コスト保証制御理論によるマルチモデルシステムのロバスト安定化

正員 向谷 博明* 正員 大屋 英稔**

非会員 Hua Xu***

Robust Stabilization of Multimodeling Systems via Guaranteed Cost Control Theory

Hiroaki Mukaidani*, Member, Hidetoshi Oya**, Member, Hua Xu***, Non-member

This paper considers the robust stabilization of uncertain multimodeling systems. The guaranteed cost control technique is used to choose the design parameter which is included in the control gain. The ε -independent quadratically stabilizing controller is newly proposed. It is shown that if the reduced order algebraic Riccati equations (AREs) have positive definite stabilizing solution then the closed-loop uncertain multimodeling systems with the proposed controller are quadratically stable and have the cost bound. To show the effectiveness of the proposed algorithm, numerical example is included.

キーワード：マルチモデルシステム，2次安定化，コスト保証制御，マルチパラメータリカッチ方程式

Keywords: multimodeling systems, quadratic stabilization, guaranteed cost control, multiparameter algebraic Riccati equation (MARE)

1. はじめに

不確定要素を含む特異摂動システムのロバスト安定化に関してさまざまな研究が報告されている⁽¹⁾⁽²⁾。Shao ら⁽¹⁾は、システムに含まれる不確定要素に対して、 H_∞ ノルムによる上限を設定し、スモールゲイン定理⁽³⁾⁽⁴⁾を応用することによって2次安定であるための十分条件を導出している。鈴木ら⁽²⁾は、2次安定化のための制御則を新たに提案している。ここで、文献(1)、(2)のいずれも退化システムと境界層システムに分割して解析を行っている。このような解析手法を一般に特異摂動法⁽⁵⁾と呼んでいるが、この解析手法では、通常境界層システムの状態行列である A_{22} が非特異であると仮定される。したがって、境界層システム

の状態行列の非特異性が仮定されない場合、前置補償器によって A_{22} を非特異化することが行われる。しかしながら、設計に多くの手数を必要とする。また、コスト保証制御等、設計の最終段階でゲインを具体的に決定する場合、特異摂動法を利用することは非常に困難である。さらに、不確定要素 ΔA_{22} を含む特異摂動システムを扱う場合、 $A_{22} + \Delta A_{22}$ が非特異であると仮定しなければならない。したがって、システムの適用範囲を考慮すれば、不確定要素 ΔA_{22} を含んでの非特異性の仮定は保守的であると考えられる。

近年、文献(8)(9)で境界層システムの状態行列である A_{22} 、 $A_{22} + \Delta A_{22}$ が特異であっても2次安定化制御則が構築可能であることが示された。しかしながら、制御則に含まれる設計パラメータの決定方法については何も議論されていない。非常に最近、境界層システムの状態行列が非特異であるマルチモデルシステム⁽¹⁸⁾⁽¹⁹⁾に対して、制御則に含まれる設計パラメータを2次コスト保証制御により決定する方法が提案された⁽¹³⁾。ここで、マルチモデルシステムと特異摂動システムの違いとして、特異摂動システムより、マルチモデルシステムのほうが、より広範なシステムを記述できることがあげられる。例えば、特異摂動システムの場合、未知である微小な正のパラメータ ε が一つに限られるのに対して、マルチモデルシステムの場合、未知である微小な正のパラメータ ε_j が複数あっても状態空間表現できる特徴を有する⁽¹⁰⁾。マルチモデルシステムは、マルチエリア電力システム⁽¹⁸⁾、乗用車のアクティブサスペンション

* 広島大学大学院教育学研究科
〒739-8524 東広島市鏡山 1-1-1
Graduate School of Education,
Hiroshima University, 1-1-1, Kagamiyama, Higashi-Hiroshima 739-8524 Japan

** 電気通信大学システム工学科
〒182-8585 調布市調布ヶ丘 1-5-1
Department of Systems Engineering,
University of Electro-Communications, 1-5-1, Chofugaoka, Chofu 182-8585 Japan

** 筑波大学大学院ビジネス科学研究科
〒112-0012 文京区大塚 3-29-1
Graduate School of Business Sciences,
The University of Tsukuba, 3-29-1, Otsuka, Bunkyo-ku, Tokyo, 112-0012 Japan

ン制御⁽⁷⁾等に現れることが知られている。文献(13)でマルチモデルシステムに対するロバスト安定化問題は解かれたが、境界層システムの数が2であることから、一般の数 N に対しての拡張を考えることは重要であると考えられる。

本論文では、構造的な不確かさを含むマルチモデルシステムについて、特異摂動法を利用しないロバスト安定化問題を考える。特に、境界層システムの数 N の制限を取り払うという意味で、文献(13)の拡張を考える。はじめに、境界層システムの状態行列である A_{jj} 及び $A_{jj} + D_{jj}F_{jj}(t)E_{jj}$, $F_{jj}^T(t)F_{jj}(t) \leq I_{q_j}$, ($j = 1, \dots, N$)が非特異である仮定を行わないで、マルチモデルシステムが2次安定になるための十分条件を低次元のリカッチ方程式の可解条件として導出する。与えられたリカッチ方程式が正定対称解をもてば、不確定マルチモデルシステムは2次安定である。ここで注意しなければならないことは、リカッチ方程式が摂動項 ε_j ($j = 1, \dots, N$)を含むために、必要な解を求めることは数値計算上困難であるということである。このような数値計算上の困難な問題に対し、従来、リカッチ方程式の解を求めるためにニュートン法に基づくアルゴリズムが開発された⁽¹¹⁾。しかしながら、アルゴリズムの利用には摂動項 ε_j ($j = 1, \dots, N$)の値は既知でなくてはならない。通常これらの値は十分小さいということしか分からないことが多く、摂動パラメータ ε_j の情報がない状態で制御則を設計する必要がある。現在までに、摂動パラメータ ε_j を無視して低次元化した退化システムだけでロバスト安定化を実現しようとすれば、2次安定化不能な場合が存在することが知られている⁽²⁾。したがって、摂動パラメータ ε_j は十分小さい値であるが未知である場合、境界層システムを考慮した制御系設計が望まれる。以上を踏まえて、本論文では、境界層システムを考慮した近似制御則の構築を新規に提案する。基本的な設計手順は、まず、低次元化された0-オーダー方程式(リカッチ方程式)を導入することによって、正定対称かつ安定化解の存在性の判定を行う。続いて、0-オーダー方程式の解を求める。この0-オーダー方程式による解を利用して、 ε_j に依存しない近似制御則を構築する。したがって、 ε_j の情報なしで2次安定性を保証する制御則を構築できる。このような設計方法のアイディアは、ディスクリプタシステム論的なアプローチ⁽²⁰⁾に類似しているが、本論文では、システムモデルの段階から摂動項 ε_j を0にするのではなく、リカッチ方程式の解の構造を導出した後に摂動項 ε_j を0にすることから、ディスクリプタシステムを扱う上で必要なレギュラーかつインパルスフリー等の仮定を必要としない。

その他の大きな特徴として、文献(8)(9)では制御則に含まれる設計パラメータの決定方法について何も議論されていないことを考慮して、本論文では2次コスト保証制御の理論⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾を応用することによってパラメータを決定する。その結果、コストの上界を考慮した制御則を設計することが可能となる。さらに、文献(13)では、境界層システムの数 N しか考慮されていないが、本論文では一般の数 N に

対して適用可能である。

本論文では、以下の記号を用いる。block-diagは対角ブロック行列を表す。 $E[\cdot]$ は期待値を表す。 $\det M$ は正方行列 M の固有和を表す。 $\det M$ は正方行列 M の行列式を表す。 $\text{vec } N$ は行列 N の列ベクトル化を表す。行列 I_k は、 $I_k \in \mathbf{R}^{k \times k}$ の単位行列を表す。 $\otimes$ はクロネッカー積を表す。

2. 問題設定

以下の不確定マルチモデルシステムを考える。

$$\begin{aligned} \dot{x}_0(t) = & \left[A_{00} + \sum_{i=1}^N D_{0i}F_{ii}(t)E_{i0} \right] x_0(t) \\ & + \sum_{i=1}^N \left[A_{0i} + D_{0i}F_{ii}(t)E_{ii} \right] x_i(t) \\ & + \sum_{i=1}^N B_{0i}u_i(t) \dots\dots\dots (1a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_j \dot{x}_j(t) = & [A_{j0} + D_{jj}F_{jj}(t)E_{j0}]x_0(t) \\ & + [A_{jj} + D_{jj}F_{jj}(t)E_{jj}]x_j(t) \\ & + B_{jj}u_j(t), \quad j = 1, \dots, N \dots\dots\dots (1b) \end{aligned}$$

ここで、 ε_j は摂動項に相当する十分小さな正のパラメータであり、同じオーダーの大きさを満足するものと仮定する⁽¹⁰⁾⁻⁽¹²⁾⁽¹⁸⁾⁽¹⁹⁾。すなわち、

$$0 < \underline{k}_{ij} \leq \alpha_{ij} \leq \bar{k}_{ij} < \infty, \quad \alpha_{ij} := \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j} \dots\dots\dots (2)$$

$x_j(t) \in \mathbf{R}^{n_j}$, ($i = 0, 1, \dots, N$)は状態ベクトル, $u_j(t) \in \mathbf{R}^{m_j}$, ($i = 1, \dots, N$)は制御入力である。また、初期状態は $x_j(0) = x_j^0$ で与えられる。 $F_{jj}(t) \in \mathbf{R}^{p_j \times q_j}$ は、システムの不確かさを表す未知の時間関数行列であり、 $F_{jj}(t)$ の各要素はルベーグ可積分かつノルム条件 $F_{jj}^T(t)F_{jj}(t) \leq I_{q_j}$ を満足する。また、各係数行列は適当な次元をもつと仮定する。本論文では、文献(1),(2)と異なり、システム(1b)において、 $A_{jj} + D_{jj}F_{jj}(t)E_{jj}$ が任意の $F_{jj}(t)$ に対して非特異であると仮定しない[†]。

〔注意1〕 $A_{jj} + D_{jj}F_{jj}(t)E_{jj}$ が非特異であると仮定しないマルチモデルシステムに対して、前置補償器 $u_j(t) = H_{jj}x_j(t) + v_j(t)$ を付加することによって、境界層システムを非特異化する手法が提案されている⁽¹⁷⁾。しかしながら、境界層システムを非特異化した後前置補償器ゲイン H_{jj} を自由に決定できるという保障がないので、コスト保証制御のような問題には適用困難である。一方、本論文で提案される手法は、事前に境界層システムを非特異化する必要がないので、設計は容易であると考えられる。

マルチモデルシステムを簡略的に記述するために以下の行列を定義する。

[†] 境界層システムの状態行列が特異であるシステムの例として、柔軟宇宙構造物⁽⁶⁾等が存在する。

$$\begin{aligned}
\Pi_e &:= \text{block-diag} \left(\varepsilon_1 I_{n_1} \cdots \varepsilon_N I_{n_N} \right) \\
A_e &:= \begin{bmatrix} A_{00} & A_{0f} \\ \Pi_e^{-1} A_{f0} & \Pi_e^{-1} A_f \end{bmatrix} \\
A_{0f} &:= \begin{bmatrix} A_{01} & \cdots & A_{0N} \end{bmatrix} \\
A_{f0} &:= \begin{bmatrix} A_{10}^T & \cdots & A_{N0}^T \end{bmatrix}^T \\
A_f &:= \text{block-diag} \left(A_{11} \cdots A_{NN} \right) \\
B_e &:= \begin{bmatrix} B_0 \\ \Pi_e^{-1} B_f \end{bmatrix}, \quad B_0 := \begin{bmatrix} B_{01} & \cdots & B_{0N} \end{bmatrix} \\
B_f &:= \text{block-diag} \left(B_{11} \cdots B_{NN} \right) \\
D_e &:= \begin{bmatrix} D_0 \\ \Pi_e^{-1} D_f \end{bmatrix}, \quad D_0 := \begin{bmatrix} D_{01} & \cdots & D_{0N} \end{bmatrix} \\
D_f &:= \text{block-diag} \left(D_{11} \cdots D_{NN} \right) \\
F(t) &:= \text{block-diag} \left(F_{11}(t) \cdots F_{NN}(t) \right) \\
E &:= \begin{bmatrix} E_0 & E_f \end{bmatrix}, \quad E_0 := \begin{bmatrix} E_{10}^T & \cdots & E_{N0}^T \end{bmatrix}^T \\
E_f &:= \text{block-diag} \left(E_{11} \cdots E_{NN} \right)
\end{aligned}$$

3. 2次安定化制御則

まず，マルチモデルシステム (1) に対して，従来研究で報告されている通常の全次元での線形フィードバック

$$u(t) = Kx(t) \cdots \cdots \cdots (3)$$

ただし，

$$\begin{aligned}
x(t) &:= \begin{bmatrix} x_0^T(t) & \cdots & x_N^T(t) \end{bmatrix}^T \in \mathbf{R}^n, \quad n := \sum_{i=0}^N n_i \\
u(t) &:= \begin{bmatrix} u_1^T(t) & \cdots & u_N^T(t) \end{bmatrix}^T \in \mathbf{R}^m, \quad m := \sum_{i=1}^N m_i
\end{aligned}$$

による2次安定化可能を保証する以下の補題を紹介する⁽¹⁶⁾。

〔補題1〕 リカッチ方程式

$$\begin{aligned}
P_e A_e + A_e^T P_e - P_e (\mu^{-1} B_e B_e^T - D_e D_e^T) P_e \\
+ E^T E + \mu Q = 0 \cdots \cdots \cdots (4)
\end{aligned}$$

が正定対称解をもつとき，マルチモデルシステム (3) は2次安定化可能である。ここで， μ は正の任意の実数値をとる設計パラメータ， Q はある正定対称行列である。さらに，2次安定化制御則は

$$u(t) = -\frac{1}{2\mu} B_e^T P_e x(t) \cdots \cdots \cdots (5)$$

で与えられる。ただし，

$$P_e := \begin{bmatrix} P_{00} & P_{f0}^T \Pi_e \\ \Pi_e P_{f0} & \Pi_e P_f \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
P_{00} &= P_{00}^T, \quad \Pi_e P_f = P_f^T \Pi_e \\
P_{f0} &:= \begin{bmatrix} P_{10}^T & \cdots & P_{N0}^T \end{bmatrix}^T \\
P_f &:= \begin{bmatrix} P_{11} & \alpha_{12} P_{21}^T & \cdots & \alpha_{1N} P_{N1}^T \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & \alpha_{2N} P_{N2}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{(N-1)1} & P_{(N-1)2} & \cdots & \alpha_{(N-1)N} P_{N(N-1)}^T \\ P_{N1} & P_{N2} & \cdots & P_{NN} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

〔注意2〕 文献(16) では Q ではなく I_n であるが，文献(14) で使われている証明を利用すれば，同じく成立することが示される。

4. 一般化リカッチ方程式の解の構造

まず， A_e 等に含まれる ε_j^{-1} による悪条件を回避するため，一般化リカッチ方程式を紹介する⁽⁸⁾⁽⁹⁾。

〔補題2〕 リカッチ方程式 (4) は，以下の一般化リカッチ方程式 (6) を解くことに等価である。

$$\begin{aligned}
P^T A + A^T P - P^T (\mu^{-1} B B^T - D D^T) P \\
+ E^T E + \mu Q = 0 \cdots \cdots \cdots (6a)
\end{aligned}$$

$$P_e = \Phi_e^T P = P^T \Phi_e \cdots \cdots \cdots (6b)$$

ただし，

$$\begin{aligned}
\Phi_e &:= \begin{bmatrix} I_{n_0} & 0 \\ 0 & \Pi_e \end{bmatrix}, \quad A := \begin{bmatrix} A_{00} & A_{0f} \\ A_{f0} & A_f \end{bmatrix} \\
B &:= \begin{bmatrix} B_0 \\ B_f \end{bmatrix}, \quad D := \begin{bmatrix} D_0 \\ D_f \end{bmatrix} \\
P &:= \begin{bmatrix} P_{00} & P_{0f} \\ P_{f0} & P_f \end{bmatrix} \\
P_{0f} = P_{f0}^T \Pi_e &:= \begin{bmatrix} \varepsilon_1 P_{10}^T & \cdots & \varepsilon_N P_{N0}^T \end{bmatrix} \\
A = \Phi_e A_e, \quad B = \Phi_e B_e, \quad D = \Phi_e D_e
\end{aligned}$$

このとき，(5) で与えられる制御則 $u(t)$ は以下によって変形できる。

$$u(t) = -\frac{1}{2\mu} \begin{bmatrix} B_0^T & B_f^T \end{bmatrix} P x(t) \cdots \cdots \cdots (7)$$

はじめに一般化リカッチ方程式 (6a) の解の構造を求め。そこで，(6a) を各ブロックごとに計算する。

$$\begin{aligned}
f_1 &= P_{00}^T A_{00} + A_{00}^T P_{00} + P_{f0}^T A_{f0} + A_{f0}^T P_{f0} \\
&+ P_{00}^T S_{00} P_{00} + P_{f0}^T S_{f0} P_{f0} \\
&+ P_{00}^T S_{0f} P_{f0} + P_{f0}^T S_{0f}^T P_{00} + U_{00} = 0 \cdots (8a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2 &= A_{00}^T P_{f0}^T \Pi_e + A_{f0}^T P_f + P_{00}^T A_{0f} + P_{f0}^T A_f \\
&+ P_{00}^T S_{00} P_{f0}^T \Pi_e + P_{f0}^T S_{0f}^T P_{f0}^T \Pi_e \\
&+ P_{00}^T S_{0f} P_f + P_{f0}^T S_{f0} P_f + U_{0f} = 0 \cdots (8b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_3 &= P_f^T A_f + A_f^T P_f + \Pi_e P_{f0} A_{0f} + A_{0f}^T P_{f0}^T \Pi_e \\
&+ P_f^T S_f P_f + P_f^T S_{0f}^T P_{f0}^T \Pi_e \\
&+ \Pi_e P_{f0} S_{0f} P_f + \Pi_e P_{f0} S_{00} P_{f0}^T \Pi_e + U_f = 0 \\
&\dots\dots\dots (8c)
\end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
S &:= DD^T - \mu^{-1} BB^T = \begin{bmatrix} S_{00} & S_{0f} \\ S_{0f}^T & S_f \end{bmatrix} \\
S_{00} &:= D_0 D_0^T - \mu^{-1} B_0 B_0^T \\
&= \sum_{i=1}^N (D_{0i} D_{0i}^T - \mu^{-1} B_{0i} B_{0i}^T) \\
S_{0f} &:= D_0 D_f^T - \mu^{-1} B_0 B_f^T = \begin{bmatrix} S_{01} & \dots & S_{0N} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} D_{01} D_{11}^T - \mu^{-1} B_{01} B_{11}^T \\ \dots & D_{0N} D_{NN}^T - \mu^{-1} B_{0N} B_{NN}^T \end{bmatrix} \\
S_f &:= D_f D_f^T - \mu^{-1} B_f B_f^T \\
&= \text{block-diag} \left(\begin{bmatrix} S_{11} & \dots & S_{NN} \end{bmatrix} \right) \\
&= \text{block-diag} \left(\begin{bmatrix} D_{11} D_{11}^T - \mu^{-1} B_{11} B_{11}^T \\ \dots & D_{NN} D_{NN}^T - \mu^{-1} B_{NN} B_{NN}^T \end{bmatrix} \right) \\
U &:= E^T E + \mu Q = \begin{bmatrix} U_{00} & U_{0f} \\ U_{0f}^T & U_f \end{bmatrix} \\
U_{00} &:= \sum_{i=0}^N E_{i0}^T E_{i0} + \mu Q_{n_0} \\
U_{0f} &:= \begin{bmatrix} U_{01} & \dots & U_{0N} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} E_{10}^T E_{11} & \dots & E_{N0}^T E_{NN} \end{bmatrix} \\
U_f &:= \text{block-diag} \left(\begin{bmatrix} U_{11} & \dots & U_{NN} \end{bmatrix} \right) \\
&= \text{block-diag} \left(\begin{bmatrix} E_{11}^T E_{11} + \mu Q_{n_1} \\ \dots & E_{NN}^T E_{NN} + \mu Q_{n_N} \end{bmatrix} \right)
\end{aligned}$$

ここで, 一般性を失うことなく以下の仮定を導入する⁽¹⁸⁾⁽¹⁹⁾.

〔仮定 1〕 不等式 (2) で定義される α_{ij} に対して, $\varepsilon_i \rightarrow +0$, $\varepsilon_j \rightarrow +0$ であるとき, 極限值が存在する。すなわち,

$$\bar{\alpha}_{ij} = \lim_{\substack{\varepsilon_j \rightarrow +0 \\ \varepsilon_i \rightarrow +0}} \alpha_{ij} \dots\dots\dots (9)$$

このとき, リカッチ方程式 (8) において $\varepsilon_i \rightarrow +0$, $\varepsilon_j \rightarrow +0$ とすれば, 方程式 (10) を得る。ここで, 0-オーダ方程式 (10) の解を $\bar{P}_{ij}$ とおく。

$$\begin{aligned}
&\bar{P}_{00}^T A_{00} + A_{00}^T \bar{P}_{00} + \bar{P}_{f0}^T A_{f0} + A_{f0}^T \bar{P}_{f0} \\
&+ \bar{P}_{00}^T S_{00} \bar{P}_{00} + \bar{P}_{f0}^T S_f \bar{P}_{f0} \\
&+ \bar{P}_{00}^T S_{0f} \bar{P}_{f0} + \bar{P}_{f0}^T S_{0f}^T \bar{P}_{00} + U_{00} = 0 \dots\dots (10a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&A_{f0}^T \bar{P}_f + \bar{P}_{00}^T A_{0f} + \bar{P}_{f0}^T A_f \\
&+ \bar{P}_{00}^T S_{0f} \bar{P}_f + \bar{P}_{f0}^T S_f \bar{P}_f + U_{0f} = 0 \dots\dots\dots (10b) \\
&\bar{P}_f^T A_f + A_f^T \bar{P}_f + \bar{P}_f^T S_f \bar{P}_f + U_f = 0 \dots\dots\dots (10c)
\end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
\bar{P}_f &:= \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \bar{\alpha}_{12} \bar{P}_{21}^T & \dots & \bar{\alpha}_{1N} \bar{P}_{N1}^T \\ \bar{P}_{21} & \bar{P}_{22} & \dots & \bar{\alpha}_{2N} \bar{P}_{N2}^T \\ \bar{P}_{31} & \bar{P}_{32} & \dots & \bar{\alpha}_{3N} \bar{P}_{N3}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{P}_{(N-1)1} & \bar{P}_{(N-1)2} & \dots & \bar{\alpha}_{(N-1)N} \bar{P}_{N(N-1)}^T \\ \bar{P}_{N1} & \bar{P}_{N2} & \dots & \bar{P}_{NN} \end{bmatrix} \\
\bar{P}_{jj} &= \bar{P}_{jj}^T, \quad j = 1, \dots, N \dots\dots\dots (11)
\end{aligned}$$

ここで, リカッチ方程式 (10c) が非対称であることに注意されたい。しかしながら, 容易にリカッチ方程式 (10c) が正定対称安定化解を持つことが後に示される。その前に, 基本的な仮定を導入する。

〔仮定 2〕 ハミルトン行列 T_{jj} , $j = 1, \dots, N$ は非特異である。ここで,

$$T_{jj} := \begin{bmatrix} A_{jj} & S_{jj} \\ -U_{jj} & -A_{jj}^T \end{bmatrix}$$

一般化リカッチ方程式 (6a) と (10) の 0-オーダ解との関係を明らかにするために, 以下の集合を準備する。

$\Gamma_{f_j} := \{\mu > 0 \mid \text{リカッチ方程式 } \bar{P}_{jj} A_{jj} + A_{jj}^T \bar{P}_{jj} + \bar{P}_{jj} S_{jj} \bar{P}_{jj} + U_{jj} = 0 \text{ が正定対称安定化解を持つ.}\}$, $j = 1, \dots, N$

ただし, $\mu_{f_j} := \sup\{\mu \mid \mu \in \Gamma_{f_j}\}$

〔定理 1〕 仮定 1, 2 のもと, $0 < \mu < \mu_f := \min\{\mu_{f_1}, \dots, \mu_{f_N}\}$ を満足する全ての μ に対して, リカッチ方程式 (10c) は (12) で表現される正定対称安定化解 $\bar{P}_f$ を持つ。

$$\bar{P}_f^* := \text{block-diag} \left(\begin{bmatrix} \bar{P}_{11}^* & \dots & \bar{P}_{NN}^* \end{bmatrix} \right) \dots\dots\dots (12)$$

ここで $\bar{P}_{jj}^*$ は, それぞれリカッチ方程式

$$\bar{P}_{jj}^* A_{jj} + A_{jj}^T \bar{P}_{jj}^* + \bar{P}_{jj}^* S_{jj} \bar{P}_{jj}^* + U_{jj} = 0 \dots\dots\dots (13)$$

($j = 1, \dots, N$) の正定対称安定化解である。

(定理 1 の証明) 解 (12) をリカッチ方程式 (10c) に $\bar{P}_f^* \rightarrow \bar{P}_f$ として代入すれば簡単に $\bar{P}_f^* A_f + A_f^T \bar{P}_f^* + \bar{P}_f^* S_f \bar{P}_f^* + U_f = 0$ が成立することが分かる。さらに, 個々の解は $\bar{P}_f^* = \bar{P}_f^{*T} > 0$ を満足し, 安定化解でもあるので

$$\begin{aligned}
A_f + S_f \bar{P}_f^* &= \text{block-diag} \left(\begin{bmatrix} A_{11} + S_{11} \bar{P}_{11}^* \\ \dots & A_{NN} + S_{NN} \bar{P}_{NN}^* \end{bmatrix} \right)
\end{aligned}$$

を考慮すれば $A_f + S_f \bar{P}_f^*$ も安定であることが対角プロッ

ク行列の性質より分かる。 ■

〔注意 3〕 Petersen⁽¹⁵⁾ は、リカッチ方程式 (13) が正定対称安定化解をもつようなある正定数 μ_{f_i} が存在するならば、 $0 < \mu < \mu_{f_i}$ を満足するすべての μ に対して、リカッチ方程式 (13) が正定対称解をもつような μ_{f_i} が存在することを示している。

0-オーダ方程式 (10) は、以下のリカッチ方程式 (14) と等価であることが示されている⁽¹²⁾。

$$\bar{P}_{00}^* \mathcal{A} + \mathcal{A}^T \bar{P}_{00}^* + \bar{P}_{00}^* S \bar{P}_{00}^* + \mathcal{U} = 0 \cdots \cdots (14a)$$

$$\bar{P}_{j0}^* = \begin{bmatrix} \bar{P}_{jj}^* & -I_{n_j} \end{bmatrix} T_{jj}^{-1} T_{j0} \begin{bmatrix} I_{n_0} \\ \bar{P}_{00}^* \end{bmatrix} \cdots \cdots (14b)$$

$$\bar{P}_{jj}^* A_{jj} + A_{jj}^T \bar{P}_{jj}^* + \bar{P}_{jj}^* S_{jj} \bar{P}_{jj}^* + U_{jj} = 0 \cdots \cdots (14c)$$

ただし、

$$\mathcal{T} := \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{S} \\ -\mathcal{U} & -\mathcal{A}^T \end{bmatrix} = T_{00} - \sum_{j=1}^N T_{0j} T_{jj}^{-1} T_{j0}$$

$$T_{00} = \begin{bmatrix} A_{00} & S_{00} \\ -U_{00} & -A_{00}^T \end{bmatrix}, T_{0j} = \begin{bmatrix} A_{0j} & S_{0j} \\ -U_{0j} & -A_{0j}^T \end{bmatrix}$$

$$T_{j0} = \begin{bmatrix} A_{j0} & S_{0j}^T \\ -U_{0j}^T & -A_{0j}^T \end{bmatrix}, j = 1, \dots, N$$

ここで、公式 $\mathcal{T}$ は文献 (12) で詳しく述べられていることに注意されたい。次に、リカッチ方程式 (14a) において μ_s を以下のように定める。

$\Gamma_s := \{0 < \mu \mid \text{リカッチ方程式 (14a) が正定対称安定化解を持つ.}\}$

ただし、 $\mu_s := \sup\{\mu \mid \mu \in \Gamma_s\}$ 。

以上から、リカッチ方程式 (14a), (14c) は $0 < \mu < \bar{\mu}$ を満たすすべての μ に対して、正定対称安定化解をもつ。ただし、 $\bar{\mu} := \min\{\mu_s, \mu_f\}$ とする。

〔定理 2〕 仮定 1, 2 のもと、不等式 $0 < \mu < \bar{\mu} = \min\{\mu_s, \mu_f\}$ を満足する全ての μ に対して、リカッチ方程式 (14a), (14c) の正定対称安定化解が存在すると仮定する。このとき、 $(0, \|\varepsilon\|) \in \|\varepsilon\|$ に対して、リカッチ方程式 (4) が (15) で表現される正定対称解 P_e をもつような $\|\varepsilon\|$ が存在する。

$$P_e = \Phi_e \begin{bmatrix} \bar{P}_{00}^* + O(\|\varepsilon\|) & [\bar{P}_{f0}^* + O(\|\varepsilon\|)]^T \Pi_e \\ \bar{P}_{f0}^* + O(\|\varepsilon\|) & \bar{P}_f^* + O(\|\varepsilon\|) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{P}_{00}^* + O(\|\varepsilon\|) & [\bar{P}_{f0}^* + O(\|\varepsilon\|)]^T \Pi_e \\ \Pi_e [\bar{P}_{f0}^* + O(\|\varepsilon\|)] & \Pi_e [\bar{P}_f^* + O(\|\varepsilon\|)] \end{bmatrix} \cdots \cdots (15)$$

ただし、 $\varepsilon = [\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_N]$ 。

(定理 2 の証明) 証明は陰関数定理によって行われる。すなわち、 $\|\varepsilon\| = 0$ の近傍で方程式 (8) のヤコビ行列が非特異であることを示せば十分である。 $\|\varepsilon\| \rightarrow 0$ としたときの方程式 (8) のヤコビ行列を (16) に与える。

$$\mathbf{J} = \nabla \mathbf{F} = \frac{\partial(\text{vec } f_1, \text{vec } f_2, \text{vec } f_3)}{\partial(\text{vec } P_{00}, \text{vec } P_{f0}, \text{vec } P_f)^T} \Big|_{\|\varepsilon\|=0}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{00} & \mathbf{J}_{01} & 0 \\ \mathbf{J}_{10} & \mathbf{J}_{11} & \mathbf{J}_{12} \\ 0 & 0 & \mathbf{J}_{22} \end{bmatrix} \cdots \cdots (16)$$

ただし、

$$\mathbf{J}_{00} = I_{n_0} \otimes \hat{A}_{00}^T + \hat{A}_{00}^T \otimes I_{n_0}$$

$$\mathbf{J}_{01} = (I_{n_0} \otimes \hat{A}_{f0}^T) U_{n_0 \hat{n}} + \hat{A}_{f0}^T \otimes I_{n_0}$$

$$\mathbf{J}_{10} = \hat{A}_{0f}^T \otimes I_{n_0} = (\hat{A}_{0f}^T \otimes I_{n_0}) U_{n_0 n_0}$$

$$\mathbf{J}_{11} = \hat{A}_f^T \otimes I_{n_0}, \mathbf{J}_{22} = I_{\hat{n}} \otimes \hat{A}_f^T + \hat{A}_f^T \otimes I_{\hat{n}}$$

$$\hat{A}_{00} = A_{00} + S_{00} \bar{P}_{00}^* + S_{0f} \bar{P}_{f0}^*$$

$$\hat{A}_{f0} = A_{f0} + S_{0f}^T \bar{P}_{00}^* + S_f \bar{P}_{f0}^*$$

$$\hat{A}_{0f} = A_{0f} + S_{0f} \bar{P}_f^*, \hat{A}_f = A_f + S_f \bar{P}_f^*$$

$$\hat{A}_f = \text{block-diag} \left(\begin{matrix} H_{11} & \cdots & H_{NN} \end{matrix} \right)$$

$$H_{jj} := A_{jj} + S_{jj} \bar{P}_{jj}^*, \hat{n} := \sum_{i=1}^N n_i$$

次に、ヤコビ行列 (16) の行列式を計算する。

$$\det \mathbf{J}$$

$$= \det \mathbf{J}_{22} \cdot \det \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{00} & \mathbf{J}_{01} \\ \mathbf{J}_{10} & \mathbf{J}_{11} \end{bmatrix}$$

$$= \det \mathbf{J}_{22} \cdot \det \mathbf{J}_{11} \cdot \det (\mathbf{J}_{00} - \mathbf{J}_{01} \mathbf{J}_{11}^{-1} \mathbf{J}_{10})$$

$$= \det \mathbf{J}_{22} \cdot \det \mathbf{J}_{11} \cdot \det [I_{n_0} \otimes \hat{A}_0^T + \hat{A}_0^T \otimes I_{n_0}] \cdots \cdots (17)$$

ただし、 $\hat{A}_0 := \hat{A}_{00} - \hat{A}_{0f} \hat{A}_f^{-1} \hat{A}_{f0}$ 。明らかに $\hat{A}_f = A_f + S_f \bar{P}_f^*$ が安定であることから、 $\mathbf{J}_{jj}$, $j = 1, 2$ は非特異である。さらに、簡単な計算により $\mathcal{A} + S \bar{P}_{00}^* = \hat{A}_{00} - \hat{A}_{0f} \hat{A}_f^{-1} \hat{A}_{f0} = \hat{A}_0$ が示される。したがって、 μ_s の定義により $\hat{A}_0$ も安定である。以上より、 $\|\varepsilon\| = 0$ の近傍で $\det \mathbf{J} \neq 0$ であるので陰関数定理より構造式 (15) が示される。

証明の残りとして、 $\|\varepsilon\| = 0$ の近傍において解 P_e が正定対称解であることを示す。証明には、Schur Complement 補題を利用する⁽²³⁾。十分小さな $\|\varepsilon\|$ に対して、 $\bar{P}_f^*$ は正定対称行列であるので $\bar{P}_f^* + O(\|\varepsilon\|)$ の逆行列が存在する。したがって、Schur Complement 補題より

$$P_e > 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{P}_{00}^* + O(\|\varepsilon\|) > 0$$

$$\bar{P}_{00}^* - [\bar{P}_{f0}^* + O(\|\varepsilon\|)]^T \Pi_e [\bar{P}_f^* + O(\|\varepsilon\|)]^{-1}$$

$$\times [\bar{P}_{f0}^* + O(\|\varepsilon\|)]$$

$$= \bar{P}_{00}^* - \bar{P}_{f0}^{*T} \Pi_e [\bar{P}_f^*]^{-1} \bar{P}_{f0}^* + O(\|\varepsilon\|) > 0 \cdots \cdots (18)$$

が成立する。ここで、 $\bar{P}_{00}^*$, $\bar{P}_f^*$ がともに正定対称解であることを考慮すれば Schur Complement 補題を利用して $\forall \|\varepsilon\| \in [0, \|\varepsilon^*\|]$ の範囲を満足する $\|\varepsilon\|$ に対して、 $P_e > 0$

が成立するような $\|\varepsilon\|$ の存在が示される^{††}。 ■

5. ε_j に依存しない 2 次安定化制御則

4 章では、一般化リカッチ方程式 (6a) の解の構造を導出した。しかしながら、 $\varepsilon = [\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_N]$ の値が既知でないとき、一般化リカッチ方程式 (6a) の解 P を利用して制御則 (7) を構築することができない。そこで、本論文では ε に依存しない 2 次安定化制御則を提案する。制御則 (7) を成分で表示すれば、

$$u(t) = -\frac{1}{2\mu} \left[B_0^T \bar{P}_{00}^* + B_f^T \bar{P}_{f0}^* + O(\|\varepsilon\|) \right. \\ \left. B_f^T \bar{P}_f^* + O(\|\varepsilon\|) \right] x(t) \cdots \cdots \cdots (19)$$

であり、 ε が十分小さいとき (19) は以下の (20) に近似できる。

$$u_{\text{app}}(t) \\ = -\frac{1}{2\mu} \left[B_0^T \bar{P}_{00}^* + B_f^T \bar{P}_{f0}^* \quad B_f^T \bar{P}_f^* \right] x(t) \\ = -\frac{1}{2\mu} B^T \bar{P} x(t) = -\frac{1}{2\mu} B^T \begin{bmatrix} \bar{P}_{00}^* & 0 \\ \bar{P}_{f0}^* & \bar{P}_f^* \end{bmatrix} x(t) \\ = K_{\text{app}} x(t) \cdots \cdots \cdots (20)$$

ただし、 $\bar{P}_{00}^*$, $\bar{P}_{f0}^*$, $\bar{P}_f^*$ は 0-オーダ方程式 (14) の解である。したがって、 $\|\varepsilon\|$ が十分小さいとき、 ε_j に依存しない制御則 (20) は、制御則 (7) と同様に不確定要素 $F(t)$ を含むマルチモデルシステム (1) を 2 次安定化できると予想される。以下の定理は、 ε_j に依存しない制御則 (20) が、2 次安定化可能であることを保証するものである。

〔定理 3〕 仮定 1, 2 のもと、設計パラメータ $\bar{\mu} = \min\{\mu_s, \mu_f\}$ が存在すれば $0 < \mu < \bar{\mu} = \min\{\mu_s, \mu_f\}$ を満たすすべての μ 及び、 $(0, \|\varepsilon\|] \in \|\varepsilon\|$ に対して、マルチモデルシステム (1) が ε_j に依存しない制御則 (20) によって $F(t)$ に無関係に 2 次安定となるような $\|\varepsilon\|$ ($\leq \|\varepsilon\|$) が存在する。

定理 3 を証明するために、以下の補題を準備する⁽²¹⁾⁽²²⁾。

〔補題 3〕 $\mathcal{F}\mathcal{F}^T \leq I_n$ を満足する行列 $\mathcal{F}$ および任意の行列 $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ に対して、

$$\mathcal{G}\mathcal{F}\mathcal{H} + \mathcal{H}^T \mathcal{F}^T \mathcal{G}^T \leq \eta \mathcal{G}\mathcal{G}^T + \eta^{-1} \mathcal{H}^T \mathcal{H}$$

が成立する。ただし $\eta > 0$ は任意の実数である。

(定理 3 の証明) 状態フィードバック $u_{\text{app}}(t) = K_{\text{app}} x(t)$ による閉ループシステムは (21) で与えられる。

$$\dot{x} = [A_e + D_e F(t)E + B_e K_{\text{app}}] x(t) \cdots \cdots \cdots (21)$$

このとき、閉ループシステム (21) の 2 次安定性を示すために、リアプノフ関数の候補として

$$V(x(t)) = x^T(t) X_e x(t) \cdots \cdots \cdots (22)$$

^{††} $P_e > 0$ を満足するような $\|\varepsilon\|$ の範囲を求めることは、マルチモデルシステムが安定となるような $\|\varepsilon\|$ の範囲を求めることと同程度の難しい問題であるので、本論文では存在性のみ示している。

を用意する。閉ループシステム (21) に対して、軌道に沿っての関数 $V(x(t))$ の時間微分は以下で与えられる。

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = x^T(t) [X_e A_e + A_e^T X_e \\ - \frac{1}{2\mu} \bar{P}_e B_e B_e^T X_e - \frac{1}{2\mu} X_e B_e B_e^T \bar{P}_e] x(t) \\ + 2x^T(t) X_e D_e F(t) E x(t) \cdots \cdots \cdots (23)$$

ただし、 $\bar{P}_e := \Phi_e \bar{P}$ 。このとき、補題 3 を利用すれば直ちに以下の不等式 (24) を得る。

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) \\ < x^T(t) [X_e A_e + A_e^T X_e \\ - \frac{1}{2\mu} \bar{P}_e B_e B_e^T X_e - \frac{1}{2\mu} X_e B_e B_e^T \bar{P}_e \\ + \mu X_e D_e D_e^T X_e + \frac{1}{\mu} E^T E] x(t) \cdots \cdots \cdots (24)$$

ここで、 X_e を未知とするリカッチ方程式

$$X_e A_e + A_e^T X_e - \frac{1}{2\mu} \bar{P}_e B_e B_e^T X_e - \frac{1}{2\mu} X_e B_e B_e^T \bar{P}_e \\ + \mu X_e D_e D_e^T X_e + \frac{1}{\mu} E^T E + Q = 0 \cdots \cdots \cdots (25)$$

が正定対称解 X_e をもてば

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) < -x^T(t) Q x(t) < 0 \cdots \cdots \cdots (26)$$

がいえるので $V(x(t))$ は閉ループシステム (21) のリアプノフ関数となり 2 次安定が示される。そこで、リカッチ方程式 (25) の解 X_e の正定対称性を示す。リカッチ方程式 (4) に対して、全体を $\mu > 0$ で割って (27) のように変形する。

$$(\mu^{-1} P_e) A_e + A_e^T (\mu^{-1} P_e) \\ - \frac{1}{2\mu} P_e B_e B_e^T (\mu^{-1} P_e) - \frac{1}{2\mu} (\mu^{-1} P_e) B_e B_e^T P_e \\ + \mu (\mu^{-1} P_e) D_e D_e^T (\mu^{-1} P_e) \\ + \frac{1}{\mu} E^T E + Q = 0 \cdots \cdots \cdots (27)$$

2 つのリカッチ方程式 (25) 及び (27) に対して、 $\mu^{-1} P_e$ が X_e に相当するので陰関数定理を利用することによって容易に以下の関係式 (28) が導出される。

$$\mu X_e = \begin{bmatrix} \bar{P}_{00}^* + O(\|\varepsilon\|) & [\bar{P}_{f0}^* + O(\|\varepsilon\|)]^T \Pi_e \\ \Pi_e [\bar{P}_{f0}^* + O(\|\varepsilon\|)] & \Pi_e [\bar{P}_f^* + O(\|\varepsilon\|)] \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \|\mu X_e - P_e\| = O(\|\varepsilon\|) \cdots \cdots \cdots (28)$$

したがって、 $P_e > 0$ なので十分小さな $\|\varepsilon\|$ に対して $\mu X_e = P_e + O(\|\varepsilon\|)$ を考慮すれば $X_e > 0$ が示される。以上より閉ループシステム (21) は 2 次安定である。 ■

最後に設計パラメータ μ の決定方法について述べる。まず、以下の評価関数を定義する。

$$J = \int_0^\infty x^T(t) Q x(t) dt \cdots \cdots \cdots (29)$$

続いて, 不等式 (26) の両辺を 0 から ∞ まで積分することによって以下の不等式を得る。

$$x^T(\infty)X_ex(\infty) - x^T(0)X_ex(0) < -\int_0^\infty x^T(t)Qx(t)dt = -J \dots\dots\dots (30)$$

このとき, 閉ループシステム (21) が 2 次安定であることを考慮すれば $x(\infty) = 0$ である。したがって,

$$J = \int_0^\infty x^T(t)Qx(t)dt < x^T(0)X_ex(0) \dots\dots\dots (31)$$

ここで, 文献 (13) の結果から次の系が容易に得られる。
〔系 1〕 ε_j に依存しない制御則 (20) はコスト保証制御則である。

(系の証明) 提案された状態フィードバック (20) による閉ループシステム (21) に対して, 2 次安定性, 及びコストの上限 (31) が成立するので, 文献 (13) の Definition 2 から明らかに状態フィードバック (20) はコスト保証制御則である。 ■

状態フィードバック (20) がコスト保証制御則であることが示されたので, コスト J の上限値 $x^T(0)X_ex(0)$ を最小にすれば良いことが分かる。さらに, 関係式 (28) を考慮すれば

$$J < x^T(0)X_ex(0) = x^T(0) [\mu^{-1}P_e] x(0) = x_0^T(0) [\mu^{-1}\bar{P}_{00}^*] x_0(0) + O(\|\varepsilon\|)$$

したがって, $\|\varepsilon\|$ が十分小さいならば $x^T(0)X_ex(0)$ を最小化するより $x_0^T(0) [\mu^{-1}\bar{P}_{00}^*] x_0(0)$ を最小化するほうが, コストの値が $O(\|\varepsilon\|)$ 程度の差しかなく, さらにリカッチ方程式 (25) を新たに解く必要がなく行列の次元が小さいことを考慮すれば計算量の観点から非常に有利である。したがって本論文では $x_0^T(0) [\mu^{-1}\bar{P}_{00}^*] x_0(0)$ を μ に関して最小化することを提案する。ただし, $x_0^T(0) [\mu^{-1}\bar{P}_{00}^*] x_0(0)$ は初期値 $x_0(0)$ に依存するので, 初期値 $x_0(0)$ の依存性を排除するために, $x_0(0)$ は平均 0, 期待値 $E[x_0(0)x_0(0)^T] = I_{n_0}$ であると仮定する⁽¹⁴⁾。この場合, コスト保証の上限は,

$$E[J] = \int_0^\infty E[x^T(t)Qx(t)]dt < E[x^T(0)X_ex(0)] = \text{Tr} [\mu^{-1}\bar{P}_{00}^*] + O(\|\varepsilon\|) \dots\dots\dots (32)$$

となる。以上より, $\|\varepsilon\|$ が十分小さい場合, あるいは未知である場合, $\text{Tr} [\mu^{-1}\bar{P}_{00}^*]$ が最小となるような $\mu = \mu_{\text{app}}$ を求め, この $\mu = \mu_{\text{app}}$ に対して ε_j に依存しない制御則 (20) を設計すれば良い。

以下に, ε に依存しない 2 次安定化制御則の設計手順を紹介する。

Step 1. ある μ に対して, 公式 (14) で与えられる関係式 (ハミルトン行列 $\mathcal{T}$) を利用することによって, 行列 A, S, U を計算する。

Step 2. 2 分法によって, リカッチ方程式 (14a), (14c) の正定対称解が存在する μ の上限値 $\bar{\mu} = \min\{\mu_f, \mu_s\}$

を求める。ただし, $\bar{\mu}$ が使用計算機の計算精度よりも小さくなれば, マルチモデルシステム (1) は 2 次安定化不可能と判定する。

Step 3. $0 < \mu \leq \bar{\mu}$ の範囲でリカッチ方程式 (14a) の正定対称解 $\bar{P}_{00}^*$ を求める。ここで, リカッチ方程式 (14a) は ε_j を含まないので, 通常の方法で解くことができる。

Step 4. $f(\mu) := \text{Tr} [\mu^{-1}\bar{P}_{00}^*]$ が最小になる μ_{app} を求める。

Step 5. $\mu = \mu_{\text{app}}$ に対して, ε_j に依存しない制御則 (20) に 0-オーダ方程式 (14) で得られた解 $\bar{P}_{00}^*, \bar{P}_{f0}^*, \bar{P}_f^*$ を代入する。

6. 数 値 例

簡単な電気回路に対して上述のアルゴリズムを適用し, ε_j に依存しない制御則 (20) を設計する。図 1 の R - L - C 回路を考える。 L 及び R はそれぞれインダクタンスと抵抗である。 C_j ($j = 1, \dots, 9$) はコンデンサを表す。ここで, C_j は十分小さな未知な値をもつパラメータ, すなわち摂動項 ε_j であると想定する。このとき, システムの微分方程式は, マルチモデルシステムの表現を用いて, 以下のように与えられる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \varepsilon_1 \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_8 \dot{x}_8 \\ \varepsilon_9 \dot{x}_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} & \cdots & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ 1 & \frac{1}{R} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \frac{1}{R} & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_8 \\ u_9 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (34)$$

図 1 R - L - C Electric network.
Fig. 1. R - L - C Electric network.

$$u_{\text{exa}}(t) = K_{\text{exa}}x(t) = \begin{bmatrix} -2.8078e-03 & 5.5451 & 9.5762e-07 & 1.4365e-06 & 1.8920e-06 & 2.3806e-06 \\ -2.8001e-03 & 4.7889e-07 & 5.5451 & 1.4335e-06 & 1.9023e-06 & 2.4125e-06 \\ -2.7924e-03 & 4.7780e-07 & 9.5535e-07 & 5.5451 & 1.9055e-06 & 2.3764e-06 \\ -2.7848e-03 & 4.7663e-07 & 9.5342e-07 & 1.4293e-06 & 5.5451 & 2.3716e-06 \\ -2.7772e-03 & 4.7542e-07 & 9.5133e-07 & 1.4266e-06 & 1.9005e-06 & 5.5451 \\ -2.7697e-03 & 4.7418e-07 & 9.4911e-07 & 1.4237e-06 & 1.8973e-06 & 2.3684e-06 \\ -2.7621e-03 & 4.7294e-07 & 9.4682e-07 & 1.4206e-06 & 1.8936e-06 & 2.3641e-06 \\ -2.7546e-03 & 4.7170e-07 & 9.4448e-07 & 1.4174e-06 & 1.8896e-06 & 2.3608e-06 \\ -2.7472e-03 & 4.7045e-07 & 9.4211e-07 & 1.4140e-06 & 1.8854e-06 & 2.3568e-06 \\ & 2.8060e-06 & 3.2890e-06 & 3.7450e-06 & 4.2416e-06 & \\ & 2.8403e-06 & 3.3280e-06 & 3.7516e-06 & 4.2516e-06 & \\ & 2.8492e-06 & 3.3096e-06 & 3.7969e-06 & 4.2286e-06 & \\ & 2.8566e-06 & 3.3027e-06 & 3.7834e-06 & 4.2421e-06 & \\ & 2.8481e-06 & 3.3011e-06 & 3.7881e-06 & 4.2366e-06 & \\ & 5.5451 & 3.3066e-06 & 3.7761e-06 & 4.2374e-06 & \\ & 2.8375e-06 & 5.5451 & 3.7713e-06 & 4.2339e-06 & \\ & 2.8301e-06 & 3.3010e-06 & 5.5451 & 4.2299e-06 & \\ & 2.8245e-06 & 3.2945e-06 & 3.7611e-06 & 5.5451 & \end{bmatrix} x(t) \dots \dots \dots (33a)$$

$$u_{\text{app}}(t) = K_{\text{app}}x(t) = \begin{bmatrix} -2.7773e-03 & 5.5451 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2.7773e-03 & 0 & \dots & 5.5451 \end{bmatrix} x(t) \dots \dots \dots (33b)$$

ここで、インダクタンスに流れる電流を $I := x_0$ と定義する。また、 $V_j := x_j$, ($j = 1, \dots, 9$) はコンデンサ C_j 間の電圧であると定義する。さらに、 $E_j := u_j$, ($j = 1, \dots, 9$) は制御入力である。本論文ではインダクタンス及び抵抗のノミナル値 (公称値) をそれぞれ $L = 100$ [mH] and $R = 10$ [Ω] であるとする。コンデンサ $C_j := \varepsilon_j$, ($j = 1, \dots, 9$) は十分に小さな値であるが、その値は未知であることに注意されたい。

良く知られているように インダクタンス L は磁束・材料・温度によって特性が変化したり、損失やひずみ、あるいは磁気飽和が発生し品質が劣化する。したがって、これらを不確定要素と考え、本論文ではインダクタンスの値がノミナル値から 10% 程度の誤差を含むと想定する。このときの L は以下の不等式によって表現される。

$$\frac{1}{L} = \frac{100}{10 + \delta_L(t)} = 9.55 + 0.45 \times \Delta_L(t),$$

$$0 \leq \delta_L(t) \leq 1.0, |\Delta_L(t)| \leq 1.0.$$

以上より、マルチモデルシステム (1) に対応する行列は以下のように与えられる。

$$A_{00} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, A_{0j} = \begin{bmatrix} -9.55 \end{bmatrix}$$

$$A_{j0} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, A_{jj} = \begin{bmatrix} 0.1 \end{bmatrix}$$

$$B_{0j} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, B_{jj} = \begin{bmatrix} -0.1 \end{bmatrix}$$

$$D_{0j} = \begin{bmatrix} 0.45 \end{bmatrix}, D_{jj} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$E_{j0} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, E_{jj} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, Q_{jj} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{jj} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, F_{jj}(t) = \Delta_L(t), j = 1, \dots, 9$$

まず、摂動項 $C_j = \varepsilon_j$ の情報なしで制御則 (20) を設計する。

前章で示された設計手順に従い、 μ_f, μ_s を求めればそれぞれ $\mu_f = 4.9383 \times 10^{-2}$, $\mu_s = 4.9383 \times 10^{-2}$ である。ただし、 $\mu_{f_j} = 4.9383 \times 10^{-2}$, ($j = 1, \dots, 9$) である。したがって、 $0 < \mu < \bar{\mu} = \min\{\mu_f, \mu_s\} = 4.9383 \times 10^{-2}$ の範囲でリカッチ方程式 (4) は正定対称解を持つことが分かる。最適解との比較を行うために、仮に摂動項 $C_j = \varepsilon_j$ の値が、 $\varepsilon_1 := 1.0000 \times 10^{-5}$, $\dots$, $\varepsilon_9 := 9.0000 \times 10^{-5}$ であると仮定する。このとき、MATLAB の are を利用してリカッチ方程式 (4) が正定対称解を持つための μ の範囲を探索できるので、実際計算してみれば $0 < \mu < \mu_{\text{exa}} = 4.9383 \times 10^{-2}$ が得られた。したがって、 ε_j が十分小さければ、 ε_j に依存しないリカッチ方程式 (14) でリカッチ方程式 (4) が正定対称解を持つための μ の範囲を探索できることが分かる。

続いて、近似コスト $f(\mu) := \text{Tr} [\mu^{-1} \bar{P}_{00}^*]$ の最小値を求める。その結果、 $0 < \mu < \bar{\mu} = 4.9383 \times 10^{-2}$ の範囲で、 $\mu_{\text{app}} = 2.0043 \times 10^{-2}$ のとき最小値 $f(\mu_{\text{app}}) = 1.1616 \times 10$ をとる。一方、MATLAB の are を利用した場合の正確なコスト $F(\mu) := \text{Tr} [\mu^{-1} P_e]$ の最小値は、 $\mu^* = 2.0043 \times 10^{-2}$ のとき $F(\mu^*) = 1.1666 \times 10$ である。以上より、 ε_j が十分小さければ、コストの最小値にほとんど差が見られないことがわかる。特に、この数値例では、 $\mu_{\text{app}} = 2.0043 \times 10^{-2}$ は $\mu^* = 2.0043 \times 10^{-2}$ に対して 10^{-6} オーダで一致していることは大変興味深い。

最後に、制御則の近似の程度を比較するために $\mu = \mu^* = \mu_{\text{app}} = 2.0043 \times 10^{-2}$ のときの摂動パラメータを含む正確な制御則 (5) および ε_j に依存しない近似制御則 (20) をそれぞれ (33) に与える。その結果、 $O(\|\varepsilon\|)$ の精度で近似できていることが確認される。

数値例から、文献 (16) と比較して、本論文で提案された

設計手法では、パラメータ ε_j の情報を必要としない。さらに、計算に必要な行列の次元は 10 ではなく 1 であるため、計算次元の低減化に成功している。

7. ま と め

本論文は、1 ブロックタイプの構造的不確かさを含むマルチモデルシステムに対して、システムを 2 次安定にする ε_j に依存しない制御則を新たに設計した。本論文の大きな特徴は、文献 (1), (2) と異なり、境界層システムの状態行列である $A_{jj} + \Delta A_{jj}$ が非特異である仮定を必要としない。さらに、低次元化した ε_j に依存しないリカッチ方程式の可解性を判定するだけで 2 次安定性を判定できる点である。以上から、マルチモデルシステムの安定化可能であるクラスを境界層システムの状態行列が特異であるクラスにも拡張できたところに本論文の有用性が存在する。さらに、従来のロバスト安定化理論⁽¹⁴⁾⁽¹⁶⁾を適用できるシステムの範囲をマルチモデルシステムにまで拡張することに成功した。その他の本論文での特徴として、コスト保証制御の理論を応用することによって、設計パラメータを決定できる点があげられる。従来 (8) (9) では、設計パラメータの決定方法に関して、何ら報告がなかったことを考慮すれば、新規な結果であると考えられる。さらに、文献 (13) では、境界層システムの数 2 しか考慮されていないが、本論文では一般の数 N に対して適用可能である。また、計算次元が退化システム及び境界層システムと同じ次元で制御則が設計できるので有用であると考えられる。以上の特徴は数値例によって確認された。

最後に今後の研究課題を考える。本論文で扱われているマルチモデルシステムは境界層システムが非干渉化されている特別なシステムである。したがって、本論文の手法が適用できるマルチモデルシステムには制限がある。すなわち、得られた結果は適用できるシステムに限られるという意味で必然的に保守的である。そこで、境界層システムの干渉項を考慮した近似制御則の設計を行う必要がある。この保守性は将来考慮すべき問題であろう。

本論文の修正にあたり、有益なご指摘、ご指導を頂きました査読者に感謝いたします。

(平成 16 年 2 月 3 日受付, 平成 16 年 8 月 11 日再受付)

文 献

- (1) Z.H. Shao and M.E. Sawan: "Robust stability of singularly perturbed systems", *Int. J. Control*, Vol.58, No.6, pp.1469–1476 (1993–6)
- (2) M. Suzuki, S. Kobayashi, and Y. Ando: "Quadratic stabilization of singularly perturbed systems", *Trans. SICE*, Vol.32, No.11, pp.1493–1500 (1996–11) (in Japanese)
鈴木・小林・安藤: "特異摂動システムの二次安定化", 計測自動制御学会論文集, **32**, 11, pp.1493–1500 (1996–11)
- (3) C.A. Desoer and M. Vidyasagar: *Feedback Synthesis: Input-Output Properties*, Academic Press, New York (1975)

- (4) K. Zhou: *Essentials of Robust Control*, Prentice-Hall, New Jersey (1998)
- (5) P.V. Kokotovic, H.K. Khalil, and J. O'Reilly: *Singular Perturbation Methods in Control, Analysis and Design*, Academic Press, New York (1986)
- (6) D. Moerder and A. Calise: "Two-time scale stabilization of systems with output feedback", *AIAA J. Guidance, Control and Dynamics*, Vol.8, pp.731–736 (1985)
- (7) M. Salman, A. Lee, and N. Boustany: "Reduced order design of active suspension control", *Trans. ASME, J. Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol.112, pp.604–610 (1990)
- (8) H. Mukaidani and K. Mizukami: "Robust stabilization of singularly perturbed systems with uncertainties", *Trans. IEE Japan*, Vol.119–D, No.2, 159–167 (1999–2) (in Japanese)
向谷博明・水上: "不確定要素を含む特異摂動システムのロバスト安定化", 電学論誌 D, **119**, 2, pp.159–167 (1999–2)
- (9) H. Mukaidani, H. Xu, and T. Okita: "Robust stabilization of non-standard singularly perturbed systems with uncertainties", *Proc. 14th IFAC World Congress*, Vol.G, pp.151–156, Beijing (1999)
- (10) H. Mukaidani: "Near-Optimal Control for Multimodeling Systems", *Trans. SICE*, Vol.37, No.10, pp.960–969 (2001–10) (in Japanese)
向谷博明: "マルチモデルシステムのための準最適制御", 計測自動制御学会論文集, **37**, 10, pp.960–969 (2001–10)
- (11) H. Mukaidani, T. Shimomura, and H. Xu: "Near-optimal control of linear multiparameter singularly perturbed systems", *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol.47, No.12, pp.2051–2057 (2002–12)
- (12) H. Mukaidani: "Near-optimal Kalman filters for multiparameter singularly perturbed linear systems", *IEEE Trans. Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, Vol.50, No.5, pp.717–721 (2003–5)
- (13) H. Mukaidani, H. Oya, and H. Xu: "Guaranteed cost control of multimodeling systems, 2004 American Control Conference (ACC)", pp.3303–3308, Boston (2004)
- (14) I.R. Petersen and D.C. McFarlane: "Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems", *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol.39, No.9, pp.1971–1977 (1994–9)
- (15) I.R. Petersen: "A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems", *Systems & Control Letters*, Vol.8, No.3, pp.351–357 (1987–3)
- (16) P.P. Khargonekar, I.R. Petersen, and K. Zhou: "Robust stabilization of uncertain linear systems: quadratic stability and H_∞ control theory", *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol.35, No.3, pp.356–361 (1990–3)
- (17) H.K. Khalil: "Feedback control of nonstandard singularly perturbed systems", *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol.34, No.10, pp.1052–1060 (1989–10)
- (18) H.K. Khalil and P.V. Kokotovic: "Control strategies for decision makers using different models of the same system", *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol.23, No.2, pp.289–298 (1978–2)
- (19) H.K. Khalil and P.V. Kokotovic: "Control of linear systems with multiparameter singular perturbations", *Automatica*, Vol.15, No.2, pp.197–207 (1979–2)
- (20) Y.-Y. Wang, P.M. Frank, and N.E. Wu: "Near-optimal control of nonstandard singularly perturbed systems", *Automatica*, Vol.30, No.2, pp.277–292 (1994–2)
- (21) L. Yu, G. Chen, and J. Chu: "Optimal guaranteed cost control of linear systems: LMI approach", *Proc. 14th IFAC World Congress*, Vol.G, pp.541–546, Beijing (1999)
- (22) K. Zhou and P.P. Khargonekar: "Robust stabilization of linear systems with norm bounded time-varying uncertainty", *Systems & Control Letters*, Vol.10, No.1, pp.17–20 (1988–1)
- (23) Z. Pan and T. Basar: " H_∞ -Optimal control for singularly perturbed systems-Part I. Pperfect state measurements", *Automatica*, Vol.29, No.2, pp.401–423 (1993–2)

向 谷 博 明 (正員) 1969 年 11 月 14 日生。1992 年広島大学総合科学部数理情報学専攻卒業。94 年同大学大学院工学研究科情報工学専攻博士課程前期修了。97 年 10 月同大学大学院工学研究科情報工学専攻博士課程後期修了。博士 (工学)。98 年 4 月広島市立大学情報科学部助手。2002 年 4 月広島大学大学院教育学研究科講師。現在に至る。主として、ロバスト制御, アルゴリズムに関する研究に従事。IEEE, 計測自動制御学会, 機械学会などの会員。

大 屋 英 稔 (正員) 1973 年 9 月 30 日生。1996 年 3 月電気通信大学電気通信学部電子情報学科卒。2003 年 3 月同大学大学院電気通信学研究科電子情報学専攻博士後期課程修了。同年 4 月電気通信大学システム工学科助手となり, 現在に至る。最適制御, ロバスト制御に関する研究に従事。博士 (工学)。IEEE, システム制御情報学会, 電子情報通信学会, 日本機械学会の各会員。

Hua Xu (Non-member) received his B.Eng. and M.Eng. degrees in electrical engineering from Northeastern University, China, in 1982 and 1985, respectively, and his Dr.Eng. degree in information engineering from Hiroshima University, Japan, in 1993. He worked with Hiroshima University as a Research Associate and Associate Professor from 1993 to 1998. Since 1998, he has been with the Graduate School of Business Sciences, the University of Tsukuba, Tokyo, Japan, as an Associate Professor, and Professor. His current research interests include dynamic optimization, dynamic games and their applications in business aspects of systems management, marketing, economics and finance. He is a member of International Society of Dynamic Games and some other academic societies of Japan.