線形むだ時間システムの代数的安定条件

正員 森 武宏* 正員 小亀 英己**

Algebraic Stability Criteria for Linear Delay Differential Systems

Takehiro Mori*, Member, Hideki Kokame**, Member

An algebraic method is proposed to yield delay-independent stability criteria for delay differential systems. The stability condition derived comprises sufficient Hurwitzness conditions for a given polynomial and a sufficient positivity condition for a certain polynomial. The result is a counterpart of the delay-free case and gives explicit analytical conditions in terms of the coefficients of the systems.

キーワード：むだ時間システム，線形システム，安定条件，代数的条件，むだ時間不依存条件

Keywords: delay differential systems, linear systems, stability, algebraic condition, delay-independent condition

1. まえがき

$p(s)$, $q(s)$ をともに実多項式として, $p(s) + q(s)e^{-\tau s}$ を特性式としてもつシステムは, 伝達関数を $H(s)e^{-\tau s}$ (ただし $H(s) = q(s)/p(s)$) とする入(出)力にむだ時間 τ をもつプラントに Smith 補償器のようにフィードバック制御を施す場合に現れる。むだ時間のない $\tau = 0$ の場合の多項式 $p(s) + q(s)$ の Hurwitz 安定性については代数的な形で正確な判定が可能であり, さらに代数的な十分条件もいくつか報告されている⁽⁶⁾⁻⁽⁹⁾。これらの十分条件は, 手軽な判定やロバスト性の付与を可能ならしめるという意義をもつ。一方, ひとたびむだ時間 $\tau > 0$ が現れれば正確な安定条件はもはや代数的に得ることは不可能である。しかしながら, 任意のむだ時間に対して $p(s) + q(s)e^{-\tau s}$ の零点が複素開左半平面に存在するための必要十分条件 (delay-independent stability condition, 以下 dis 条件と略) については, 再び代数的判定が可能となる。けれども, 上記の $\tau = 0$ の場合のように代数的な十分条件は未だ整備されていないようである。小稿はこの空白を埋める試みである。

2. 主要な結果

$$p(s) + q(s)e^{-\tau s} \dots\dots\dots (1)$$

ただし, $p(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n (a_0 \neq 0)$,

$q(s) = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m$ を特性式とするむだ時間システムを考える。 $m \leq n-1$ のとき, (1) は Retarded 型であり, ここではこの場合を扱う。以下, 一般性を失うことなく $m = n-1$ とする。このとき, このシステムの dis 条件として次の結果が知られている。

〔補題 1〕(文献 (1)) $p(s)$ が Hurwitz 多項式であるとき, (1) のシステムが τ に関わりなく漸近安定であるための必要十分条件は,

$$|p(j\omega)| > |q(j\omega)|, \quad j^2 = -1, \quad \forall \omega \geq 0 \dots\dots\dots (2)$$

が成り立つことである。

この補題を用いるには, 二つの要請がある。 $p(s)$ の Hurwitz 性と条件 (2) である。これらを陽の形の代数的十分条件で置き換えたい。前者についてはすでに文献 (6)-(9) に示された結果があり, これらのいずれかを利用すればよいので, (2) 式について検討する。このため同式を次のように書きかえる。

$$F(\omega^2) := p(-j\omega)p(j\omega) - q(-j\omega)q(j\omega) > 0. \dots (3)$$

ここで ω^2 を x と置くと $F(x)$ は x についての n 次多項式となり, x^{n-i} の係数を $c_i (i = 1, \dots, n)$ とすれば,

$$F(x) = a_0^2 x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_n \dots (4)$$

と書くことができる。結局, (2) 式は多項式 $F(x)$ の $x \geq 0$ における正値性に帰着する。その簡単な十分条件の一つは,

$$c_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad c_n > 0 \dots\dots\dots (5)$$

である。こうして, (1) 式のシステムの dis の十分条件は, $p(s)$ の Hurwitz 性条件および (5) によって得られる。

以上の手順を例によって示そう。 $n = 4$ のとき, $p(s) = a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4$, $q(s) = b_0 s^3 +$

* 京都工芸繊維大学電子情報工学科
〒606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町
Department of Electronics and Information Science, Kyoto
Institute of Technology
Matsugasaki, Kyoto 606-8585

** 大阪府立大学電気電子システム学科
〒599-8531 堺市学園町
Department of Electric and Electronic Systems, Osaka
Prefecture University
Gakuencho, Sakai 599-8531

$b_1s^2 + b_2s + b_3$ としてこれらの係数で表された dis 条件を求める。 $p(s)$ の Hurwitz 性のほぼ自明な必要条件として $a_i > 0, i = 0, \dots, n$ とし, その十分条件として文献 (8) の結果を利用すると,

$$a_1a_2 - 3a_0a_3 \geq 0, a_2a_3 - 3a_1a_4 \geq 0 \dots\dots\dots(6)$$

となる。また (5) 式の条件は,

$$\begin{cases} a_1^2 - 2a_0a_2 - b_0^2 \geq 0 \\ a_2^2 + 2a_0a_4 - 2a_1a_3 - b_1^2 + 2b_0b_2 \geq 0 \\ a_3^2 - 2a_2a_4 + 2b_1b_3 - 2b_2^2 \geq 0 \\ a_4^2 - b_3^2 > 0 \end{cases}$$

となる。(6) および上式が求めるもので, これらは例えば, $p(s) = s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + 0.25$ および $q(s) = 0.6s^2 + 0.4s + 0.2$ によって満たされている。さらに高次の場合には項数こそ増えるものの上記と同様, 条件が一連の係数に関する二次同次不等式であらわされることに変わりはない。これらは, 文献 (7), (8), (9) の delay-free の場合に相似た特徴である。従って, これらの Hurwitz 安定性の十分条件と上に示した条件 (2) の判定法と組み合わせて用いれば, 次数 n にかかわらず二次同次不等式で表された dis 条件が得られる。とくに, $n = 1$ で $a_0 = 1$ の場合には, 本節の方法によりよく知られた dis 条件, $-a_1 > |b_0|$ が得られるが, これは必要十分条件となっている。

3. 留意点とむすび

本稿では, むだ時間の大きさに依存しない線形むだ時間システムの代数的十分条件を導いた。得られた方法は, 係数間の二次同次不等式で表現される点で, むだ時間を含まない通常の多項式に対する十分条件のいわば拡張とみなすことができる。以下にこの結果についてのいくつかのコメントを付記しておく。

1) 補題 1 は, $p(s)$ および $p(s) + q(s)$ の Hurwitz 安定性を要求している。これは, それぞれ $\tau \rightarrow 0, \tau \rightarrow \infty$ の両極端な場合を考えれば, 直感的にも明らかである。前者は仮定に含まれているが, (2) 式が $p(s) + q(s)$ の安定性を意味するのは, 左半平面上の虚軸を含む十分大きな領域で Rouché の定理⁽⁵⁾を適用することでも納得できる。

2) 条件 (2) は, $\|H(s)\|_\infty < 1$ と等価である。つまり, スモールゲイン条件を述べている。このことから, dis 条件のロバスト性に関する次のような一つの結果が従う。いま, $H(s)$ における不確かさが $p(s)$ と $q(s)$ の係数の値が区間の形で与えられるいわゆる区間プラントの場合を考えよう。このとき, $H(s)$ のゲイン $\|\cdot\|_\infty$ は, 高だか 16 個の端点プラントのそれで定まる⁽²⁾。 $p(s)$ の Hurwitz 性は 4 個の端点多項式で定まることが知られているから⁽¹⁰⁾, 結局補題 1 の条件は有限個の場合についてチェックすればよい。従って, 前節の条件の吟味もこれら有限個のシステムに対して行えばよい。

3) Hurwitz 性の十分条件や条件 (5) などの成立を数値的ではなく代数的に確かめる一つの方法は, 数式処理ソフト

ウエアを用いることである⁽³⁾。しかしながら, 条件式や数値以外の変数の数が多い場合にはあまり多くを期待することはできない。

4) ここでは, dis の条件として (2) 式の周波数領域条件に拠ったが, "純粋に"代数的な方法として二変数多項式の安定判別法⁽⁴⁾を用いることによって多項式の正值性に帰着し同様な結果を得る。この方法の多変数版に依拠すると複数個のむだ時間が存在する場合も扱い得る見込みがあるが, 条件が煩雑になることは否めない。

(平成 15 年 3 月 24 日受付)

文 献

- (1) S.I. Niculescu: Delay Effects on Stability, Springer-verlag, (2001)
- (2) T. Mori and S. Barnett: "On stability tests for some classes of dynamical systems with perturbed coefficients", *IMA J. Math. Contr. Inf.*, **5**, pp.117-128 (1988)
- (3) N. Munro(ed.): Symbolic Method in Control Systems Analysis and Design, IEE, (1999)
- (4) E.W. Kamen: "Linear systems with commensurate time delays: stability and stabilization independent of delay", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol.**27**, pp.367-375 (1982); corrections in the same journal, **28**, pp.248-249 (1983)
- (5) R.V. Churchill and J.W. Brown: Complex Variables and Applications, MacGraw-Hill, (1984)
- (6) A.V. Lipatov and N.I. Sokolov: "Some sufficient conditions for stability and instability of continuous linear stationary systems", *Automation & Remote Control*, Vol.**9**, pp.30-37 (1978)
- (7) T. Mori and H. Kokame: "Sufficient conditions for Hurwitz polynomials and their application to the stability of polytope of polynomials", *Int. J. Syst. Sci.*, **31-3**, pp.385-390 (2000)
- (8) T. Mori: "Argument-increase condition in Hurwitz polynomials and its application", *Trans. IEICE*, **J82-A**, pp.747-749 (1999)(in Japanese)
- (9) T. Mori and H. Kokame: "Some sufficiency criteria for Hurwitz stability of real polynomials", *T.IEE Japan*, **121-C**, pp.1488-1489 (2001)(in Japanese)
- (10) B.R. Barmish: New Tools for Robustness of Linear Systems, Macmillan, (1994)

森 武 宏 (正員) 1945 年生。1968 年京都大学工学部電子工学科卒業。1974 年同大学院博士課程修了, 同大学助手, 助教授を経て, 1990 年より京都工芸繊維大学教授。工学博士。主として制御系の解析の研究に従事。

小 亀 英 己 (正員) 1946 年生。1968 年京都大学工学部電子工学科卒業。1973 年同大学院博士課程修了, 同大学助手。1980 年大阪工業大学講師, 助教授, 教授を経て, 1995 年より大阪府立大学教授。工学博士。ロバスト制御の研究に従事。