外積を利用した3次元連想記憶

正 員 小林 正樹*

Three-Dimensional Associative Memory Using Exterior Product

Masaki Kobayashi*, Member

Several models of high dimensional neural networks have been proposed. Complex neural networks are two dimensional neural networks. They has been investigated more than other high dimensional neural networks. Three-dimensional neural networks are Nitta's 3D model, a model using quaternion numbers and an exterior model. Nitta's 3D model and the model using quaternion numbers have rotational properties. The inherent properties of exterior model, however, have not been clarified. We propose Hopfield network using exterior product to investigate exterior model. Real and complex numbers holds commutative and connection laws, but exterior product does not. Therefore it can not use similar discussions. In this paper, we show that the learning method similar to hebbian rule is useful.

キーワード：連想記憶，外積，高次元ニューラルネットワーク

Keywords: Associative Memory, exterior product, high dimensional neural network

1. はじめに

ニューラルネットワークを高次元化する手法がいくつか提案されてきた。ニューラルネットワークの2次元化としては、複素ニューラルネットワークが良く利用されている。複素ニューラルネットワークは通常のニューラルネットワークの結合荷重，バイアス，入出力値を実数から複素数に拡張したモデルである。新田と Benvenuto は独立に階層型複素ニューラルネットワークのモデルとバックプロパゲーション学習則を提案した⁽⁴⁾⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾。また，新田は複素バックプロパゲーションについて，次の特性を明らかにした^{(9)~(11)}。

- (1) 複素 BP ネットワークの決定表面は，実数型のニューラルネットワークとは異なり，互いに直交する2つの超曲面から構成されている。
- (2) 学習速度が平均して2, 3倍速く，必要とする重みと閾値の数も実数型の場合と比べ約半分ですむ。
- (3) 2次元アフィン変換学習能力という実数型ニューラルネットワークには見られない複素ニューラルネットワーク固有の性質がある。

複素連想記憶は広瀬⁽⁶⁾，根本⁽⁸⁾などにより試みられ，現在までにいくつかの研究結果が報告されている。複素連想

記憶に関しては，階層型複素ニューラルネットワークとは異なるモデルである多値モデルが多く利用されている。複素連想記憶の学習法については，Hebb 則が多く使用されているが記憶容量が小さく，より優れた方法として，最適連想写像⁽²⁾や最急降下法を利用した学習法⁽⁷⁾が開発されている。青木は平衡状態について理論的に解析している⁽¹⁾。また，Jankowski は Hebb 則の記憶容量について調べ⁽⁵⁾， K 値複素連想記憶に対して K が大きくなるほど記憶容量が小さくなることを報告している。

階層型ニューラルネットワークの3次元化に関しても，いくつかのモデルが提案されている。新田の提案した3次元ニューラルネットワーク⁽¹²⁾は回転特性をもち，学習に要するパラメータが少なく，学習時間が短縮されるなどの利点をもつ。4元数を用いたモデル⁽³⁾も回転特性をもつ3次元ニューラルネットワークである。新田は3次元外積ニューラルネットワーク⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾を提案し，学習に要するパラメータが少なく，学習時間が短縮されるなどの性質が実験により確認した。3次元外積ニューラルネットワークの性質はほとんど解明されていないが，新田は何らかの固有の性質が備わっていると予想している⁽¹⁵⁾。

以上のように高次元ニューラルネットワークの研究は，まだ断片的で体系付けられていない。本研究は，この現状の中でその性質の解明と体系化の1ステップとして，外積を用いたニューラルネットワークの性質について議論し，さらにそれを用いた3次元連想記憶を提案し，その能力を分析する。外積は2項演算であるから，Hebb 則に類似した

* 山梨大学大学院医学工学総合研究部
〒400-8511 山梨県甲府市武田 4-3-11
Interdisciplinary Graduate School of Medicine and Engineering,
University of Yamanashi
Takeda 4-3-11, Kofu, Yamanashi, Japan, 400-8511

学習法を考えることが可能になる。実数、複素数の乗法は交換則、結合則などが成り立つが、外積についてはこれらの性質が成立しない。実数や複素数の場合と同様な議論ができないにもかかわらず、Hebb 則に類似した学習法ができることを示す。また、計算機シミュレーションにより、記憶容量、雑音耐性について調べた。記憶容量は、他のモデルの Hebb 則の時と同様に極めて小さいが、強い雑音耐性を有していることがわかった。さらに、強い雑音耐性を有している理由について考察する。

2. 外積ニューロンの定義と性質

本章では、3 次元外積ニューラルネットワークについて説明する。ネットワークの構造は特に仮定せず、ニューロンの動作と結合荷重の役割のみを説明する。外積は 3 次元ベクトルの良く知られた 2 項演算であるが、実数や複素数の乗法と異なり、交換則、結合則が成立しない。

行ベクトル (x_1, x_2, x_3) を列ベクトルにしたものを $(x_1, x_2, x_3)^T$ で表すことにする。2 つの 3 次元列ベクトル $a = (a_1, a_2, a_3)^T$, $b = (b_1, b_2, b_3)^T$ に対して、外積 $a \times b$ は、

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \cdots (1)$$

で定義される。外積 $a \times b$ を c とおくと、 c は a, b に垂直で、 a, b, c が右手系をなす。また、 c の大きさは、ベクトル a, b がなす平行四辺形の面積、すなわち、 a, b のなす角を θ としたとき、 $|a||b|\sin\theta$ となる（図 1）。ここで、 $|a|, |b|$ は、それぞれベクトル a, b の大きさである。また、外積では交換則が成立しないが、交代性、すなわち

$$a \times b = -b \times a \cdots (2)$$

が成り立つことは重要な性質である。

各 3 次元ニューロンは、3 次元ベクトルで表され、出力値は $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ の 8 状態のいずれかをとり、結合荷重は 3 次元ベクトルで表される。3 次元ニューロン n への入力 U_n は次の 3 次元ベクトルで表される。

$$U_n = \sum_m W_{nm} \times X_m, \cdots (3)$$

ここで、 X_m は 3 次元ニューロン m の出力値、 W_{nm} は 3 次元ニューロン m から 3 次元ニューロン n への結合加重である。3 次元ニューロン n への入力値 U_n を $(x, y, z)^T$ とすると、このとき、3 次元ニューロン n の出力値 $(x_n, y_n, z_n)^T$ は次のように定義される（図 2）

$$x_n = \text{sign}(x) \cdots (4)$$

$$y_n = \text{sign}(y), \cdots (5)$$

$$z_n = \text{sign}(z), \cdots (6)$$

ここで、 sign は

図 1 外積の定義： a, b の外積 $a \times b$ は a, b に直交するベクトルで、 $a, b, a \times b$ は右手系をなす。 $a \times b$ の大きさは a, b のなす平行四辺形の面積に等しい。

Fig. 1. Definition of exterior : The exterior vector $a \times b$ of a and b is orthogonal to a and b . a, b and $a \times b$ are right hand system. The size of $a \times b$ equals the area of parallelogram by a and b .

図 2 3 次元ニューロンの出力：ニューロンには 3 次元ベクトルが入力される。3 次元ニューロンは各成分の符号を出力する。

Fig. 2. The output of three dimensional neurons : The input to a neuron is a three-dimensional vector. Each element of the output is the sign.

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \text{ のとき} \\ -1 & x < 0 \text{ のとき} \end{cases} \cdots (7)$$

で定義される関数である。

3. 連想記憶

本章では実ニューロン及び複素ニューロンを用いた連想記憶について述べる。連想記憶で用いられるモデルは Hopfield モデルであり、結合は全結合である。簡単のため学習するパターンを 1 つとし、 $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ とする。ここで、 x_i は学習するパターンの i 番目のニューロンの状態である。ニューロン m から n への結合加重を w_{nm} とする。

図3 複素ニューロン：出力値は単位円周上の等分点である。入力に対して、複素平面上でもっとも偏角の近いものを出力する。この図は6分割の例であり、複素平面が6つの領域に分割されている。

Fig.3. complex neuron : The outputs are equally division points of the unit circle. The output is the nearest point for the input in complex plane. This shows six-values neuron. The complex plane is divided to six domains.

連想記憶が学習するパターンを記憶しているためには、

$$\sum_m w_{nm} x_m$$

をニューロン n に入力として与えた時、ニューロン n が x_n を想起すれば良い。また、 (n, m) 成分を w_{nm} とする $N \times N$ 行列を結合行列と呼ぶことにする。

まず、実ニューロンを用いた連想記憶の場合、各 i について、 $x_i = \pm 1$ である。結合加重を

$$w_{nm} = x_n x_m \dots\dots\dots (8)$$

とする。このとき、

$$\sum_{m \neq n} w_{nm} x_m = \sum_{m \neq n} x_n x_m^2 \dots\dots\dots (9)$$

$$= N x_n \dots\dots\dots (10)$$

となり、ニューロン n への入力は x_n の N 倍であり、学習するパターンは確かに記憶されている。また、実ニューロンを用いた連想記憶の場合、結合行列は対称行列になっている。

次に、複素ニューロンを用いた連想記憶の場合、各 i について、 x_i は複素平面の単位円周上の等分点をとる。図3は6分割の例である。各複素ニューロンは入力に対して、等分点の中から入力と一番偏角の近いものを出力する。結合加重を

$$w_{nm} = x_n \overline{x_m} \dots\dots\dots (11)$$

とする。ここで、 $\overline{x_m}$ は x_m の複素共役である。このとき、

$$\sum_{m \neq n} w_{nm} x_m = \sum_{m \neq n} x_n \overline{x_m} x_m \dots\dots\dots (12)$$

$$= N x_n \dots\dots\dots (13)$$

となり、ニューロン n への入力は x_n の N 倍であり、学習するパターンは確かに記憶されている。また、複素ニューロンを用いた連想記憶の場合、結合行列はエルミート行列になっている。

実ニューロンまたは複素ニューロンを用いた連想記憶の場合、実数及び複素数で結合則が成り立つために上記の議論が成立している。ところが、外積では結合則が成立しないため、上記の議論は適用できない。

4. 3次元外積連想記憶

本章では、3次元外積ニューラルネットワークを利用して、3次元外積連想記憶を構成する。今、

$$W_{nm} = \begin{pmatrix} a_{nm} \\ b_{nm} \\ c_{nm} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (14)$$

とする。3次元ニューロン m を3つの実ニューロンの組とみなす。

$$W_{nm} \times X_m = \begin{pmatrix} b_{nm} z_m - c_{nm} y_m \\ c_{nm} x_m - a_{nm} z_m \\ a_{nm} y_m - b_{nm} x_m \end{pmatrix} \dots\dots\dots (15)$$

であるから、ニューロン m の出力ベクトル $(x_m, y_m, z_m)^T$ に対し、3次元ニューロン m から3次元ニューロン n への入力は、

$$\begin{pmatrix} 0 & -c_{nm} & b_{nm} \\ c_{nm} & 0 & -a_{nm} \\ -b_{nm} & a_{nm} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{pmatrix}$$

となる。

$$A_{nm} = \begin{pmatrix} 0 & -c_{nm} & b_{nm} \\ c_{nm} & 0 & -a_{nm} \\ -b_{nm} & a_{nm} & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (16)$$

とおく。

3次元ニューロンの各成分は ± 1 だから、3つの実ニューロンとみなすことができる。実ニューラルネットワークとみなした時、Hopfield のモデルとなる条件、すなわち、対称な結合網となる条件を調べる。このとき、ネットワークは安定状態に到達することが保証される。ニューロン m の x 成分からニューロン n の y 成分への結合加重は、 c_{nm} である。逆にニューロン n の y 成分からニューロン m の x 成分への結合加重は、 $-c_{mn}$ である。実ニューラルネットワークとしての対称性を仮定すると、 $c_{nm} = -c_{mn}$ が得られる。同様にして、 $a_{nm} = -a_{mn}$, $b_{nm} = -b_{mn}$ が得ら

図 4 3次元ニューロンを3つの実ニューロンと見なした図。

Fig. 4. This figure regards a 3-dimensional neuron as three real neurons.

れる。したがって、結合の対称性は

$$A_{mn} = A_{nm}^T \dots\dots\dots (17)$$

または、

$$W_{mn} = -W_{nm} \dots\dots\dots (18)$$

と表される(図4)。この条件を満たす時、3次元外積連想記憶と呼ぶことにする。

(n, m) 成分を W_{nm} とする行列を、3次元外積連想記憶の結合行列と呼ぶことにする。3次元外積連想記憶の結合行列は、交代行列になっている。

3次元外積連想記憶の Hebb 則に類似した学習法について述べる。簡単のため学習するパターン数を 1 とする。記憶するパターンベクトルを $(p_1, p_2, \dots, p_N)$ とする。ここで、 N は 3次元ニューロンの個数である。各成分 p_i が 3次元ベクトルであることに注意する。今、3次元ニューロン m から 3次元ニューロン n への結合荷重 W_{nm} を

$$W_{nm} = p_m \times p_n \dots\dots\dots (19)$$

とする。このとき、外積の交代性から、式(18)を満たすので、3次元外積連想記憶になっていることがわかる。

ネットワークが安定状態に到達することが保証されたので、次に、学習したパターンが安定状態であることを示す。3次元ベクトル p_m と p_n の外積 W_{nm} は p_m, p_n に直交する。 $W_{nm} \times p_m$ は W_{nm}, p_m に直交するから、その方向は p_n を p_m に直交する平面への射影となる(図5)。したがって、 $W_{nm} \times p_m$ と p_n の方向はかなり近い。正確には次の定理により示される。

[定理] $(p_1, p_2, \dots, p_N)$ に対して、 $W_{nm} = p_m \times p_n$ としたとき、 $(p_1, p_2, \dots, p_N)$ は安定状態である。

[証明] ネットワークに $(p_1, p_2, \dots, p_N)$ を与えた時のニューロン n への入力を調べる。 p_m のとりうる状態は、 $\pm(1, 1, 1), \pm(1, 1, -1), \pm(1, -1, 1), \pm(-1, 1, 1)$ のいずれか

図 5 外積 Hebb 則 : 外積 Hebb 則は結合加重 W_{nm} を Hebb 則に類似した式 $P_m \times P_n$ で与える。 W_{nm} は P_m, P_n に直交する。 $W_{nm} \times P_m$ は P_n を P_m に直交する平面に射影した方向のベクトルとなる。

Fig. 5. Exterior hebbian rule : Exterior hebbian rule gives the connection weight $W_{nm} = P_m \times P_n$ which is likely hebbian rule. W_{nm} is orthogonal for P_m and P_n . $W_{nm} \times P_m$ is a vector whose direction is the vector by projecting P_n to the plane which is orthogonal to P_m .

である。対称性から、 $p_n = (1, 1, 1)^T$ として良い。ニューロン m からニューロン n への入力の各成分が正であることを示せば十分である。ニューロン m の状態とニューロン m からニューロン n への入力 $W_{nm} \times p_m$ との関係は、

p_m	$W_{nm} \times p_m$
$\pm(1, 1, 1)^T$	$(0, 0, 0)^T$
$\pm(1, 1, -1)^T$	$(2, 2, 4)^T$
$\pm(1, -1, 1)^T$	$(2, 4, 2)^T$
$\pm(-1, 1, 1)^T$	$(4, 2, 2)^T$

となり、ニューロン n への入力の各成分は正である。したがって、ニューロン n の状態は安定する。(証明終)

最後に学習するパターンが複数の時を説明する。学習する i 番目のパターンを $(p_1^i, p_2^i, \dots, p_N^i)$ とする。結合加重 W_{nm} を

$$W_{nm} = \sum_i p_m^i \times p_n^i \dots\dots\dots (20)$$

で定義する。いま、ネットワークに i 番目のパターンを与えた時、3次元ニューロン n への入力 U_n は

$$U_n = W_{nm} \times p_m^i \dots\dots\dots (21)$$

$$= \sum_j p_n^j \times p_m^j \times p_n^i \dots\dots\dots (22)$$

$$= N p_n^i + \sum_{j \neq i} p_n^j \times p_m^j \times p_n^i \dots\dots\dots (23)$$

となる。式(23)の第1項は i 番目のパターンの想起を促し、第2項は雑音項となる。第1項はニューロンの数 N に比例して大きくなり、ニューロン数が多くなるほど、記憶が容易になる。第2項は学習するパターン数が増えるにしたがって変動が大きくなり、雑音項の影響が増大し、記憶に障害が生じる。

5. シミュレーション

ここでは、計算機シミュレーションによって、3次元外積連想記憶の記憶容量、雑音耐性などを調べる。

まず、記憶容量を調べるシミュレーションを行った。ニューロン数は 50, 100, 150, 200 とした。\$K\$ 個のパターンを学習するシミュレーションを 100 回行い、学習するパターンを全て安定状態としたとき、学習が成功したとみなした。学習パターンはランダムに生成した。

図 6 はシミュレーションの結果である。横軸は学習パターン数、縦軸は学習の成功率 (%) である。ニューロン数の増

図 6 記憶容量：横軸はパターン数、縦軸は学習の成功率。ニューロン数は 50, 100, 150, 200。

Fig. 6. Storage capacity: The x-axis means the number of patterns. The y-axis means the success rate. The numbers of neurons are 50, 100, 150 and 200.

図 7 雑音耐性：横軸は雑音割合、縦軸は想起成功率。パターン数は 1, 5, 10。

Fig. 7. Noise robustness: The x-axis means noise rate. The y-axis means the recall success rate. The numbers of patterns are 1, 5 and 10.

加にしたがって、記憶容量は増加している。実数や複素数を用いた連想記憶の Hebb 則の時と同様に記憶容量は極めて小さい。

次に、雑音耐性について調べるシミュレーションを行った。ニューロン数は 100 とした。また、学習パターン数を 1, 5, 10 とした。雑音の付加は、各ニューロンに対して確率 \$p\$ でランダムなパターンを与えた。確率 \$p\$ を雑音率と呼ぶことにする。学習したパターンに雑音を付加して、元のパターンを復元できたとき、雑音の除去に成功したとみなした。各雑音率に対して、100 回シミュレーションを行った。学習パターンは記憶容量に関するシミュレーションの場合と同様ランダムに生成した。

図 7 はシミュレーションの結果である。横軸は雑音率、縦軸は雑音除去成功率 (%) である。学習パターン数が 10 のとき、雑音率が 0 であっても雑音除去成功率が 100% でないのは、全てのパターンを記憶できるとは限らないからである。学習パターン数が 10 のときには、約 85% のパターンしか学習できていないことが分かる。

図 7 から雑音率 0.7 程度まで高い雑音除去成功率を保っていることが分かる。3次元ニューロンは 3つのパラメータをもち、それぞれは \$\pm 1\$ をとる。これらの値をランダムに定めたので、0.35 程度のパラメータが反転していることになる。

6. 考 察

計算機シミュレーションでは、高い雑音耐性を有していることがわかった。雑音の想起に与える影響を考察する。簡単のため記憶するパターンを一つにして考える。

まず、実ニューロンを使用した連想記憶について考える。記憶したパターンの実ニューロン \$m, n\$ における値をそれぞれ \$x_m, x_n\$ とする。このとき、実ニューロン \$m, n\$ 間の結合荷重 \$w_{nm}\$ は \$x_n x_m\$ となる。今、実ニューロン \$m\$ に雑音が付加されているとすると、その出力値は \$-x_m\$ となる。実ニューロン \$m\$ から実ニューロン \$n\$ への入力値は、

$$w_{nm}(-x_m) = -x_n \dots\dots\dots (24)$$

となり、符号を反転することを促す。したがって、実ニューロンを利用した連想記憶では、雑音は必ず想起を妨げる方向に働く。

次に、3次元外積連想記憶の場合を考える。記憶したパターンの 3次元ニューロン \$m, n\$ における値をそれぞれ \$p_m, p_n\$ とする。このとき、3次元ニューロン \$m\$ から 3次元ニューロン \$n\$ への結合荷重 \$W_{nm}\$ は \$p_m \times p_n\$ となる。対称性から \$p_n\$ は何であって本質的に変わらないから、以後、\$p_n = (1, 1, 1)^T\$ として考察を進める。今、3次元ニューロン \$m\$ に雑音が付加されて \$q_m\$ になっているとする。

\$p_m = \pm(1, 1, 1)^T\$ のとき、\$W_{nm} = (0, 0, 0)^T\$ となるから、3次元ニューロン \$m\$ の出力値は 3次元ニューロン \$n\$ には影響を与えない。

対称性から, p_m として,

$$(1, 1, -1)^T, (1, -1, 1)^T, (-1, 1, 1)^T$$

を考えることは本質的に同じだから, $p_m = (1, 1, -1)^T$ とする。このとき, $W_{nm} = (2, -2, 0)^T$ となる。雑音 q_m と 3 次元ニューロン n への入力 $W_{nm} \times q_m$ の表を次に掲げる。

q_m	$W_{nm} \times q_m$
$(1, 1, 1)^T$	$(-2, -2, 4)^T$
$(1, 1, -1)^T$	$(2, 2, 4)^T$
$(1, -1, 1)^T$	$(-2, -2, 0)^T$
$(-1, 1, 1)^T$	$(-2, -2, 4)^T$
$(1, -1, -1)^T$	$(2, 2, 0)^T$
$(-1, 1, -1)^T$	$(2, 2, 0)^T$
$(-1, -1, 1)^T$	$(-2, -2, -4)^T$
$(-1, -1, -1)^T$	$(2, 2, -4)^T$

この表の $W_{nm} \times q_m$ の負の成分になっている部分が正しい想起を妨げる。

また, 対称性から, p_m として,

$$(1, -1, -1)^T, (-1, 1, -1)^T, (-1, -1, 1)^T$$

を考えることは本質的に同じだから, $p_m = (1, -1, -1)^T$ とする。このとき, $W_{nm} = (0, -2, 2)^T$ となる。雑音 q_m と 3 次元ニューロン n への入力 $W_{nm} \times q_m$ の表を次に掲げる。

q_m	$W_{nm} \times q_m$
$(1, 1, 1)^T$	$(-4, 2, 2)^T$
$(1, 1, -1)^T$	$(0, 2, 2)^T$
$(1, -1, 1)^T$	$(0, 2, 2)^T$
$(-1, 1, 1)^T$	$(-4, -2, -2)^T$
$(1, -1, -1)^T$	$(4, 2, 2)^T$
$(-1, 1, -1)^T$	$(0, -2, -2)^T$
$(-1, -1, 1)^T$	$(0, -2, -2)^T$
$(-1, -1, -1)^T$	$(4, -2, -2)^T$

この表に関しても $W_{nm} \times q_m$ の負の成分になっている部分が正しい想起を妨げる。

以上から, 3 次元外積連想記憶の場合は雑音が必ずしも正しい想起を妨げる影響を与えとは限らず, このことが高い雑音耐性の理由であると考えられる。

7. おわりに

複素ニューラルネットワークなどの高次元ニューラルネットワークの理論的研究は余り進展していないのが現状である。本論文では, 高次元ニューラルネットワークの 1 つである外積ニューラルネットワークの性質を調べるために, 外積を用いた連想記憶を構成し, Hebb 則に類似した学習則を提案した。また, 計算機シミュレーションによって, 外積連想記憶の記憶容量を調べた。実数や複素数を用いた連想

記憶の Hebb 則の場合と同様, 記憶容量は極めて小さい。また, 計算機シミュレーションにより, 高い雑音耐性を有していることもわかった。雑音が必ずしも正しい想起を妨げる働きをするとは限らないことは, 高い雑音性能の一因と考えられる。

実用的なレベルにするために, 記憶容量の大きな学習方法を開発することは今後の課題である。

外積を用いたニューラルネットワーク固有の性質はほとんど解明されていないため, 今後の研究が望まれる。また, その他の 3 次元モデルを利用した 3 次元連想記憶の構成も今後の課題である。

(平成 14 年 5 月 31 日受付, 平成 15 年 4 月 11 日再受付)

文 献

- (1) H. Aoki: "Analysis of Equilibrium States of Hopfield Associative Memory Extended to Complex Number Field", *Trans. of IEICE A*, Vol.J78-A, No.9, pp.1238-1241 (1995-9) (in Japanese)
青木宏之: "複素数体上に拡張したホップフィールド連想記憶の平衡状態の解析", 信学会論誌 A, J78-A, 9, pp.1238-1241 (1995-9)
- (2) H. Aoki and Y. Kosugi: "Characteristics of the Complex-Valued Associative Memory Model Having Penalty Term", *Trans. of IEICE A*, Vol.J81-A, No.11, pp.1538-1546 (1998-11) (in Japanese)
青木宏之・小杉幸夫: "ペナルティ項を有する複素連想記憶モデルの性質", 信学会論誌 A, J81-A, 11, pp.1538-1546 (1998-11)
- (3) P. Arena, L. Fortuna, G. Muscato, and M.G. Xibilia: "Neural Networks in Multidimensional Domains", *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Vol.234, Springer, London (1998)
- (4) N. Benvenuto and F. Piazza: "On the Complex Backpropagation Algorithm", *IEEE Trans.Signal Processing*, Vol.40, No.4, pp.967-969 (1992-4)
- (5) S. Jankowski, A. Lozowski, and J.M. Zurada: "Complex-Valued Multistate Neural Associative Memory", *IEEE Trans. Neural Networks*, Vol.7, No.6, pp.1491-1496 (1996)
- (6) A. Hirose: "Proposal of Fully Complex-valued Neural Networks", *Proc. of IJCNN'92*, Vol.IV, pp.152-157 (1992)
- (7) D.L. Lee: "Improving the Capacity of Complex-Valued Neural Networks with a Modified Gradient Descent Learning Rule", *IEEE Trans. Neural Networks*, Vol.12, No.2, pp.439-443 (2001)
- (8) I. Nemoto and T. Kono: "Complex-Valued Neural Networks", *Trans. of IEICE D-II*, Vol.J74-D-II, No.9, pp.1282-1288 (1991-9) (in Japanese)
根本 幾・河野知志: "神経回路網の複素数値化の試み", 通信学会論誌 D-II, J74-D-II, 9, pp.1282-1288 (1991-9)
- (9) T. Nitta and T. Furuya: "A Complex Back-propagation Learning", *IPSS Journal*, Vol.32, No.10, pp.1319-1329 (1991-10) (in Japanese)
新田 徹, 古谷立美: "複素バックプロパゲーション学習", 情報処理学会論誌, 32, 10, pp.1319-1329 (1991-10)
- (10) T. Nitta: "An extension of the backpropagation algorithm to complex numbers", *Neural Networks*, Vol.10, No.8, pp.1392-1415 (1997)
- (11) T. Nitta: "An Analysis on Fundamental Structure of Complex-valued Neuron", *Neural Processing Letters*, Vol.12, No.3, pp.239-246 (2000)
- (12) T. Nitta: "An Extension of Neural Networks to Three Dimensions", *IPSS Journal*, Vol.35, No.7, pp.1300-1310 (1994-7) (in Japanese)
新田 徹: "ニューラルネットワークの 3 次元への拡張", 情報処理学会論誌, 35, 7, pp.1300-1310 (1994-7)
- (13) T. Nitta: "An Extension of the Back-Propagation Algorithm to Three Dimensions by Vector Product", *Proc. of 5th IEEE International Conference on Tools with Artificial Intelligence*, pp.460-461 (1993)

-
- (14) T. Nitta: "A Back-Propagation Algorithm for Neural Networks Based on 3D Vector Product", Proc. of 1993 International Joint Conference on Neural Networks, pp.589-592 (1993)
- (15) T. Nitta and M. Tanaka: "Current Status of Research on Neural Networks with High-dimensional Parameters", Circulars of the Electrotechnical Laboratory, No.228, (1999) (in Japanese)
- 新田 徹・田中 勝:「高次元ニューラルネットワーク関連研究の現状」, 電子技術総合研究所調査報告, 第 228 号, (1999)

小林 正 樹 (正員) 1989 年名大・理・数学科卒。1993 年同大大学院博士課程中退。同年山梨大工学部助手。博士(理学)。現在, 山梨大大学院医学工学総合研究部助手。