最適ポートフォリオ決定問題向け二次計画法の適用方式

正員 川本 茂* 非正員 高元 政典*
正員 小林 康弘*

Application's Method of Quadratic Programming for Optimization of Portfolio Selection

Shigeru Kawamoto*, Member, Masanori Takamoto*, Non-Member, Yasuhiro Kobayashi*, Member

Investors or fund-managers face with optimization of portfolio selection, which means that determine the kind and the quantity of investment among several brands. We have developed a method to obtain optimal stock's portfolio more rapidly from twice to three times than conventional method with efficient universal optimization.

The method is characterized by quadratic matrix of utility function and constrained matrices divided into several sub-matrices by focusing on structure of these matrices.

キーワード：最適ポートフォリオ決定，株式リスク管理システム，マルチファクタモデル，二次計画法，主双対内点法

Keywords: optimization of portfolio, stock's risk-management system, multi-factor model, quadratic programming, primal-dual interior point method

1. はじめに

資産投資に関する意思決定にあたっては，内外株式および内外債券等の投資対象の組合せ比率を決定する第一の段階（アセットアロケーション）と，各々の投資対象において，個別の最適な組合せを決定する第二の段階を経ることが多い。最適ポートフォリオ決定問題は，一般に，第二の段階を指し，投資家の効用が最適となるように，投資を行う対象およびその投資割合を決定する問題を意味する。本研究では，投資を行う対象として個別の株式を取り扱うものとする。

最適ポートフォリオ決定問題に対しては，マーコビッツによって1959年に提唱された平均分散モデルによるアプローチが最初である。しかし，平均分散モデルは個別の株式における収益の相関を示す相関行列の要素が密であるため，パラメータの予測および最適化計算に多大な時間がかかるという実用上の問題があった。そこで，個別の株式の収益率を単一のファクタで表現するシングルファクタモデル，さらに個別の株式における収益率の予測精度を向上させるために，収益率を複数のファクタで表現するマルチファクタモデルなどが提唱されるに至った⁽¹⁾⁽²⁾。本研究において取り扱う最適ポートフォリオ決定問題は，マルチファク

タモデルに準拠するものとする。

図1に示すように，最適なポートフォリオを決定するプロセスは，(a) 過去の実績データ等から収益の期待値，収益に影響するリスクの要因等のパラメータを推定して，リスクと収益率のトレードオフを定式化するプロセス，(b) 定式化された最適化問題を解くことによって最適なポートフォリオを計算するプロセス，(c) 得られたポートフォリオのリスク要因を分析するプロセスに大別される。図1に示すように，最適化手法の適用は必ずしも一回に限定されるものではなく，ポートフォリオの質を向上させるべく，数回以上繰り返して最適化手法が適用されるのが一般的である。

本研究では，(b)のプロセスを対象とし，最適ポートフォリオ決定問題向けの高速な最適化手法を構築することにより，最適なポートフォリオの作成支援を目的とする。最適化手法に関しては，線形計画問題に対する単体法および二次計画問題に対する有効制約法等が従来の方法として用いられてきたが，1984年に線形計画問題に対する内点法の一つである射影変換法がカーマーカーによって提案されたことを契機として，主双対内点法，バリエーション法，アフィン変換法などの内点法が開発されている⁽³⁾。内点法は，変数が多くなっても反復回数が高々数十回であることが経験的に知られているために，変数の規模が大規模で係数行列が比較的疎である行列である問題において，比較的高速な解法であるとされている。文献(3)にも汎用手法としての内点

* (株)日立製作所日立研究所
〒319-1292 茨城県日立市大みか町七丁目1-1
Hitachi Research Labs., Hitachi, Ltd.
1-1, Omika-cho 7-chome, Hitachi-shi, Ibaraki-ken, 319-1292

図1 最適ポートフォリオ作成の概要

Fig. 1. General flow of portfolio optimization.

法的一端が紹介されている。また、一般的な疎行列における内点法の研究は文献(4)、電力分野における内点法の適用事例が文献(5)(6)などで報告されている。金融工学の分野においても、多期間の資産配分問題への主双対内点法の適用事例などが文献(7)～(9)で発表されている。

本研究においては、最適ポートフォリオ決定問題における最適化問題の構造を利用することにより、汎用手法を適用した場合よりも更なる高速化が実現可能であると考えた。具体的には、最適化計算の高速化を実現できれば最適ポートフォリオの作成が効率的に実施されることに着目して、最適ポートフォリオ決定問題特有の係数行列の構造に特化した最適化アルゴリズムを確立した。さらに、国内全株式および東証一部上場株式を対象とした大規模な最適ポートフォリオ決定問題を例題として提案手法の検証を実施したので、以下に報告する。

2. 最適ポートフォリオ決定の高速化

〈2.1〉 高速化のアプローチ 最適ポートフォリオ決定問題において、高速化の手段としてはハードおよびソフト両面からのアプローチが考えられる。表1にハード面からの高速化のアプローチに関して整理する。

表1に示すように、最適化計算の高速性に関してはワークステーションあるいは大型計算機などによる方法がパソコンによる方法よりも優位にあるものの、価格あるいはユーザの操作性に関しては劣位にある。特に、ユーザにとっては価格および操作性における優位性の方が重要である。

表1 最適ポートフォリオ決定問題における高速化のアプローチ（ハードウェア）

Table 1. Several approaches from hardware for portfolio optimization.

項目	価格	操作性	高速化
PC	◎	◎	○
WS, HPC 等	△～×	△	◎

表2 最適ポートフォリオ決定問題における高速化のアプローチ（ソフトウェア）

Table 2. Several Approaches from software for portfolio optimization.

項目	高速性	操作性	他分野への適用性
汎用手法	○	○	○
特化手法(*)	◎	◎	×

(*)特化手法は、モデルの特徴を反映した手法を示す

また、近年のパソコンにおける著しい性能向上により、高速演算による劣位は急速に改善されている。このようなことから、パソコンによる最適ポートフォリオ決定の実施が必須になっている。

ソフトウェアに関しては、前章でも述べた通り、最適ポートフォリオ決定問題におけるモデルの改良および最適化手法におけるアルゴリズムの改良による高速化が指向されている。

表2に示したように、汎用手法では二次計画問題に定式化されればポートフォリオ決定問題以外の対象への適用が可能である。しかし、汎用手法では、最適ポートフォリオ決定問題におけるモデルの特徴を十分に反映していない。このため、最適ポートフォリオ決定問題に適用した場合、効率的でないと考えられる。そのため、本研究においては、最適ポートフォリオ決定問題に特化したアルゴリズムの構築によって最適化処理に要する時間を削減し、最適なポートフォリオの決定を高速化することを目的とする。

次に、最適ポートフォリオ決定問題のモデルとして、最適ポートフォリオ決定問題の開祖といべき平均分散モデル、および平均分散モデルの改良型であり、本研究で対象としているマルチファクタモデルを取り上げて説明する。

〈2.2〉 平均分散モデル 平均分散モデルは、リターンを所定値に固定した場合に、分散を最小化するポートフォリオ(図2に示す有効フロンティア曲線AB上の点において、リターンを所定値 ρ にしたときの点Cに対応)を求めるモデルであり、銘柄数をNとすると、以下の二次計画問題に定式化される⁽¹⁾⁽²⁾。

$$\text{最小化: } \sigma_p^2 = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sigma_{jk} * x_j * x_k \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{制約式: } \sum_{j=1}^N x_j = 1 \quad (\text{投資比率の総和が1}) \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$\sum_{j=1}^N x_j * r_j = \rho \text{ (収益率の期待値制約)} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$x_j \geq 0 \text{ (非負制約, 空売り不可の場合)} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ただし、平均分散モデルにおいては、国内の全株式を投資対象とする場合には、銘柄数は三千数百に上り、その結果として、目的関数の二次係数 σ_{jk} の個数は、数百万個になる。このため、二次計画問題への定式化と二次計画問題の求解に多大な時間を要する。さらに制約条件として、個々の銘柄への投資比率制約（上下限）、特定の業種（または業種群）への投資比率制約などを考慮した場合には、計算上の困難は更に増幅される。

このような状況の中で、個別銘柄の収益率の期待値等におけるパラメータの推定精度を向上させること、さらに計算上の困難を克服することなどを目的として改良されたのがマルチファクタモデル⁽¹⁾⁽²⁾である。

〈2・3〉 マルチファクタモデル マルチファクタモデルにおいては、収益率 R_j を複数のファクタ変数である F_k および確率変数 ε_j を用いて、

$$R_j = \alpha_j + \sum_{k=1}^K \beta_{jk} * F_k + \varepsilon_j \quad (\varepsilon_j \in N(0, \sigma_j^2)) \quad \dots\dots\dots (5)$$

と表現する。さらに確率変数 ε_i および ε_j ($i \neq j$) が互いに独立であると考えた場合、 F_r と F_s の共分散 f_{rs} を用いて σ_{jk} を、

$$\begin{aligned} \sigma_{jk} &= E[(R_j - E[R_j]) (R_k - E[R_k])] \\ &= \sigma_j^2 + \sum_{r=1}^K \sum_{s=1}^K f_{rs} * \beta_{jr} * \beta_{ks} \quad (j=k \text{ のとき}), \\ &= \sum_{r=1}^K \sum_{s=1}^K f_{rs} * \beta_{jr} * \beta_{ks} \quad (j \neq k \text{ のとき}) \quad \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

と表現できるため、平均分散モデル(1)～(4)は、以下の形式に変換できる。

[目的関数]

$$\text{最小化: } \sum_{j=1}^N \sigma_j^2 * x_j^2 + \sum_{r=1}^K \sum_{s=1}^K f_{rs} * y_r * y_s \quad \dots\dots\dots (7)$$

[制約式]

$$\sum_{j=1}^N \beta_{jk} * x_j = y_k \text{ (収益率の期待値制約)} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\sum_{j=1}^N x_j = 1 \text{ (投資比率の総和が1)} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\sum_{j=1}^N x_j * r_j = \rho \text{ (収益率の期待値制約)} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$x_j \geq 0 \text{ (非負制約, 空売り不可の場合)} \quad \dots\dots\dots (11)$$

一般に、ファクタの数は高々数十個程度であると想定されるため、マルチファクタモデルにおいて、二次の係数行列に現れる要素の数は数千個のオーダーとなる。このため、最適ポートフォリオ決定問題においては、通常は平均分散モデルの改良型であるマルチファクタモデルが用いられることが多い。

図2 リスクとリターンの関係

Fig. 2. Relationship between risk and return.

図3 リスク回避度λと効用曲線、および有効フロンティア曲線との関係

Fig. 3. Risk aversion, utility function, and efficient frontier curve.

なお、リスクに関しては、文献(1)(2)では、収益率の分散が採用されているが、実際の運用においては、ベンチマークとの乖離で表されるトラッキングエラーをリスクとして用いることが適切であると考えられている⁽¹⁰⁾。

そこで、本研究では、リスクとリターンから構成される効用関数を(収益率の期待値)－(リスク回避度)×(トラッキングエラーの2乗)と定義⁽¹⁰⁾して、その効用関数を最大化する二次計画問題に定式化する。

[目的関数]

$$\begin{aligned} \text{最大化: } & \alpha - \lambda * TE^2 \\ &= \sum_{j=1}^N x_j * r_j - \lambda * \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N (x_j - h_j) * \sigma_{jk} * (x_k - h_k) \\ &= -\lambda * x^T G x + (r^T + 2 * \lambda * h^T G) x - \lambda * h^T G h \\ &= -\lambda * x^T (Q_r + A_h^T Q_r A_h) x + (r^T + 2 * \lambda * h^T G) x - \lambda * h^T G h \\ &= -\lambda * (x^T Q_r x + y^T Q_r y) + (r^T + 2 * \lambda * h^T G) x - \lambda * h^T G h \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

[制約式]

$$A_h x - y = 0 \text{ (ファクタ変数関連制約)} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$e^T x = 1 \text{ (投資比率の総和が1)} \quad (14)$$

$$A_s x = b_s \text{ (業種セクタ投資制約)} \quad (15)$$

$$x \geq 0 \text{ (非負制約, 空売り不許可)} \quad (16)$$

G : 各銘柄のリターン間の共分散行列。 $Q_S + A_B^T Q_F A_B$ と等しい。

Q_S : 各銘柄のスペシフィックリスクを要素とする対角行列

A_B : 各銘柄のファクタエクスポージャを要素とする行列

Q_F : 各ファクタのリターン間の分散共分散行列

r : 各銘柄の収益率の期待値を要素とするベクトル

h : ベンチマーク資産配分による各銘柄への投資比率を要素とする変数ベクトル

x : 各銘柄への投資比率を要素とする変数ベクトル

y : ファクタエクスポージャと個別銘柄への投資比率との関係を示すベクトル

A_S : 各銘柄と業種の関係を示す係数行列

b_s : 各業種群への投資比率制約を要素とするベクトル

なお、(12)式において、 λ はリスク回避度を意味する。図3に示すように、リターンの追求を優先する場合はリスク回避度 λ を小さくすればハイリスクハイリターンのポートフォリオAが、リスクの低減を優先する場合は λ を大きくすればローリスクローリターンのポートフォリオBがそれぞれ得られる。また、制約条件としては、投資比率総和制約、非負制約のみ記しているが、個別銘柄の組入制約、業種別投資制約等の諸制約を考慮した場合においても容易に拡張することが可能である。

3. 最適ポートフォリオ決定問題における高速処理手法に関する検討

(3・1) 主双対内点法 本研究では、最適ポートフォリオ決定問題向け最適化手法として、主双対内点法⁽³⁾⁽⁴⁾に準拠する。この理由は、以下の点である。

- (1) 変数の数が増えても最適解を得るまでの反復回数が数十回と安定しているため、係数行列が疎な大規模問題をより高速に解けること。
- (2) 原問題を主問題と呼ばれる標準形に変形した問題と主問題から派生した双対問題との目的関数の差を利用して、最適解を得る以前の解の精度を高めることが可能である。

以下では、主双対内点法の概要について説明し、最適ポートフォリオ問題向けに改良した行列処理の高速化手法については後述する。なお、内点法の他の種類として、バリエーション法が知られているが、これは双対問題を考慮せず、主問題において、各々の制約条件の違反度の対数における総和にペナルティをかけた項を目的関数に加えて非線形最適化を行う方式である。

主双対内点法は、以下のように、線形の制約式および非負制約の下で二次の目的関数を最小化する形式で表される二次計画問題の標準形を対象としている。

[二次計画問題の標準形]

$$\text{最小化: } x^T Q x / 2 + c^T x \quad (17)$$

$$\text{制約式: } A x = b \quad (18)$$

$$x \geq 0 \quad (19)$$

Q : n 行 n 列の非負定値行列

c : n 次元の一次係数ベクトル

x : n 次元の変数ベクトル (n は変数の数)

b : m 次元のベクトル

A : m 行 n 列の係数行列

双対定理あるいは最適化理論において重要な役割を果たすKuhn-Tuckerの定理⁽¹¹⁾より主問題の最適条件が以下のようになっていることが分かっている。

$$A x = b \quad (20)$$

$$A^T y - Q x + z = c \quad (21)$$

$$x^T z = 0 \quad (22)$$

$$x, z \geq 0 \quad (23)$$

上記最適条件を求める連立方程式(20)~(23)は、非線形方程式(22)を含む。このため、連立一次方程式の代表的な解法であるガウス消去法のような直接法で (x, y, z) を求めることはできない。従って、連立方程式の解法として、ニュートン法による反復法を採用する。また、数値的安定性を向上させるために、式(22)の代わりに、

$$X z = \mu e \quad (24)$$

X : ベクトル x を対角要素とする対角行列

e : 全ての要素が1のベクトル

を用いて、各反復毎に μ の値を0に近づけるようにして最適解を求める方法を探ることが多い。本研究においても、上記の方式を採用している。主双対内点法の処理の概要を以下に示す。

Step0: $(x_0, z_0) > 0$ を満たす初期点 (x_0, y_0, z_0) を設定し、 $k=0$ とする。なお、 y_0 は任意でよい。

Step1: μ の値を定めて以下の連立方程式の解 $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ を計算し、次の反復点を探索するためのニュートン方向とする。

$$A \Delta x = -(A x_k - b) \quad (25)$$

$$-Q \Delta x + A^T \Delta y + \Delta z = -(A^T y_k - Q x_k + z_k - c) \quad (26)$$

$$Z_k \Delta x + X_k \Delta z = -(X_k z_k - \mu e) \quad (27)$$

なお、 μ の値は、式(28)のように計算する。

$$\mu = \delta x^T z / n \quad (28)$$

ここで、点列が制約条件を満たさない場合は、制約条件にできるだけ近付くように δ の値を $0.9 (\approx 1)$ に、点列が制約条件を満たす場合には目的関数をできるだけ最小化するように $0.01 (\approx 0)$ とする。

Step2: ステップサイズ α_p および α_d を決めて、次の反復点を計算する。

$$x_{k+1} = x_k + \rho \alpha_p \Delta x \quad (29)$$

$$y_{k+1} = y_k + \rho \alpha_d \Delta y \quad (30)$$

$$z_{k+1} = z_k + \rho \alpha_d \Delta z \quad (31)$$

なお、ステップサイズ (α_p, α_d) および次の反復点 $(x_{k+1}, y_{k+1}, z_{k+1})$ は以下のように計算する。

$$\alpha_p = \min(\alpha_p^{\max}, \alpha_{pp}) \quad (32)$$

$$\alpha_{pp} = \min\{\alpha : x_i + \alpha \Delta x_i \geq 0, \Delta x_i < 0\} \quad (33)$$

$$\alpha_d = \min(\alpha_d^{\max}, \alpha_{dd}) \quad (34)$$

$$\alpha_{dd} = \min\{\alpha : z_i + \alpha \Delta z_i \geq 0, \Delta z_i < 0\} \quad (35)$$

(ρ は $0 < \rho < 1$ とし、内点の境界を越えて進まないための係数。 $\alpha_p^{\max}$ および $\alpha_d^{\max}$ はステップサイズ(α_p , α_d)の上限値であり、1に設定している)

Step3: $k = k + 1$ として Step1 へ戻る。ただし、以下の収束条件を満たせば終了する。

$$\|Ax_k - b\| < \varepsilon_p \quad (36)$$

$$\|A^T y_k - Qx_k + z_k - c\| < \varepsilon_d \quad (37)$$

$$\|x_k^T z_k\| < \varepsilon_c \quad (38)$$

式(36)~(38)の収束条件は、式(20)~(22)の最適性条件に対応している。

(3-2) 最適ポートフォリオ決定問題への主双対内点法の適用

(1) 非負変数でない変数の取扱い

上記の最適ポートフォリオ決定問題に現れる変数に着目した場合、変数 x については非負制約がついているものの、変数 y については非負制約がついていない。そこで、主双対内点法を適用するにあたっては、変数 y については、これに相当する非負変数に変換する前処理を実施する必要がある。

そこで、十分大きな正の数 p を用いて、

$$Y = y + p * e \quad (39)$$

(e は全ての要素が1のベクトル)

とすることにより、最適ポートフォリオ決定問題は二次計画問題の標準形に変換される。また、本稿では取り扱わなかったが、個別銘柄の組入れ上下限制約、業種別投資比率上下限制約などの不等式制約を取り扱う場合でも、スラック変数を導入して等式制約に変換することにより、二次計画問題の標準形としての取扱いが可能である。

(2) 行列処理の高速化

主双対内点法において、最も計算時間を要する部分は Step1 における探索方向を計算する箇所である。ここで探索方向を計算する際に、行列の要素を普通に扱う場合においては、変数の数が千数百にも及ぶために、膨大な時間がかかる。そこで、最適ポートフォリオ決定問題において、実用的な時間で最適解を導出するためには、行列処理を高速化することが必須である。

行列処理を高速化する方法としては、行列の非ゼロ要素のみを一次元配列として格納して、行列の乗算あるいは三角分解処理において、非ゼロとなる要素のみを計算する方法が考えられる。これは、様々な最適化問題の構造に対応でき、汎用的であると考えられる。しかし、係数行列の構造が不明であるため、前処理に時間がかかるなどの問題点がある。

そこで、本研究では、マルチファクタモデルにおいて、制約式の係数行列中に、要素が密に入っている箇所と対角

部のみに入っている箇所と全く要素が入っていない箇所が含まれることに着目した。これにより、制約条件の非ゼロ要素が入っている構造を、内部処理として取り込んで、非ゼロ要素が含まれる部分行列について分割処理を実施することにより、最適化計算を高速化することが可能となり、高速なアルゴリズムを構築できる。以下、行列の分割処理に関して説明する。

最適性条件の式(20)~(22)の違反度を、 α および β および γ のベクトルで表現し、さらに制約条件(25)~(27)を部分行列に分解すると式(40)のようになる。

$$\begin{bmatrix} A_B & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Q_S & 0 & A_B^T & e & A_S^T & I & 0 & 0 \\ 0 & -Q_F & -I & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ Z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_1 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & X_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \Delta y_3 \\ \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \Delta y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} \quad (41)$$

ただし、

$$D_{11} = A_B(Q_e + X_1^T Z_1)^{-1} A_B^T + (Q_F + X_2^T Z_2)^{-1} \quad (42)$$

$$D_{12} = A_B(Q_e + X_1^T Z_1)^{-1} e \quad (43)$$

$$D_{13} = A_B(Q_e + X_1^T Z_1)^{-1} A_e^T \quad (44)$$

$$D_{21} = D_{12}^T \quad (45)$$

$$D_{22} = e^T(Q_e + X_1^T Z_1)^{-1} e \quad (46)$$

$$D_{23} = e^T(Q_e + X_1^T Z_1)^{-1} A_e^T \quad (47)$$

$$D_{31} = D_{13}^T \quad (48)$$

$$D_{32} = D_{23}^T \quad (49)$$

$$D_{33} = A_e(Q_e + X_1^T Z_1)^{-1} A_e^T \quad (50)$$

$$\Delta x_1 = (Q_e + X_1^T Z_1)^{-1} * (\beta_1 + A_B^T \Delta y_1 + \Delta y_2 e + A_e^T \Delta y_3 - X_1^T r_1) \quad (51)$$

$$\Delta x_2 = (Q_F + X_2^T Z_2)^{-1} (\beta_2 - \Delta y_1 - X_2^T r_2) \quad (52)$$

$$\Delta z_1 = -X_1^T r_1 - X_1^T Z_1 \Delta x_1 \quad (53)$$

$$\Delta z_2 = -X_2^T r_2 - X_2^T Z_2 \Delta x_2 \quad (54)$$

式(40)を解くと、変数 y の更新量 Δy は連立方程式(41)の解となり、変数 x および z の更新量 Δx および Δz は式(51)~式(54)となる。なお、連立方程式(41)の左辺の部分行列 D_{11} ~ D_{33} は、式(42)~式(50)を用いて計算される。また、 e はすべての要素が1のベクトルを、 X_1 , X_2 , Z_1 , Z_2 はそれぞれ x_1 , x_2 , z_1 , z_2 を意味する。

この結果、連立方程式の演算ルーチンにおいて、従来 N 次 (N は銘柄数で最大三千数百程度に上る) の連立方程式

を各反復毎に解く必要があったのが、本方式では $(K+1+S)$ 次元 (K はファクタおよび業種の数の和, S は業種群の数) すなわち数十次元の連立方程式を各反復毎に解けばよい。さらに大規模な疎行列を係数行列とする連立方程式を解く際に必要なオーダリング等の前処理が不要となる。この結果、行列計算による処理が高速化でき、その結果として最適化計算を短時間で実現することが可能となる。

4. 提案方式の適用結果

本研究では、東証に上場されている銘柄千数百個および全国各市場 (東証 1, 2 部, 店頭市場ほか) に上場されている銘柄三千数百個をもとにし、企業規模、銘柄流動性等のリスクファクタ数十個を対象として、上述の最適化問題に定式化した。目的関数は、リターンおよびリスクから構成される効用関数とリスクのみで構成される効用関数の 2 種類に設定した。リスクファクタのエクスポージャとしては、回帰分析によって得られた値を用いた。また、各銘柄の収益率については、実績値を検証用の値として用いた。表 3 に提案方式の評価の対象とした問題の概要を示す。

まず、問題番号 NO.1 のケースに関して、制約条件を満たす解を得るまでの制約条件の違反量の推移を図 4 に、さらに制約条件を満たしてから最適解を得るまでのリスク (トラッキングエラー) およびリターン値を図 5 にそれぞれ示す。

図 4 および図 5 に示すように、制約条件を満たす解および最適解は、それぞれ 8 反復後および 29 反復後に得られた。開発した最適ポートフォリオ決定問題向け主双対内点法の性能を検証するために、係数行列の構造を反映しない従来手法 (ただし従来手法はバリエーション法を適用) との性能を比較した。実行結果を表 4 に示す。

上記の結果において、反復回数が異なる理由としては、従来手法で用いている主双対内点法 (バリエーション法) と提案手法で用いている主双対内点法 (パス追跡法) のアルゴリズムが若干異なっていることが理由であると考えられる。具体的には、目的関数の形式がリスクのみのケース NO.1 および NO.3 においては、反復回数がほぼ同じであるのに対して、目的関数の形式がリスクおよびリターンを含むケース NO.2 および NO.4 においては、提案手法の方が反復回数が少なくなっている。

しかしながら、いずれの問題においても、従来手法と提案手法で反復回数が数十回とほぼ同等であるにもかかわらず、提案手法が従来手法の約 $1/2 \sim 1/3$ の計算時間で最適解が得られている。これは、行列の前処理を省力化できたことによる効果を示しているといえる。

実際のポートフォリオの運用においては、最適ポートフォリオの質を向上させるために、パラメータの推定精度を改良しながら最適化プログラムを何度も適用する必要がある。このため、提案手法によるプログラムが、従来手法によるプログラムの性能を上回ることにより、最適ポートフォリオの質の向上に寄与できる。

表 3 提案手法を評価する際に用いた例題

Table 3. Test problems for case studies.

問題 ID	効用関数	計算対象 (銘柄数)
NO. 1	リスク	東証一部 (1432)
NO. 2	リスクおよびリターン	東証一部 (1432)
NO. 3	リスク	全銘柄 (3435)
NO. 4	リスクおよびリターン	全銘柄 (3435)

図 4 各反復における制約条件の違反量の変化

Fig. 4. Change of constrain's error in each iteration.

図 5 各反復におけるパラメータの変化

Fig. 5. Change of tracking-error and return value in each iteration.

表 4 提案手法の性能評価

(使用計算機: Pentium866MHz, メモリ 512MB)

Table 4. Results from case studies.

問題および評価項目	提案手法	従来手法
NO. 1	反復回数	39
	計算時間	13.62s
NO. 2	反復回数	28
	計算時間	9.36s
NO. 3	反復回数	53
	計算時間	38.3s
NO. 4	反復回数	29
	計算時間	21.9s

5. まとめ

大規模な問題においても高速に最適解を導出するため、最適ポートフォリオ決定問題における行列構造を反映した手法を提案した。具体的には目的関数の二次行列および制

約式の係数行列において、要素が密に入っている部分と対角のみの部分、さらに全く要素のない部分に着目して、高速な最適化アルゴリズムを構築した。

また、提案手法を国内の全株式を対象とした大規模な最適ポートフォリオ決定問題を用いて検証し、提案手法の実用上の有効性に関して見通しを得ることができた。

(平成 14 年 4 月 11 日受付, 平成 14 年 12 月 26 日再受付)

文 献

- (1) 枇々木規雄: 金融工学と最適化, 朝倉書店 (2001)
- (2) 今野 浩: 理財工学 I, 日科技連 (1995)
- (3) 小島政和・土谷 隆・水野真治・矢部 博: 内点法, 朝倉書店 (2001)
- (4) R. J. Vanderbei, and T. J. Carpenter: "Symmetric indefinite systems for interior point methods", *Mathematical Programming*, Vol.58, pp.1-32 (1993)
- (5) 川本 茂・澤 敏之・小林康弘: 「主双対内点法を用いた多時刻断面経済負荷配分手法」, 平 9 電気学会全国大会, No.1429 (1997)
- (6) 韋 化・佐々木博司・永田 武: 「電力系統最適化問題への電力系統最適化問題への内点法二次計画アルゴリズムの適用」, 電学論 B, 116, 2, pp.1-32 (1996-2)
- (7) 竹原 均: ポートフォリオの最適化, 朝倉書店 (1997)
- (8) 枇々木規雄: 「戦略的資産配分に対する多期間確率計画モデル」, 1999 年度 JAFEE 冬季大会予稿集, pp.36-55 (1999)
- (9) 田辺隆人: 「金融工学と数理計画法」, 1999 年度 JAFEE 冬季大会予稿集, pp.56-65 (1999)
- (10) R.C.グリノルド, R.N.カーン: アクティブ・ポートフォリオ・マネジメント, 東洋経済新聞社 (1999)
- (11) 茨木俊秀・福島雅夫: FORTRAN 最適化プログラミング, 岩波書店 (1991)

川 本 茂

(正員) 1968 年 8 月 31 日生。1994 年 3 月東京工業大学大学院総合理工学研究科システム科学専攻修士課程修了。同年 4 月 (株)日立製作所入社。現在, 同社日立研究所に勤務。金融リスク管理システムの研究開発に従事。

高 元 政 典

(非正員) 1989 年 3 月大阪大学大学院工学研究科原子力工学専攻修士課程修了。同年 4 月 (株)日立製作所入社。原子力プラント建設計画 CAD, 変電所制御回路設計 CAD, 防災情報システムの各開発を経て, 現在, 同社日立研究所において金融リスク管理システムの研究開発に従事。日本 OR 学会, 電子情報通信学会, 人工知能学会各会員。

小 林 康 弘

(正員) 1975 年 3 月東京大学大学院原子力工学博士課程修了。同年 4 月 (株)日立製作所入社。現在, 同社日立研究所において, 金融リスク管理, 事業リスク管理の研究開発に従事。工学博士。IEEE, 人工知能学会等の会員。