スプライン関数で表される入力信号をもつ 状態関数空間の標本化基底の導出

非会員 中村 浩二* 非会員 河辺 徹**
正 員 寅市 和男* 非会員 片岸 一起**
非会員 夏 広詣***

Computation method of Sampling Bases for the State Functional Spaces with Input Signals Composed of Spline Functions

Koji Nakamura*, Non-member, Tohru Kawabe**, Non-member, Kazuo Toraichi*, Member,
Kazuki Katagishi**, Non-member, Guangyi Sha***, Non-member

A continuous-time signal in the real world must be approximated within a discrete-time signal space for processing in digital devices in many actual engineering applications. One of the effective discrete approximation methods is to employ signals composed of the spline functions. In order to use such signals effectively, however, the sampling bases of such signal spaces play an important role in signal processing. On the other hand, recently, it becomes commonplace to use digital controllers in control engineering field. Therefore, it is important to assume input signals be composed of piecewise polynomials in the state functional spaces. The existence of sampling bases in the state functional spaces had been shown in previous research conducted by the authors. Therefore, in this paper, a computation method of sampling bases in the state functional spaces by using spline functions of general degrees is proposed. Furthermore, the sampling bases composed by spline functions of 2nd and 3rd degrees are concretely calculated as practical examples.

キーワード：スプライン関数，標本化基底，状態関数空間

Keywords: spline function, sampling bases, state functional spaces

1. まえがき

現実世界における物理システムは、通常、連続時間システムとして捉えることができるが、信号処理の分野において、コンピュータをはじめとする電子機器によりこれらを取り扱うためには、信号やデータを離散化する必要がある。そ

こで、これまで様々な離散近似手法が提案されている^{(1) (2)}が、それらにはいくつかの問題点がある。例えば、元の連続時間信号が属する信号空間の定義があまり明確ではなく、その結果、連続信号と離散信号との間における変換関数をどのように評価するかということが問題となる。また、通常、離散化された信号を連続信号に変換する際には階段関数が用いられることが多いが、階段関数は各サンプリング間隔において自由度が1の関数であり、必ずしもその精度は十分とはいえない場合もある。

そこで、区分的多項式で構成されるスプライン関数によって表現される信号の空間を定義し、これを用いて、離散化された信号を連続信号に変換する方法が提案されている^{(3) (4)}。特に、現実の信号を精度よくかつ柔軟に扱うために、信号の滑らかさを表す連続微分可能性パラメータ m ($m = 1, 2, \dots$) を導入し、これに基づいて、 $m - 2$ 階までの導関数の存在とその連続性が保証された $m - 1$ 次の区分的多項式系によって信号空間を定義する Fluency 解析^{(5) (6)}の有効性が、D/A コンバーターなど各種の信号処理の応用分野において示されている⁽⁷⁾。Fluency 解析においては、定義された信

* 筑波大学大学院先端学際領域研究センター
〒305-8577 茨城県つくば市天王台 1-1-1
Center for Tsukuba Advanced Research Alliance, University of Tsukuba,
1-1-1 Tennodai, Tsukuba-shi, Ibaraki 305-8577
** 筑波大学大学院システム情報工学研究科
〒305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1
Graduate School of System and Information Engineering,
University of Tsukuba,
1-1-1 Tennodai, Tsukuba-shi, Ibaraki 305-8573
*** 筑波大学大学院システム情報工学研究科
〒305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1
Doctoral Program in System and Information Engineering,
University of Tsukuba,
1-1-1 Tennodai, Tsukuba-shi, Ibaraki 305-8573

号空間に対するインパルス応答としての標準化関数の存在性を示し、これを具体的に導出することが、信号空間の特徴解析を行う上で重要になる⁽⁶⁾⁽⁸⁾。

一方、自動制御の分野でも、デジタル技術の急速な発展に伴い、デジタルコントローラを用いて制御系を構成することが一般的となっている。しかし、通常制御対象は連続時間システムであるため、デジタルコントローラを組み込んで制御系を構成するには、入出力信号の連続/離散(A/D)、離散/連続(D/A)変換が必要となる。一般に制御系のモデルは、1960年初頭にKalmanによって提案された状態方程式によって表現される⁽⁹⁾ため、状態方程式によって表される状態関数空間における信号空間の特徴解析⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾を行うことは、デジタル制御系の構成において大変重要である。従来、一般にデジタル制御系を構成する際に用いられるホールダ(DA変換)は、フーリエ変換、シャノンのsinc関数に基づく標準化基底を用いるものであるが、これらはその定義から明らかなように、時間領域全域における信号の情報が必要であり、この結果、現在から先の未来の情報までも必要となるだけでなく、例えばある時刻の近傍で微小ノイズの影響などで変化するような信号を考えた場合、その影響が周波数領域全域に及ぶことになり、結果として実際に時間領域全域を対象としたホールダを構成することは不可能なため、打ち切りや帯域制限を行う必要がある。また、従来のフーリエ変換によるDA変換は時不変系(Time Invariant System)を想定しておりインパルス応答が固定されるため、対象が時変である系(Time Varying System)に対して正確な処理を行うことが難しい。これらの問題点に対し、前述のFluency解析を基礎とした解析を行うことで、取り扱う信号の性質に応じて適切な信号空間を用意することができ、様々な非定常信号にも対処が可能となるだけでなく、連続微分可能性パラメータ m によりインパルス応答を滑らかでかつ柔軟に変更して扱うことが可能となり、時変系に対しても有効であることが期待される。ただし、Fluency解析を用いたDA変換の場合には、理論上、因果律が崩れる場合が生じる。しかし、この問題に対しては連続微分可能性パラメータ m の値に応じて遅れ時間を適切に調整することにより、実用上、対処可能であることを付記しておく。

一方、著者らの研究グループではこれまでに、Fluency解析を用いた状態関数空間における信号空間の特徴解析の問題に対し、特にD/A変換のために、区分的多項式で構成される入力信号をもつ状態関数空間に対する標準化基底の存在性を示している⁽¹²⁾。しかし、これまでのところ、標準化基底が一意に存在することは証明されているが、基底の導出方法が確立されておらず、具体的な値を導出できていない。

そこで本論文では、区分的多項式によって表される入力信号をもつ状態関数空間における標準化基底の一般的な計算方法を提案するとともに、実際にこの計算方法を用いて、実用上良く用いられている2次($m=3$)と3次($m=4$)の

スプライン関数で表される信号に対する標準化基底の具体的な値を導出する。なお、本論文で取り扱う対象システムは1入出力スカラー系に限るが、これは、従来のフーリエ変換では等間隔標本で与えられている離散系の同型写像である標準化基底が存在しない場合があることが示されており、この結果、多変数標準化基底の定義とその存在性の一般的かつ厳密な保証が得られていないためである。このため、本論文はすでに確立されている1変数標準化基底の定義に基づく第一報である。

2. 準備

一般に、信号処理の対象として取り扱われる連続時間信号の空間は、内積が

$$(u, v)_{L_2} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\overline{v(t)}dt$$

で定義される代表的なヒルベルト空間

$$L_2(R) := \left\{ u \mid \int_{-\infty}^{\infty} |(u(t))|^2 dt < +\infty \right\}$$

とみなしうる。ここに R は実数の全体を表す。そこで、 $m-1$ 次のスプライン関数によって構成される信号空間を、この $L_2(R)$ の部分空間として取扱うことにする。これを $m-1$ 次のスプライン信号空間 mS と呼び、 mS は $m-1$ 次の mS のB-スプライン関数系

$$\begin{aligned} {}_{[b]}^m\psi_l(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \pi f h}{\pi f h} \right)^m e^{j2\pi f(t-lh-mh/2)} df, \\ l &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots; m = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1)$$

を基底として、空間は ${}^mS := \left[{}_{[b]}^m\psi_l(t) \right]_{l=-\infty}^{\infty}$ と定義できる⁽³⁾⁽⁴⁾。ただし、 h はサンプリング間隔を表す。関数系 $\left\{ {}_{[b]}^m\psi_l(t) \right\}_{l=-\infty}^{\infty}$ を mS のB-スプラインにおけるB-スプライン基底と呼ぶ。これは

$$\begin{aligned} {}_{[b]}^m\psi_l(t) &= \frac{m}{h^m} \sum_{p=0}^m \frac{(-1)^p (t - (l+p)h)_+^{(m-1)}}{p!(m-p)!} \\ l &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$(t-a)_+^{m-1} = \begin{cases} (t-a)^{m-1} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (3)$$

で表される $m-2$ 回連続微分可能な $m-1$ 次の区分的多項式であり、 $l=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ として以下の性質を持つ。

(1) 局所台性:

$${}_{[b]}^m\psi_l(t) = 0, t \notin (lh, (l+m)h)$$

(2) シフト不変性:

$${}_{[b]}^m\psi_l(t) = {}_{[b]}^m\psi_0(t-lh)$$

(3) 対称性:

$${}^m_{[b]}\psi_l(t) = {}^m_{[b]}\psi_{-m-l}(t)$$

さて, この B-スプライン基底を用いれば任意の $u \in {}^mS$ は

$$u = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda(k) {}^m_{[b]}\psi_k \dots\dots\dots (4)$$

$$\lambda = [\dots, \lambda[-1], \lambda[0], \lambda[1], \dots]^T \dots\dots\dots (5)$$

と表すことができる。

3. 状態関数空間における標準化基底の導出

前章の準備の下に, 本章では状態関数空間の定義を行い, 状態関数空間における標準化基底の導出を行う。導出の手順は, まず, 前章で述べた B-スプライン基底を用いた状態と係数の写像と, 求めるべき標準化基底による写像をそれぞれ導出する。そして, これらの写像を結びつける変換作用素を定義して, これを用いて標準化基底を表現する。

3.1 状態関数空間 次の状態方程式で表される安定な 1 次の線形システム Σ を考える。ただし, このシステムの入力 $u(t)$ は特に定常性を仮定せず, 一般的な非定常な信号をも含めて考えることとする。

$$\Sigma: \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), x(0) = 0, \dots\dots\dots (6)$$

ここで, F, G はスカラーであり, 安定性の仮定より $F < 0$ とする。また, このシステムの入力信号 u が $u \in {}^mS$ であると仮定する。このとき, $u \in {}^mS$ は L_2 ノルムの尺度で有界であり, $m = 1$ ならば区分的に連続, $m \geq 2$ なら連続であり, u の標本値列の l_2 ノルムは有界であることのみを仮定する。これにより, 状態関数空間は以下のように定義される。

[定義 3.1] (状態関数空間): 入力 u に対して状態 x のインパルス応答 $\gamma(t)$ は

$$\gamma(t) = \begin{cases} e^{Ft}G, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \dots\dots\dots (7)$$

と表され, これより, すべての x から成る状態関数空間 $K^{(m)}$ は以下の様に定義される。

$$K^{(m)} = \left\{ x(\cdot) \in L_2(\mathbf{R}) \left| x(t) = \int_0^t \gamma(t-\tau)u(\tau)d\tau \right. \right. \\ \left. \left. x(0) = 0, u(\cdot) \in {}^mS \right\} \dots\dots\dots (8)$$

3.2 スプライン基底による写像 2 章で述べたように, 任意の $u \in {}^mS$ は, B-スプライン基底を用いて

$$u = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda(k) {}^m_{[b]}\psi_k \dots\dots\dots (9)$$

$$\lambda = [\dots, \lambda[-1], \lambda[0], \lambda[1], \dots]^T \dots\dots\dots (10)$$

と表すことができる。一方, 次のように定義した関数系

$$\xi_l^{(m)}(t) \triangleq \int_0^{t-lh} e^{F\tau} G {}^m_{[b]}\psi_0(t-lh-\tau)d\tau \\ \dots\dots\dots (11)$$

を用意して, 以下ではこれを, 状態関数空間における B-スプライン基底と呼ぶ。前節の (8) 式の状態関数空間の定義より, 任意の $x \in K^{(m)}$ は, 同じ展開係数列 λ を用いて

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda(k) \xi_k^{(m)} \dots\dots\dots (12)$$

となる。そこで, x から λ を得る写像を $\varphi_{[K^{(m)*}]}$ で表せば, これは一意な線形写像であり,

$$\lambda = \varphi_{[K^{(m)*}]}(x) \dots\dots\dots (13)$$

の関係になる。

3.3 標準化基底による写像 まず, 時間軸上の標本点列を $\{t_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, ($t_k = kh, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) とする。また, $x \in K^{(m)}$ の, この標本点列による標本値列を

$$\mu(k) = x(t_k), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \dots\dots\dots (14)$$

とおく。文献⁽¹²⁾により, $K^{(m)}$ の標準化基底の存在性は示されているので, これを $\eta_k^{(m)}$ で表すことにすれば, x は

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu(k) \eta_k^{(m)} \dots\dots\dots (15)$$

となる。そこで, x から μ を得る写像を $\varphi_{[K^{(m)}]}$ で表せば, これもまた一意な線形写像であり,

$$\mu = \varphi_{[K^{(m)}]}(x) \dots\dots\dots (16)$$

となる。よって状態 x は, (12) 式の B-スプライン基底による係数列 λ を用いた表現と, (15) 式の標準化基底による係数列 η による表現の 2 種類の表現が可能である。そこで, λ と η の写像を

$$\lambda = M^{(m)}\mu \dots\dots\dots (17)$$

とし, この $M^{(m)}$ を変換作用素と考えれば, (16) 式の写像 $\varphi_{[K^{(m)}]}$ と前節の (13) 式の写像 $\varphi_{[K^{(m)*}]}$ により, $M^{(m)}$ は

$$M^{(m)} = \varphi_{[K^{(m)*}]}^{-1} \varphi_{[K^{(m)}]} \dots\dots\dots (18)$$

と定義され, それぞれ図 1 に示す相互関係があることがわかる。ここで, 図 1 中の l_2 は離散時間ヒルベルト空間を意

図 1 $\varphi_{[K^{(m)}]}, \varphi_{[K^{(m)*}]}, M^{(m)}$ の相互関係図
Fig. 1. Mutual relations between $\varphi_{[K^{(m)}]}, \varphi_{[K^{(m)*}]}$ and $M^{(m)}$.

味している。
ところで,

$$\delta_k[l] = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

とすれば, 任意の $x \in K^{(m)}$ に対して,

$$\begin{aligned} x &= \varphi_{[K^{(m)}]}^{-1} \varphi_{[K^{(m)}]}(x) \\ &= \varphi_{[K^{(m)}]}^{-1}(\mu) \\ &= \varphi_{[K^{(m)}]}^{-1} \left(\sum_{-\infty}^{\infty} \mu[k] \delta_k \right) \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} \mu[k] \varphi_{[K^{(m)}]}^{-1}(\delta_k) \dots \dots \dots (19) \end{aligned}$$

と表せる。この式と (15) 式を比較すれば

$$\eta_k^{(m)} = \varphi_{[K^{(m)}]}^{-1}(\delta_k), k = \pm 1, \pm 2, \dots, \dots \dots (20)$$

が得られる。 δ_k の l_2 ノルムは定義より明らかに有界であり ($\|\delta_k\|_{l_2} = 1 < +\infty$), それゆえ $\varphi_{[K^{(m)}]}^{-1}$ が一意な有界写像であれば, $\eta_k^{(m)}$ が一意に存在することがわかる。一方, $M^{(m)}$ の定義である (18) 式と (12), (13) 式より

$$\begin{aligned} \eta_k^{(m)} &= \varphi_{[K^{(m)}]}^{-1}(\delta_k) = \varphi_{[K^{(m)*}]}^{-1} M^{(m)}(\delta_k) \dots \dots \dots (21) \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} M^{(m)}(\delta_k)[l] \xi_l^{(m)}, k = 0, \pm 1, \dots, \\ &\dots \dots \dots (22) \end{aligned}$$

の関係が得られる。これは, 標準化基底 $\eta_k^{(m)}$ が $K^{(m)}$ の B-スプライン基底 $\xi_k^{(m)}$ の線形結合として表されることを示している。それゆえ, 標準化基底 $\eta_k^{(m)}$ は $M^{(m)}$ を具体的に求めることで導出できることがわかる。よって, 次節ではこの方法について述べる。

なお, 標準化基底 $\eta_k^{(m)}$ を具体的に導出するにあたっては, $\eta_k^{(m)}$ が一意に存在することが重要であり, そのためには, 前述のとおり, $\varphi_{[K^{(m)}]}^{-1}$ が一意な有界写像であることを示す必要がある。これに関しては, 文献 (6) の 3.2 節の補題 2 で示されている議論を用いることで可能となる。ただし, 本論文でとり扱う信号空間は状態関数空間であるため, 文献 (6) で取り扱う B-スプライン基底と比較して, (11) 式で表されるように, $G \int_0^{t-lh} e^{F\tau} d\tau$ が掛かった基底を用いている点異なる。しかし, 仮定よりここで対象とする線形システムは安定 ($F < 0$) であり, その結果, $G \int_0^{th} e^{F\tau} d\tau$ は有界となり, この点にさえ注意すれば, 文献 (6) における議論と同様の証明が可能であるため, ここでは詳しい証明は付録に譲る。

3.4 標準化基底の導出 本節では前節で求めた変換作用素 $M^{(m)}$ を用いて, 状態関数空間における標準化基底 $\eta_k^{(m)}$ を具体的に導出する。(17) 式より, 変換作用素 $M^{(m)}$ に関して, 入力を μ , 出力を λ と捉える。(14) 式の x に (12) 式を代入すれば, μ と λ には

$$\begin{aligned} \mu(k) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \lambda(l) \xi_l^{(m)}(t_k) \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \lambda(l) \int_0^{t-lh} e^{F\tau} G_{[b]}^m \psi_0^{(m)}(t-lh-\tau) d\tau \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda(l) \int_0^{(k-l)h} G e^{F\tau} G_{[b]}^m \psi_0^{(m)}((k-l)h-\tau) d\tau, \\ &\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \dots \dots \dots (23) \end{aligned}$$

の関係がある。 λ と μ の離散フーリエ変換をそれぞれ

$$N(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu(k) e^{-2\pi f t_k} \dots \dots \dots (24)$$

$$L(f) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \lambda(l) e^{-2\pi f t_l} \dots \dots \dots (25)$$

とおけば, (24) 式に (23) 式を代入することで,

$$\begin{aligned} N(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{l=-\infty}^{\infty} \lambda(l) \int_0^{(k-l)h} G e^{F\tau} \right. \\ &\quad \left. G_{[b]}^m \psi_0^{(m)}((k-l)h-\tau) d\tau \right\} e^{-j2\pi f t_k} \\ &= \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda(l) e^{-j2\pi f l h} \right\} \left\{ \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f p h} \right. \\ &\quad \left. \int_0^{ph} G e^{F\tau} G_{[b]}^m \psi_0^{(m)}(ph-\tau) d\tau \right\} \dots \dots \dots (26) \end{aligned}$$

を得る。ただし $p := k - l$ とおいた。この結果,

$$\begin{aligned} N(f) &= L(f) \left\{ \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f p h} \right. \\ &\quad \left. \int_0^{ph} G e^{F\tau} G_{[b]}^m \psi_0^{(m)}(ph-\tau) d\tau \right\} \dots \dots \dots (27) \end{aligned}$$

の関係があることがわかる。ここで, 上式では 2 章で述べたスプライン基底の対称性に基づき, Σ の加算区間を $p = 0$ からに変更した。さて $M^{(m)}$ の離散フーリエ変換を $M_f^{(m)}(f)$ で表すとすると

$$M_f^{(m)} = L(f)/N(f) \dots \dots \dots (28)$$

であるから, 以上の結果により,

$$\begin{aligned} M_f^{(m)}(f) &= \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} G e^{-j2\pi f p h} \right. \\ &\quad \left. \int_0^{ph} e^{F\tau} G_{[b]}^m \psi_0^{(m)}(ph-\tau) d\tau \right\}^{-1} \dots \dots \dots (29) \end{aligned}$$

を得る。 $M_f^{(m)}(f)$ が実際に求まるかどうかは, 上式右辺の値が有界であるかどうかにかかっているが, これに関しては文献 (12) に詳しい説明とともにその証明がすでに示されているためここでは省略する。

ここで, $M_f^{(m)}(f)$ の離散フーリエ逆変換を ${}^m\beta[l]$ とおけば,

$${}^m\beta[l] = h \int_{-1/2h}^{1/2h} M_f^{(m)}(f) e^{j2\pi flh} df, \\ l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \dots \dots (30)$$

であり, $\lambda = M^{(m)}(\mu)$ の演算に関して (30) 式を用いれば, 畳み込み定理により

$${}^m\lambda[l] = ({}^m\beta * \mu)[l] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} {}^m\beta[l-p]\mu[p], \\ l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \dots \dots (31)$$

と表される。それゆえ, 以下の命題が与えられる。

〔命題 3.1〕 状態関数空間 $K^{(m)}$ に有界な標準化基底 $\{\eta_k^{(m)}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ が一意に存在し, それは,

$$\eta_k^{(m)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} {}^m\beta[l-k]\xi_l^{(m)}, k = 0, \pm 1, \dots, \\ \dots \dots \dots (32)$$

で与えられる。

(証明) 式 (22) に式 (31) を代入すれば,

$$\eta_k^{(m)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} M^{(m)}(\delta_k)(l)\xi_l^{(m)} \\ = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} {}^m\beta[l-p](\delta_k)(p)\xi_l^{(m)} \\ = \sum_{l=-\infty}^{\infty} {}^m\beta[l-k](\delta_k)(p)\xi_l^{(m)}, \\ k = 0, \pm 1, \dots, \dots \dots (33)$$

が得られる。従って, 命題 3.1 が成り立つ。(証明終)
以上により, 状態関数空間 $K^{(m)}$ における標準化基底が導出された。

4. 標準化基底の具体例

本章では, 3 章で導出された状態関数空間における標準化基底の具体例として, 実用上最もよく用いられている 2 次と 3 次のスプライン関数による信号に対する標準化基底を示す。一例として, 状態方程式の係数を $F = -1, G = 1$ とし, サンプリング間隔を $h = 1$ とした場合について計算を行う。

2 次と 3 次のスプライン関数により構成される入力信号をもつ状態信号空間における標準化基底は, 命題 3.1 および (29), (30) 式より, 次のように計算できる。まず,

$$M_f^{(3)}(f) = \left(\sum_{p=0}^{\infty} G e^{-j2\pi f p h} \int_0^{p h} e^{F\tau} m_{[b]} \psi_0^{(3)}(p h - \tau) d\tau \right)^{-1} \quad (34)$$

$$M_f^{(4)}(f) = \left(\sum_{p=0}^{\infty} G e^{-j2\pi f p h} \int_0^{p h} e^{F\tau} m_{[b]} \psi_0^{(4)}(p h - \tau) d\tau \right)^{-1} \quad (35)$$

図 2 標準化基底を構成する関数の例

Fig. 2. An example of sampling function constructs sampling basis.

であり, これより,

$${}^3\beta[l] = h \int_{-1/2h}^{1/2h} M_f^3(f) e^{j2\pi flh} df, l = 0, \pm 1, \dots, \\ \dots \dots \dots (36)$$

$${}^4\beta[l] = h \int_{-1/2h}^{1/2h} M_f^4(f) e^{j2\pi flh} df, l = 0, \pm 1, \dots, \\ \dots \dots \dots (37)$$

と計算できる。よって

$$\eta_k^{(3)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} {}^3\beta[l-k]\xi_l^{(3)}, k = 0, \pm 1, \dots, \dots \dots (38)$$

$$\eta_k^{(4)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} {}^4\beta[l-k]\xi_l^{(4)}, k = 0, \pm 1, \dots, \dots \dots (39)$$

により標準化基底が求まる。なお, (34) 式および (35) 式中の積分計算については, 数値計算による近似ではなく, 文献 (13) で我々が提案した, 原始関数を導出した上で計算を行う精度の高い方法を用いる。

以上のように標準化基底が求まる。例として, $k = 0$, これを図 2 に示す。実線は $\eta_0^{(3)}$ を, 破線は $\eta_0^{(4)}$ を表している。

5. むすび

従来のフーリエ変換による DA 変換では取り扱いが難しい, 非定常な信号を対象として, スプライン関数によって表される入力信号をもつ状態関数空間における標準化基底の一般的な計算方法を Fluency 解析を応用して導出した。また, 実際にこの計算方法を用いて, 実用上良く用いられている 2 次と 3 次のスプライン関数で表される信号に対する標準化基底の具体例を示した。これにより, 任意の次数のスプライン関数から成る入力信号を持つ状態関数空間の標準化基底の導出が可能となり, 連続時間系と離散時間系の対応における状態関数空間の基本的特徴付けを与えたも

のとして位置付けられる。今後は、導出された標準化基底の特徴を解析するとともに、時変系に対する有効性を検討/解析することが課題である。また、本論文では、多変数標準化基底の定義とその存在性の一般的かつ厳密な保証が得られていないため、対象を1入出力のスカラー系に限ったが、提案した手法を多入出力多次元系へ拡張することも重要である。このためには、まず多次元系の入力信号空間における標準化基底を解析し、次に多次元状態空間における標準化基底の存在性を示すことが必要であると考えている。

謝 辞

本研究の一部は、科学技術振興機構 CREST プログラム、総務省戦略的情報通信研究開発推進制度ならびに文部科学省都市エリア産学官連携促進事業（筑波研究学園都市エリア）の助成を受けて行われている。ここに記して謝意を表します。また、本研究を進めるに当たって、貴重なご意見と有益なご議論をいただいた、産業技術総合研究所の大津展之フェローならびに同脳神経情報研究部門の栗田多喜夫副部門長に感謝いたします。さらに、貴重なご指摘をいただいた査読者の方にも感謝いたします。

（平成 15 年 7 月 9 日受付，平成 16 年 3 月 22 日再受付）

文 献

- (1) Z. kowalczyk: Discrete approximation of continuous-time systems: a survey, *IEE Proc.*, Vol.40, No.4, pp.264-278 (1993-4)
- (2) A.V. Oppenheim and R.W. Schaffer: Digital Signal Processing Prentice-Hall (1975)
- (3) I.J. Schoenberg: "Contribution to the problem of approximation of equidistant data by analytic function", *Quatr. Appl. Math.*, 4, Part A, pp.45-99; Part B, pp.112-141 (1946-4)
- (4) C. deBoor: A practical guide to splines, Springer-Verlag of equidistant data by analytic function. (1978)
- (5) M. Kamada, K. Toraichi, and R. Mori: "Periodic spline orthonormal bases" *J. Approx. Theory*, Vol.55, No.1, pp.27-38 (1988-1)
- (6) M. Kamada, K. Toraichi, and R. Mori: "Sampling bases for the signal spaces composed of spline functions", *T. IEICE Japan*, Vol.71-A, No.3, pp.875-881 (1988-3) (in Japanese)
鎌田 賢・寅市和男・森 亮一:「一般次数のスプライン関数からなる信号空間における標準化基底について」, 信学論 A, 71, 3, pp.875-881 (1988-3)
- (7) K. Toraichi and K. Nakamura: "Sampling function of degree 2 for DVD-Audio", *T. IEE Japan*, Vol.123-C, No.5, pp.928-937 (2003-5) (in Japanese)
寅市和男・中村浩二:「DVD-Audio 用二次の標準化関数」, 電学論 C, 123, 5, pp.928-937 (2003-5)
- (8) M. Kamada and K. Toraichi: "A note on connection between spline signal spaces and band-limited signal spaces", *T. IEICE Japan*, Vol.73-A, No.9, pp.501-518 (1990-9) (in Japanese)
寅市和男・鎌田 賢:「スプライン信号空間と帯域制限信号空間との関係について」, 信学論 A, 73, 9, pp.501-518 (1990-9)
- (9) R.E. Kalman: "A new approach to linear filtering and prediction problems", *T. ASME, J. Basic Eng.*, Vol.82D, No.1, pp.34-45 (1960)
- (10) H. Ishii, K. Katagishi, and K. Toraichi: "Discrete approximation model of a continuous-time system with piecewise polynomial input signals in the space of piecewise polynomials", *T. IEE Japan*, Vol.118-C, No.3, pp.366-375 (1998-3)
- (11) K. Toraichi, B. Sridadi, and H. Inaba: "A series of discrete-time models of a continuous-time system based on fluency signal approximation", *Int. J. Systems Sci.*, Vol.26, No.4, pp.871-881 (1995-4)

- (12) K. Toraichi and T. Horiuchi: "Isomorphism between Continuous and Discrete-time Systems with Input Signals of Piecewise Polynomials", *T. IEICE Japan*, Vol.77, No.5, pp.771-777 (1994-5)
- (13) G. Sha, T. Kawabe, K. Toraichi, K. Katagishi, and K. Nakamura: "A new approach to discrete approximation of a continuous-time system model based on spline function", *Journal of Computational Methods in Sciences and Engineering* (2004) (accepted)

付 録

1. $\varphi_{[K^{(m)}]}^{-1}$ が一意な有界写像であることの証明

$M^{(m)}$ が一意有界であることと $K^{(m)}$ に一意有界な標準化基底が存在することとは同値であることを以下の2つの手順 (i),(ii) に従って証明する。

(i) 「 $M^{(m)}$ が一意有界であるとき、 $K^{(m)}$ に一意有界な標準化基底が存在する」なる命題が成立することの証明：

式 (18) より $M^{(m)} \triangleq \varphi_{[K^{(m)*}]}^{-1} \varphi_{[K^{(m)}]}$ なので、

$$\varphi_{[K^{(m)}]}^{-1} = \varphi_{[K^{(m)*}]}^{-1} M^{(m)} \dots\dots\dots (付 1)$$

となる。ここで、 $M^{(m)}$ が一意有界なので、 $\varphi_{[K^{(m)*}]}^{-1}$ が一意有界であるとき、 $\varphi_{[K^{(m)}]}^{-1}$ が一意有界となる。以下、 $\varphi_{[K^{(m)*}]}^{-1}$ が有界であることを示す。

$\|\lambda\|_{l_2} < \infty$ のとき、

$$\begin{aligned} \|\varphi_{[K^{(m)*}]}^{-1}(\lambda)\|_{L_2}^2 &= \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \lambda(l) \zeta_l^{(m)}, \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda(k) \zeta_k^{(m)} \right) \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda(l) \cdot \overline{\lambda(k)} G^2 \int_0^\infty e^{F\tau_1} d\tau_1 \int_0^\infty e^{F\tau_2} d\tau_2 \\ &\quad \times \int_{-\infty}^\infty \begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix} \psi_0(t - \tau_1 - lh) \cdot \begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix} \psi_0(t - \tau_2 - kh) dt \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda(l) \cdot \overline{\lambda(k)} G^2 \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{F^2 + 4\pi^2 f^2} \left(\frac{\sin \pi f h}{\pi f h} \right)^{2m} e^{j2\pi f(k-l)h} df \\ &\leq \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda(l) \cdot \overline{\lambda(k)} (G^2/F^2) \cdot \begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix} \psi_{l-k} \left(\frac{mh}{2} \right) \end{aligned}$$

となるので、ここで、 $l - k = p$ とおけば、

$$\begin{aligned} \|\varphi_{[K^{(m)*}]}^{-1}(\lambda)\|_{L_2}^2 &\leq \sum_{-\frac{3}{2}m \leq p \leq \frac{m}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda(p+k) \overline{\lambda(k)} \cdot (G^2/F^2) \begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix} \psi_p \left(\frac{mh}{2} \right) \\ &\leq (2m+1) \cdot \frac{G^2}{hF^2} \max_{-\frac{3}{2}m \leq p \leq \frac{m}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda(p+k) \cdot \overline{\lambda(k)} \\ &\leq \frac{(2m+1)G^2}{hF^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda(k) \cdot \overline{\lambda(k)} \\ &= \frac{(2m+1)G^2}{hF^2} \|\lambda\|_{l_2}^2 < +\infty \end{aligned}$$

となり、 $\varphi_{[K^{(m)*}]}^{-1}$ が有界であることが示された。

以上のことから、 $M^{(m)}$ と $\varphi_{[K^{(m)*}]}^{-1}$ がともに有界なので、式 (付 1) より $\varphi_{[K^{(m)}]}^{-1}$ が有界であることが導ける。

一方、任意の $x \in K^{(m)}$ は、式 (11) で定義された状態関数空間 $K^{(m)}$ における基底 $\{\xi_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ を用いることにより、式 (12) のように一意に展開され得るので、 $\varphi_{[K^{(m)*}]}^{-1}$ なる作用素は双一意となっている。よって、 $\varphi_{[K^{(m)*}]}^{-1}$ は一意である。

以上のことから、 $M^{(m)}$ と $\varphi_{[K^{(m)*}]}^{-1}$ がともに一意有界なので、式 (付 1) より $\varphi_{[K^{(m)}]}^{-1}$ も一意有界となる。従って、文献 (6) の補題 1 より、 $K^{(m)}$ において有界な標準化基底が存在する。

(ii) 「 $K^{(m)}$ に一意有界な標準化基底が存在するとき、 $M^{(m)}$ は一意有界である」なる命題が成立することの証明：

まず、 $K^{(m)}$ における標準化基底 $\{\eta_l^{(m)}\}_{l=-\infty}^{\infty}$ が有界であるときに、 $\varphi_{[K^{(m)}]}^{-1}$ が有界であることを証明する。今「 $\eta_l^{(m)}$ が有界であるとき、 $\varphi_{[K^{(m)}]}^{-1}$ が有界でない」という命題が成立すると仮定する。このとき、「 $\varphi_{[K^{(m)}]}^{-1}$ が有界であるとき、 $\eta_l^{(m)}$ が有界でない」という命題も成立する。ところが、この場合、 $\varphi_{[K^{(m)}]}^{-1}$ が有界なので、

$$\exists M > 0 : \|\varphi_{[K^{(m)}]}^{-1}(\delta_l)\|_{L_2} = M \|\delta_l\|_{l_2} = M$$

なる関係が成立する。一方、

$$\|\eta_l^{(m)}\|_{L_2} = \|\varphi_{[K^{(m)}]}^{-1}(\delta_l)\|_{L_2} < M$$

なので、このことは、 $\eta_l^{(m)}$ が有界ではないことに反することになる。よって、 $\eta_l^{(m)}$ が有界ならば、 $\varphi_{[K^{(m)}]}^{-1}$ は有界となることが示された。この場合、 $K^{(m)}$ に一意な標準化基底が存在するので、 $\varphi_{[K^{(m)}]}^{-1}$ は双一意となっている。従って、 $\eta_l^{(m)}$ が一意有界ならば $\varphi_{[K^{(m)}]}^{-1}$ も一意有界となる。以上のことから、 $\varphi_{[K^{(m)}]}^{-1}$ は一意有界となっており、また、(i) より $\varphi_{[K^{(m)*}]}^{-1}$ も一意有界となっているので、式 (付 1) より $M^{(m)}$ は一意有界になっていることが導ける。

以上、(i),(ii) により、 $M^{(m)}$ が一意有界であることと $K^{(m)}$ に一意有界な標準化基底が存在することは同値であることが証明された。

中 村 浩 二 (非会員) 1999 年電気通信大学通信学部電子情報学卒業。1999-2002 年筑波大学大学院博士課程。修士 (工学)。2002 年同大学助手。主として信号解析、デジタルフィルタ設計に関する研究に従事。Fluency D.T.P. システムの開発により、2003 年平成 15 年度日本印刷学会論文賞ならびに平成 15 年度財団法人印刷朝陽会賞受賞。

河 辺 徹 (非会員) 1990 年京都大学大学院工学研究科応用システム科学専攻修士課程修了。同年徳島大学工学部助手、1995 年同大総合情報処理センター講師。1997 年筑波大学電子情報工学系講師を経て現在、同大システム情報工学研究科コンピュータサイエンス専攻助教授。博士 (工学)。主としてシステム制御理論、最適化理論等に関する研究に従事。

寅 市 和 男 (正員) 1971 年北海道大学大学院博士課程修了。同年電子技術総合研究所飯島特別研究室入所。1980 年筑波大学電子情報工学系助教授、1989 年同教授を経て、現在、同大学先端学際領域センターマルチメディア情報処理研究アспект教授。工学博士。主として智慧システムとその生体工学への応用に関する研究に従事。2002 年度科学技術振興財団 CREST プログラム、2002 年度総務省特定領域重点型研究開発、2002 年度文部科学省都市エリア産学官連携促進プログラム育成テーマ 1 の各研究代表者。1988 年 GoldenSound 賞、2000 年 Audio 銘機賞、2001 年同金賞をはじめとする Fluency オーディオシステムによるオーディオ関係の数々の賞を受賞。また、Fluency D.T.P. システムの開発により、2003 年平成 15 年度日本印刷学会論文賞ならびに平成 15 年度財団法人印刷朝陽会賞受賞。

片 岸 一 起 (非会員) 1980 年名工大・工・電子卒。1982 年筑波大学大学院修士課程了。1987 年筑波大学大学院博士了。同年国際電信電話 (株) 入社。以来、音声認識システム、ネットワーク・セキュリティ・システムの研究実用化に従事。この間、1990-1993 年 ATR 自動翻訳電話研究所へ出向。1999 年筑波大電子・情報工学系助教授。2004 年国立大学法人筑波大学大学院博士課程システム情報工学研究科リスク工学専攻助教授。現在、同大学学術情報メディアセンターにて、ネットワーク運用・管理技術、函数解析的アプローチによるポストシャノンとしてのフルーエンシ情報理論とそのマルチメディアシステムへの応用についての研究に従事。工博。情報処理学会会員。

夏 広 詣 (非会員) 1986 年中国吉林大学・数学科卒。1986 年北京経済管理幹部学院にて数値計算の研究に従事。1992 年北京経済管理幹部学院情報工学系講師。1999 年富山大学大学院修士課程了。2001 年筑波大学大学院博士課程システム情報工学研究科入学。現在同大在学中。主としてフルーエンシ情報理論とその状態関数空間への応用に関する研究に従事。