right], \quad (27)$$

が用いられる。単軸状態であれば

$$N(\lambda) = \frac{1}{2} \left[v_1 (\lambda^2 - 1) + (v_2 + v_3) (\lambda^{-1} - 1) \right], \quad (28)$$

と簡略化でき、各変数は

$$v_1 = 0.4 \mu \left[1 - \frac{1}{3.5} \tanh \left(\frac{\lambda_m - 1}{0.1} \right) \right], \quad (29)$$

$$v_2 = v_3 = 0.4 \mu \quad (30)$$

が用いられている。通常のNeo-Hooke体のひずみエネルギー関数では $v_1 = v_2 = v_3$ となるが、修正モデルでは軸方向にのみ小さめのせん断剛性が取られることになる。式(29)にあるように軸方向のパラメータはそれまでのひずみサイクルにおける最大伸張比に依存する。式(11)のOgden体のひずみエネルギー関数において

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -1.528380, & \mu_2 &= 0.222564, & \mu_3 &= -1.13418 \times 10^{-3}, \\ \alpha_1 &= -1.011467, & \alpha_2 &= 4.2047799, & \alpha_3 &= -4.398598, \end{aligned} \quad (31)$$

とし、応力軟化のダメージパラメータを $r = 1.25$, $m = 0.965$ として、単軸状態で繰り返し負荷を与えた解析結果をFigure 5に示す。応力軟化と永久ひずみの2つの作用を見ることができる。

Figure 5 Numerical results of Permanent set and stress softening.

6. ま と め

有限要素法でゴムのダメージモデルを取り扱う数値計算手法を紹介した。Mullins効果を取り扱うにはOgdenスタイルのPseudo elastic modelを使用すればダメージを受けない本来のひずみエネルギー関数を同定することが簡易である。しかしながら、ダメージのクライテリアとしてスカラー量であるひずみエネルギーを用いているためダメージの異方性を考慮することができない。例えば、最初にX方向の負荷後に除荷し、その次にY方向に負荷するような場合を考えると、Y方向の負荷は一回目であるにも関わらず、ダメージを受けた結果となる。このような異方性の効果や大ひずみ粘弾性との組み合わせを考慮したモデルについてはヨーロッパを中心として盛んに研究されている。

また、現状の汎用有限要素法コードでは超弾性体に対する永久ひずみの取り扱いが標準で用意されておらず、ユーザーサブルーチンを駆使する必要がある。今後この領域についての整備も望まれる。

References

- 1) Simo, J.C.: *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **60**, 153 (1987)
- 2) Miehe, C.: *Eur. J. Mech., A/Solids*, **14**, 697 (1995)
- 3) Ogden, R.W.: *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A**, **326**, 565 (1972)
- 4) Fung, Y.C.: "Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues(2nd ed)", Springer-Verlag, NewYork. p.294 (1993)
- 5) Ogden, R.W., Roxburgh, D.G.: *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A**, **455**, 2861 (1999)
- 6) Mullins, L., Tobin, N.R.: *Rubber Chem. Technol.*, **30**, 555 (1957)
- 7) Holzapfel, G.A., Ogden, R.W., ECCMR. Proceedings of Constitutive Models for Rubber, p.189 (1999)
- 8) Dorfmann, A., Ogden, R.W.: *Int. J. Solids Struct.*, **41**, 1855 (2004)

*

*

*

*

*

本会発行出版物ご案内

ゴ ム 用 語 辞 典

B 6 版 400頁
(1997.10 発行)

定 価	4,725円(税込)
会員価格	4,252円(税込)
送 料	450円

ゴム産業に係わる技術用語、製品用語を幅広く収録したものです。収録用語約4,500語。

* お申込の場合は、必要事項(送付先住所、勤務先、氏名、電話番号など)をご記入のうえ、FAXして下さい。

社団法人 日本ゴム協会 図書係あて
FAX 03(3401) 4143