不均等間隔標本補間に対する標本化関数

非会員 高橋 知幸* 非会員 河辺 徹**
 非会員 中村 浩二** 正員 寅市 和男**
 非会員 片岸 一起** 非会員 大津 展之***

Fluency Sampling Function for Interpolating Non-Uniform Samples

Tomoyuki Takahashi*, Non-member, Tohru Kawabe**, Non-member, Koji Nakamura**, Non-member,
 Kazuo Toraichi**, Member, Kazuki Katagishi**, Non-member, Nobuyuki Otsu***, Non-member

Interpolation of non-uniform samples is required for various cases of signal processing. In such a case, we often use sampling functions to interpolate signals. We show one example of sampling functions to interpolate signals from non-uniform samples, inheriting the properties of the Fluency sampling functions introduced by Toraichi et al. The proposed sampling function is locally supported and composed with piecewise polynomial functions of degree 2 as the Fluency sampling function. In this paper, we extend the Fluency sampling function and derive the non-uniform sampling function. By using this sampling function, we get smooth and small undulate signal from arbitrary samples.

キーワード：不均等間隔標本，補間，フルーエンシ標本化関数

Keywords: Non-uniform samples, Interpolation, Fluency sampling function

1. まえがき

自然界には様々な信号が存在しており，これを処理する際には観測された情報をどのような関数として取り扱うべきかを考慮する必要がある。通常，観測した信号は計算機を介して処理したり保存したりするために，信号は均等間隔の標本値列として扱われるが，この均等間隔標本列から再び連続信号を得るためにはある適当な関数を用いてこれらの標本点間を補間する必要がある。従来，与えられた標本を滑らかに補間する関数としては，無限階連続微分可能な Shannon の標本化関数⁽¹⁾や，3次スプライン関数⁽²⁾などが挙げられる。しかしながら，音声や映像といった具体

の対象に関わらず，無限階連続微分可能が保証されなかったり，3次以上の高次関数ではなく，1階のみ微分可能な2次関数による補間波形を用いても，実用上は十分効果的な補間結果が得られる場合も多い。

著者らの一人は，補間という問題において信号を適切に取り扱うための理論として，フルーエンシ解析をこれまでに提案してきている⁽³⁾⁽⁴⁾。フルーエンシ解析においては，信号の特徴を表す指標の一つとして連続微分可能性を示すパラメータ ' m ' を導入し， m に基づいて定義される空間 mS において信号を取り扱うことを基本的な考え方としている。導入された空間 mS は，矩形波を $(m-1)$ 回畳み込み積分することによって得られる $(m-2)$ 回のみ微分可能な $(m-1)$ 次の区分的多項式からなる関数系を基底としている。さらに，各 mS において標本化基底並びに双直交標本化基底がそれぞれ導出されており，前者の関数は与えられた標本値列から連続信号を得る性質より DA 関数系と，後者は連続信号から標本値列を得る性質より AD 関数系と名づけている⁽⁷⁾。特にパラメータ m が1の時 DA 関数系は Walsh 信号空間における標本化基底に， m が無限大の極限においては Shannon の標本化基底と一致することが示されている⁽⁸⁾。これは m をパラメータとして系列化された一連の標本化基底が Shannon の標本化定理を一般化していることを意味する。このように定式化された様々な標本化関数を種々の信号処理に適用することを提案してき

* 富士写真フィルム株式会社
 250-0193 神奈川県南足柄市中沼 210
 Fuji Photo Film, co., Ltd.
 210 Nakanuma, Minamiashigara-shi, Kanagawa, 250-0193 Japan

** 筑波大学システム情報工学研究科
 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1
 Graduate School of Systems and Information Engineering,
 University of Tsukuba, 1-1-1 Tennodai, Tsukuba-shi, Ibaraki,
 305-8573 Japan

*** 産業技術総合研究所
 305-8568 茨城県つくば市梅園 1-1-1
 National Institute of Advanced Industrial Science and Technology,
 1-1-1 Umezono, Tsukuba-shi, Ibaraki, 305-8568 Japan

た。なかでも、2 次のフルーエンシ標本化関数⁽⁵⁾は1階微分可能という性質による滑らかな補間波形の生成が可能であることや、3 次スプラインや Shannon の標本化関数と比べて計算量が少なく済むという利点を持つ。実際に、CD に記録された音声のデジタルデータを補間し高品位な音声信号を再生することができる D/A コンバータの装置⁽⁵⁾や、文字フォントや図形を高品位に拡大処理するための画像関数化処理⁽⁶⁾には、2 次のフルーエンシ標本化関数が用いられ、その有効性が示されている。

しかしながら、一定の時間間隔ではなく、任意の間隔で標本化を行った場合や、均等標本列の伝送において、標本点の一部に欠損が生じた場合は、不均等間隔の標本点を得られることになる。これに対し、フルーエンシ標本化関数は均等間隔で与えられた標本値列を補間することを前提に導出されている関数であるため、不均等間隔標本列を滑らかに補間できない。このため、フルーエンシ標本化関数を拡張し、有益な性質を保持したまま、不均等間隔標本を補間することのできる不均等標本化関数⁽⁹⁾を導出することには十分に意義がある。

そこで本論文では、フルーエンシ標本化関数を拡張し、不均等間隔標本を滑らかに補間できる不均等標本化関数を導出することを主要な目的とする。なお、これまで均等間隔の補間における2 次のフルーエンシ標本化関数の実用性から本論文でも音声再生処理や画像の関数近似処理においては2 次関数で十分な有効性が得られるものと考え、導出する不均等間隔標本を補間する標本化関数の次数は2 次として設定することとする。

前述の標本化関数は B-spline 関数系の線型結合により表現されていたが、本論文においては B-spline 関数の線型結合ということは考えず、標本化関数を表す区分的多項式を直接求めていくという手段をとることとする。

このような考え方の下に以下の5つの仕様を設定し、それを満足する標本化関数を導出した。(1) 局所台である。標本化関数が局所台であると打ち切りが不要なため、計算量が少なくて済む。(2) 8つの区分的多項式によって構成されること。(3) 標本化関数の台には5つの標本点が存在し、存在する5つの標本点のうち、真ん中の標本点においては1の値をとり、それ以外の4つの標本点においては0の値をとること(これは標本を補間する関数が各標本を通ることを保証する条件である)。不均等標本化関数においてもこの仕様を受け継ぐ。(4) 全点で1階微分可能であること(これは、各標本を滑らかな2次式で補間するために必要な条件となる)。(5) 均等間隔標本の補間においては2次のフルーエンシ標本化関数に一致すること。

そして、導出された不均等標本化関数と、不均等間隔標本の補間に現在最もよく使われている手法の一つである3次スプライン関数による補間手法とを比較したところ、提案する標本化関数は3次スプラインと比較してオーバーシュート・アンダーシュートの振動を抑えた滑らかな補間波形を得ることができた。

2. 2 次のフルーエンシ標本化関数

本論文では、2 次のフルーエンシ標本化関数を拡張して、不均等間隔標本を補間する不均等標本化関数を導出する。そこで、まず、本章では2 次のフルーエンシ標本化関数について簡単に説明する。

2 次のフルーエンシ標本化関数は、次式で定義される2 次の区分的多項式 $\phi_l(t)$

$$\phi_l(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \pi f h}{\pi f h} \right)^3 e^{j2\pi f(t-lh/2)} df \quad \dots\dots\dots (1)$$

からなる関数系 $\{\phi_l(t)\}_{l=-1}^1$ の線形結合により、次式のように表される関数 $\psi(t)$ として導出されている⁽³⁾。

$$\psi(t) = \sum_{l=-1}^1 \lambda_l \phi_l(t), \quad \{\lambda_l\}_{l=-1}^1 = \left\{ -\frac{h}{2}, 2h, -\frac{h}{2} \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで式(1)において h は信号の標本間隔を表している。また、2 次のフルーエンシ標本化関数 $\psi(t)$ は

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{-(t-t_{-2})^2}{4(t_{-1}-t_{-2})^2} & [t_{-2}, \frac{t_{-2}+t_{-1}}{2}] \\ \frac{(t-t_{-1})(3t-t_{-1}-2t_{-2})}{4(t_{-1}-t_{-2})^2} & [\frac{t_{-2}+t_{-1}}{2}, t_{-1}] \\ \frac{(t-t_{-1})(5t+2t_0-7t_{-1})}{4(t_0-t_{-1})^2} & [t_{-1}, \frac{t_{-1}+t_0}{2}] \\ \frac{-7(t-t_0)^2}{4(t_0-t_{-1})^2} + 1 & [\frac{t_{-1}+t_0}{2}, t_0] \\ \frac{-7(t-t_0)^2}{4(t_1-t_0)^2} + 1 & [t_0, \frac{t_0+t_1}{2}] \\ \frac{(t-t_1)(5t+2t_0-7t_1)}{4(t_1-t_0)^2} & [t_0, \frac{t_0+t_1}{2}] \\ \frac{(t-t_1)(3t-t_1-2t_2)}{4(t_2-t_1)^2} & [t_1, \frac{t_1+t_2}{2}] \\ \frac{-(t-t_2)^2}{4(t_2-t_1)^2} & [\frac{t_1+t_2}{2}, t_2] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (3)$$

なる区分的多項式によって表すことができる。ただし、上式における $t_{-2}, t_{-1}, t_0, t_1, t_2$ は標本点であり、各標本点の間隔は等間隔である。

この2 次のフルーエンシ標本化関数 $\psi(t)$ を用いて均等間隔に並んだ標本を補間すれば、それは全点において1階微分可能な2 次関数となる。さらに、局所台の性質を持つことから、シャノンの sinc 関数を用いる場合に比べてより少ない計算量で補間を行えることができる。しかしながら、フルーエンシ標本化関数は均等間隔標本の補間を前提に導出されており、不均等間隔標本を補間する場合、単純に標本間隔に応じて標本化関数を伸縮させると区分的多項式の節点において1階微分可能性が保証されなくなる場合が生じ、与えられた標本を全点で1階微分可能な2 次関数として補間することができない。図1は標本間隔に応じて標本化関数を単純に伸縮させた例である。この例で示されるように、伸縮された関数は節点 ($t = -1, 4$ の時点) において1階微分可能となっていない。

図 1 2 次のフルーエンシ標準化関数を標本間隔に応じて伸縮した例

Fig.1. An example of expanded and contracted sampling function according to the sampling interval.

3. 要求仕様の設定

本章では不均等間隔標本を補間する標準化関数に対する仕様を設定する。2 次のフルーエンシ標準化関数を、不均等間隔標本も全点で 1 階微分可能な関数で補間できるように拡張していくので、基本的には 2 次のフルーエンシ標準化関数の諸性質は全て受け継ぐものとする。以下に導出する不均等標準化関数の要求仕様を示す。

仕様 1 局所台である。これは、2 次のフルーエンシ標準化関数を持つ重要な性質の一つで、シャノンの sinc 関数を用いた標本の補間において生じる、標準化関数の打ち切りが不要なため、計算量が少なくて済む。このため、不均等標準化関数においてもこの性質は受け継ぐようにする。

仕様 2 2 次のフルーエンシ標準化関数と同様に、8 つの区間に対応する 2 次の区分的多項式で構成される。

仕様 3 2 次のフルーエンシ標準化関数の台には 5 つの標本点が存在する。このことを 5 つの標本点によりサポートされると表現する。2 次のフルーエンシ標準化関数は、これら 5 つの標本点のうち、真ん中の標本点においては 1 の値を取り、それ以外の 4 つの標本点においては 0 の値をとることで、標本を補間する関数が各標本を通ることを保証している。不均等標準化関数においてもこの仕様を受け継ぐ。

仕様 4 全点で 1 階微分可能である。これは、各標本を滑らかな 2 次式で補間するために必要な条件となる。

仕様 5 均等間隔標本の補間においては 2 次のフルーエンシ標準化関数に一致する。これは、導出する不均等標準化関数が、2 次のフルーエンシ標準化関数の拡張であることから、均等間隔標本の補間においては 2 次のフルーエンシ標準化関数と同じ関数になるようにする。

4. 不均等標準化関数

本章では、先に述べた 5 つの仕様に基づき、不均等間隔

標本を補間する標準化関数を導出する。

本論文で導出する標準化関数は仕様 1, 2 より局所台でかつ 8 つの区分的多項式で表されるものとしているが、関数を区分的多項式として表す場合には節点の位置を設定する必要がある。この節点は仕様 5 で設定しているように、補間すべき標本が均等間隔として与えられている場合には 2 次のフルーエンシ標準化関数 $\psi(t)$ に一致することを条件としている。この関数 $\psi(t)$ は、式 (3) で示されているように、標本点上ならびに、隣接する標本点の midpoint に節点を持つ。そこで、仕様 5 を満足するために節点は標本点上並びに隣接する標本点間の midpoint に設定することとする。以上のことを考慮し、導出する標準化関数を $s(t)$ と表すことにすれば、関数 $s(t)$ は $s_1(t) \sim s_8(t)$ からなる 8 つの区分的多項式で表すことができる。

$$s(t) = \begin{cases} s_1(t) = a_1 t^2 + b_1 t + c_1 & [t_{-2}, \frac{t_{-2}+t_{-1}}{2}] \\ s_2(t) = a_2 t^2 + b_2 t + c_2 & [\frac{t_{-2}+t_{-1}}{2}, t_{-1}] \\ s_3(t) = a_3 t^2 + b_3 t + c_3 & [t_{-1}, \frac{t_{-1}+t_0}{2}] \\ s_4(t) = a_4 t^2 + b_4 t + c_4 & [\frac{t_{-1}+t_0}{2}, t_0] \\ s_5(t) = a_5 t^2 + b_5 t + c_5 & [t_0, \frac{t_0+t_1}{2}] \\ s_6(t) = a_6 t^2 + b_6 t + c_6 & [\frac{t_0+t_1}{2}, t_1] \\ s_7(t) = a_7 t^2 + b_7 t + c_7 & [t_1, \frac{t_1+t_2}{2}] \\ s_8(t) = a_8 t^2 + b_8 t + c_8 & [\frac{t_1+t_2}{2}, t_2] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

ここで、 $\{t_i\}_{i=-2}^2$ はこの標準化関数をサポートする 5 つの標本点を表す。式 (4) で示されるように、標準化関数 $s(t)$ は 24 個の未知数を持つ。この 24 個の未知数を求めるために、以下の 24 個の条件式を追加する。以下に示す条件式は、仕様 3, 4 を満足するために与えられるものである。

- 区分的多項式の各節点の座標に対し

$$\begin{aligned} s_1(t_{-2}) &= 0, \\ s_1(\frac{t_{-2}+t_{-1}}{2}) &= s_2(\frac{t_{-2}+t_{-1}}{2}) = d_{-2}, \\ s_2(t_{-1}) &= s_3(t_{-1}) = 0, \\ s_3(\frac{t_{-1}+t_0}{2}) &= s_4(\frac{t_{-1}+t_0}{2}) = d_{-1}, \\ s_4(t_0) &= s_5(t_0) = 1, \\ s_5(\frac{t_0+t_1}{2}) &= s_6(\frac{t_0+t_1}{2}) = d_1, \\ s_6(t_1) &= s_7(t_1) = 0, \\ s_7(\frac{t_1+t_2}{2}) &= s_8(\frac{t_1+t_2}{2}) = d_2, \\ s_8(t_2) &= 0 \end{aligned}$$

となる。

- $s(t)$ の節点における 1 階微分係数に対し、

$$\begin{aligned} s'_1(t_{-2}) &= 0, \\ s'_1(\frac{t_{-2}+t_{-1}}{2}) &= s'_2(\frac{t_{-2}+t_{-1}}{2}), \\ s'_3(\frac{t_{-1}+t_0}{2}) &= s'_4(\frac{t_{-1}+t_0}{2}), \\ s'_4(t_0) &= s'_5(t_0) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s'_5\left(\frac{t_0+t_1}{2}\right) &= s'_6\left(\frac{t_0+t_1}{2}\right), \\ s'_7\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) &= s'_8\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right), \\ s'_8(t_2) &= 0\end{aligned}$$

となる。

ただし，上の条件式における d_1, d_2, d_{-1}, d_{-2} は $t = \frac{t_1+t_0}{2}, \frac{t_2+t_1}{2}, \frac{t_{-1}+t_0}{2}, \frac{t_{-2}+t_{-1}}{2}$ における標準化関数の値であり，ここでは，これらの値は任意に設定できるものとする。これらの条件より，

$$a_1 t_{-2}^2 + b_1 t_{-2} + c_1 = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (5)$$

$$\begin{aligned}a_1(t_{-2} + t_{-1})^2 + 2b_1(t_{-2} + t_{-1}) + 4c_1 &= 4d_{-2} \\ \cdots \cdots \cdots &\cdots \cdots \cdots (6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_2(t_{-2} + t_{-1})^2 + 2b_2(t_{-2} + t_{-1}) + 4c_2 &= 4d_{-2} \\ \cdots \cdots \cdots &\cdots \cdots \cdots (7)\end{aligned}$$

$$a_2 t_{-1}^2 + b_2 t_{-1} + c_2 = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (8)$$

$$a_3 t_{-1}^2 + b_3 t_{-1} + c_3 = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (9)$$

$$\begin{aligned}a_3(t_{-1} + t_0)^2 + 2b_3(t_{-1} + t_0) + 4c_3 &= 4d_{-1} \\ \cdots \cdots \cdots &\cdots \cdots \cdots (10)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_4(t_{-1} + t_0)^2 + 2b_4(t_{-1} + t_0) + 4c_4 &= 4d_{-1} \\ \cdots \cdots \cdots &\cdots \cdots \cdots (11)\end{aligned}$$

$$a_4 t_0^2 + b_4 t_0 + c_4 = 1 \quad \cdots \cdots \cdots (12)$$

$$a_5 t_0^2 + b_5 t_0 + c_5 = 1 \quad \cdots \cdots \cdots (13)$$

$$a_5(t_0 + t_1)^2 + 2b_5(t_0 + t_1) + 4c_5 = 4d_1 \quad \cdots \cdots (14)$$

$$a_6(t_0 + t_1)^2 + 2b_6(t_0 + t_1) + 4c_6 = 4d_1 \quad \cdots \cdots (15)$$

$$a_6 t_1^2 + b_6 t_1 + c_6 = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (16)$$

$$a_7 t_1^2 + b_7 t_1 + c_7 = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (17)$$

$$a_7(t_1 + t_2)^2 + 2b_7(t_1 + t_2) + 4c_7 = 4d_2 \quad \cdots \cdots (18)$$

$$a_8(t_1 + t_2)^2 + 2b_8(t_1 + t_2) + 4c_8 = 4d_2 \quad \cdots \cdots (19)$$

$$a_8 t_2^2 + b_8 t_2 + c_8 = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (20)$$

$$2a_1 t_{-2} + b_1 = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (21)$$

$$a_1(t_{-2} + t_{-1}) + b_1 = a_2(t_{-2} + t_{-1}) + b_2 \quad \cdots \cdots (22)$$

$$a_3(t_{-1} + t_0) + b_3 = a_4(t_{-1} + t_0) + b_4 \quad \cdots \cdots (23)$$

$$2a_4 t_0 + b_4 = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (24)$$

$$2a_5 t_0 + b_5 = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (25)$$

$$a_5(t_0 + t_1) + b_5 = a_6(t_0 + t_1) + b_6 \quad \cdots \cdots (26)$$

$$a_7(t_1 + t_2) + b_7 = a_8(t_1 + t_2) + b_8 \quad \cdots \cdots (27)$$

$$2a_8 t_2 + b_8 = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (28)$$

なる 24 個の未知数に対する 24 元連立 1 次方程式が得られ，これにより一意な解として標準化関数の 24 個の未知数が求まる。

しかしながら，上で示した条件式には $t = t_{-1}$ および $t = t_1$ における標準化関数の 1 階微分可能については考慮されていない。そこで，点 $t = t_1, t_{-1}$ における 1 階微分可能性を保証するための条件式を追加する。

$$\begin{aligned}s'_2(t_{-1}) &= s'_3(t_{-1}), \\ s'_6(t_1) &= s'_7(t_1)\end{aligned}$$

これらの式は，

$$2a_2 t_{-1} + b_2 = 2a_3 t_{-1} + b_3 \quad \cdots \cdots \cdots (29)$$

$$2a_6 t_1 + b_6 = 2a_7 t_1 + b_7 \quad \cdots \cdots \cdots (30)$$

として書き表すことができる。式 (29),(30) に式 (5)~(28) で与えられている連立方程式の解を代入することにより，

$$\begin{cases} \frac{2d_{-2}}{t_{-1}-t_{-2}} + \frac{2d_{-1}}{t_0-t_{-1}} = \frac{1}{t_0-t_{-1}} \\ \frac{2d_2}{t_1-t_2} + \frac{2d_1}{t_0-t_1} = \frac{1}{t_0-t_1} \end{cases} \quad \cdots \cdots \cdots (31)$$

なる関係式が得られる。連立方程式の解と式 (31) とを考慮すると，求める標準化関数は以下のように表せる。

$$s_1(t) = \frac{4(d_{-2}t^2 - 2t_{-2}d_{-2}t + t_{-2}^2d_{-2})}{(t_{-1} - t_{-2})^2} \quad \cdots \cdots \cdots (32)$$

$$\begin{aligned}s_2(t) &= \frac{4}{(t_{-1}-t_{-2})^2} \left[\left\{ d_{-2} + \frac{2(t_{-1}-t_{-2})(2d_{-1}-1)}{t_0-t_{-1}} \right\} t^2 \right. \\ &\quad - \left\{ 2t_{-1}d_{-2} - \frac{(2d_{-1}-1)(t_{-2}^2+2t_{-1}t_{-2}-3t_{-1}^2)}{t_0-t_{-1}} \right\} t \\ &\quad \left. + t_{-1}^2d_{-2} + \frac{t_{-1}(t_{-1}^2-t_{-2}^2)(2d_{-1}-1)}{t_0-t_{-1}} \right] \quad \cdots \cdots (33)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_3(t) &= \frac{4}{(t_0-t_{-1})^2} [(-3d_{-1}+2)t^2 \\ &\quad + \{2(2t_{-1}+t_0)d_{-1} - (3t_{-1}+t_0)\}t \\ &\quad - 2t_{-1}t_0d_{-1} - t_{-1}^2(d_{-1}-1) + t_{-1}t_0] \quad \cdots \cdots (34)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_4(t) &= \frac{4}{(t_0-t_{-1})^2} [(d_{-1}-1)t^2 \\ &\quad - 2t_0(d_{-1}-1)t + t_0^2(d_{-1}-1)] + 1 \quad \cdots \cdots (35)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_5(t) &= \frac{4}{(t_1-t_0)^2} [(d_1-1)t^2 \\ &\quad - 2t_0(d_1-1)t + t_0^2(d_1-1)] + 1 \quad \cdots \cdots (36)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_6(t) &= \frac{4}{(t_1-t_0)^2} [(-3d_1+2)t^2 \\ &\quad + \{2(t_0+2t_1)d_1 - (t_0+3t_1)\}t \\ &\quad - 2t_0t_1d_1 - t_1^2(d_1-1) + t_0t_1] \quad \cdots \cdots (37)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_7(t) &= \frac{4}{(t_2-t_1)^2} \left[\left\{ d_2 + \frac{2(t_1-t_2)(2d_1-1)}{t_0-t_1} \right\} t^2 \right. \\ &\quad - \left\{ 2t_1d_2 - \frac{(2d_1-1)(t_2^2+2t_1t_2-3t_1^2)}{t_0-t_1} \right\} t \\ &\quad \left. + t_1^2d_2 + \frac{t_1(t_1^2-t_2^2)(2d_1-1)}{t_0-t_1} \right] \quad \cdots \cdots (38)\end{aligned}$$

$$s_8(t) = \frac{4(d_2t^2 - 2t_2d_2t + t_2^2d_2)}{(t_2 - t_1)^2} \quad \cdots \cdots \cdots (39)$$

式 (32)~(39) で示された区分的多項式で構成される標準化関数 $s(t)$ は仕様 1~4 を満足するものである。残された問題としては，標準化関数 $s(t)$ に仕様 5 を満足させること，および，パラメータベクトル $D = \{d_{-2}, d_{-1}, d_1, d_2\}$ の各値を決定することである。そこで，以降は仕様 5 を満足さ

せるための D の決め方について論ずることとする。

まず、式 (31) を d_2, d_{-2} について整理すれば、

$$\begin{cases} d_2 = \frac{t_1 - t_2}{t_0 - t_1} \left(\frac{1}{2} - d_1 \right) \\ d_{-2} = \frac{t_{-1} - t_{-2}}{t_0 - t_{-1}} \left(\frac{1}{2} - d_{-1} \right) \end{cases} \quad (40)$$

が得られる。この式 (40) を式 (32)~(39) に代入することにより、

$$s_1(t) = -B_1(t - t_{-2})^2 \quad (41)$$

$$s_2(t) = B_1(3t - t_{-1} - 2t_{-2})(t - t_{-1}) \quad (42)$$

$$s_3(t) = -B_2(5t + 2t_0 - 7t_{-1})(t - t_{-1}) - 2 \frac{(16d_{-1} - 9)(t - t_{-1})^2}{(t_0 - t_{-1})^2} \quad (43)$$

$$s_4(t) = \frac{4(d_{-1} - 1)(t - t_0)^2}{(t_0 - t_{-1})^2} + 1 \quad (44)$$

$$s_5(t) = \frac{4(d_1 - 1)(t - t_0)^2}{(t_0 - t_1)^2} + 1 \quad (45)$$

$$s_6(t) = B_3(5t + 2t_0 - 7t_1)(t - t_1) - 2 \frac{(16d_1 - 9)(t - t_1)^2}{(t_0 - t_1)^2} \quad (46)$$

$$s_7(t) = B_4(3t - t_1 - 2t_2)(t - t_1) \quad (47)$$

$$s_8(t) = -B_4(t - t_2)^2 \quad (48)$$

が得られる。ただし、

$$B_1 = \frac{t_0 - t_{-2}}{4(t_0 - t_{-1})^2(t_{-1} - t_{-2}) + 4(t_{-1} - t_{-2})^3}$$

$$B_2 = \frac{t_0 - t_{-2}}{4(t_0 - t_{-1})^3 + 4(t_0 - t_{-1})(t_{-1} - t_{-2})^2}$$

$$B_3 = \frac{t_2 - t_0}{4(t_2 - t_1)^2(t_1 - t_0) + 4(t_1 - t_0)^3}$$

$$B_4 = \frac{t_2 - t_0}{4(t_2 - t_1)^3 + 4(t_2 - t_1)(t_1 - t_0)^2}$$

としている。ここでさらに、不均等標準化関数 $s(t)$ の $t = \frac{(t_0+t_1)}{2}, \frac{(t_1+t_2)}{2}$ における節点の値とフルーエンシ標準化関数 $\psi(t)$ の $t = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ における節点の値との二乗誤差の和を表す汎関数 J_1 、ならびに不均等標準化関数 $s(t)$ の $t = \frac{(t_0+t_{-1})}{2}, \frac{(t_{-1}+t_{-2})}{2}$ における節点の値とフルーエンシ標準化関数 $\psi(t)$ の $t = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ における節点の値との二乗誤差の和を表す汎関数 J_2 をそれぞれ次式のように定義する。

$$J_1 \triangleq \left\{ \psi\left(\frac{1}{2}\right) - s\left(\frac{t_0+t_1}{2}\right) \right\}^2 + \left\{ \psi\left(\frac{3}{2}\right) - s\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) \right\}^2 \\ = \left(\frac{9}{16} - d_1 \right)^2 + \left(\frac{1}{16} + d_2 \right)^2 \quad (49)$$

$$J_2 \triangleq \left\{ \psi\left(-\frac{1}{2}\right) - s\left(\frac{t_0+t_{-1}}{2}\right) \right\}^2 + \left\{ \psi\left(-\frac{3}{2}\right) - s\left(\frac{t_{-1}+t_{-2}}{2}\right) \right\}^2 \\ = \left(\frac{9}{16} - d_{-1} \right)^2 + \left(\frac{1}{16} + d_{-2} \right)^2 \quad (50)$$

ここでは、このように定義した J_1, J_2 を最小にするように d_1, d_{-1} を決定することにする。式 (50) の J_1, J_2 に式 (40) における d_2, d_{-2} を代入し、 $\frac{\partial J_1}{\partial d_1} = 0, \frac{\partial J_2}{\partial d_{-1}} = 0$ なる

条件式を基にすれば、

$$d_1 = \frac{1}{2} + \frac{A_1 + 1}{16(A_1^2 + 1)} \quad (51)$$

$$d_{-1} = \frac{1}{2} + \frac{A_2 + 1}{16(A_2^2 + 1)} \quad (52)$$

として d_1, d_{-1} を求めることができる。ここで、 $A_1 = \frac{t_1 - t_2}{t_0 - t_1}$ 、 $A_2 = \frac{t_{-1} - t_{-2}}{t_0 - t_{-1}}$ とした。これら式 (51), (52) と式 (40) とを合わせれば、求めるべきパラメータ D が、

$$\begin{cases} d_1 = \frac{1}{2} + \frac{A_1 + 1}{16(A_1^2 + 1)} \\ d_{-1} = \frac{1}{2} + \frac{A_2 + 1}{16(A_2^2 + 1)} \\ d_2 = A_1\left(\frac{1}{2} - d_1\right) \\ d_{-2} = A_2\left(\frac{1}{2} - d_{-1}\right) \end{cases} \quad (53)$$

としてまとめられる。実際、標本間隔が均等である場合、 $d_1 = d_{-1} = \frac{9}{16}, d_2 = d_{-2} = -\frac{1}{16}$ であり、これは 2 次のフルーエンシ標準化関数 $\psi(t)$ の $t = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$ における値と一致する。また、式 (41)~(48) において d_1, d_{-1} の値を代入すれば、式 (3) と一致することが容易に確認できる。このようにパラメータ D の値が決定すれば、標本間隔が均等間隔である場合、 $s(t)$ は従来の 2 次のフルーエンシ標準

図 2 不均等標準化関数の例

Fig. 2. An example of the sampling function for non-uniform samples.

図 3 不均等標準化関数による補間例

Fig. 3. An example of interpolation by using proposed sampling function.

化関数 $\psi(t)$ と一致し、これにより仕様 5 が満足される。

以上のことをまとめると、標本化関数 $s(t)$ を表す各区間の式は以下のように求められる。

$$s_1(t) = -B_1(t - t_{-2})^2 \dots\dots\dots (54)$$

$$s_2(t) = B_1(3t - t_{-1} - 2t_{-2})(t - t_{-1}) \dots\dots\dots (55)$$

$$s_3(t) = -B_2(3t - 2t_0 - t_{-1})(t - t_{-1}) + \frac{2(t - t_{-1})^2}{(t_0 - t_{-1})^2} \dots\dots\dots (56)$$

$$s_4(t) = B_2(t - t_0)^2 - \frac{2(t - t_0)^2}{(t_0 - t_{-1})^2} + 1 \dots\dots\dots (57)$$

$$s_5(t) = B_3(t - t_0)^2 - \frac{2(t - t_0)^2}{(t_0 - t_1)^2} + 1 \dots\dots\dots (58)$$

$$s_6(t) = -B_3(3t - 2t_0 - t_1)(t - t_1) + \frac{2(t - t_1)^2}{(t_0 - t_1)^2} \dots\dots\dots (59)$$

$$s_7(t) = B_4(3t - t_1 - 2t_2)(t - t_1) \dots\dots\dots (60)$$

$$s_8(t) = -B_4(t - t_2)^2 \dots\dots\dots (61)$$

図 2 に導出した標本化関数の例を示す。この例では、標本化関数がサポートする点を $\{-5, -2, 0, 4, 6\}$ として与えている。また、導出した標本化関数と標本値との線形結合によって不均等間隔の標本を補間する様子を図 3 に示す。

5. 数 値 例

本章では、導出した標本化関数を用いて実際に不均等間隔標本列を補間した例を示す。また、比較のため、一般的な不均等間隔標本の補間手法である 3 次スプライン関数による補間法⁽²⁾を用いて、同じ不均等間隔標本列を補間した結果も併せて示す。ただし、導出した不均等標本化関数を用いた補間は、各標本と隣り合う二つの標本の中間点を節点として用いているのに対し、3 次スプライン関数による補間では各標本のみを節点としている。もちろん、3 次スプライン補間法において、標本を補間する区分的多項式の節点を、提案手法と同じ位置に設定することも可能であるが、この場合、区分的多項式の導出において自由度が生じ、その自由度を持つパラメータをどのように設定するかという新たな問題が生じるため、本章では 3 次スプライン補間法に対しては、区分的多項式の節点を各標本点上のみに設定している。また、2 次のスプライン関数による補間法は一般的にあまり用いられておらず、実際に標本を補間しても振動が大きくなってしまい実用的ではないので、本稿では用いないこととした。

入力信号は図 4 に示されるようなステップ状の離散信号を与える。比較に際しては、両手法とも元信号を仮定しておらず、補間後の元信号の誤差等の評価を行うことができない。そこで、次の 3 つの観点から評価を行う。

- オーバーシュート、アンダーシュートの有無とその大きさ。
- 補間関数の滑らかさ (補間して得られる関数を $y(t)$ と

図 4 補間対象となる不均等標本値列

Fig. 4. Non-uniform samples to be interpolated.

図 5 図 4 に示す標本の補間結果

Fig. 5. Interpolation result from the samples shown in Fig.4.

図 6 図 5 の点線で囲まれた部分を拡大した図

Fig. 6. An enlarged of selected area of Fig.6 enclosed by broken line.

し、その 2 階微分を $y''(t)$ としたとき、 $\int_{-\infty}^{\infty} |y''(t)| dt$ と定義)。表 1 には提案手法を用いた補間結果を 1 としたときの比を示す。この数値は小さいほど滑らかであ

表 1 各手法による補間結果に対する評価

Table 1. Evaluation of interpolation result by each method.

	smoothness	length of curve
proposed method	1	1
cubic spline interpolation	0.96	1.31

ると言える。

- 補間関数の長さ。この値についても提案手法を 1 としたときの比を表 1 に示す。

結果を図 5, 6 及び表 1 に示す。各図中の実線は不均等標本化関数による補間結果を、破線は 3 次スプライン関数による補間結果を示している。図 5 を見ると、導出した不均等標本化関数を用いた補間結果ではオーバーシュート、アンダーシュートが小さいことがわかる。一方、3 次スプライン関数による補間結果においては大きなオーバーシュート、アンダーシュートが生じている。図 6 は図 5 の点線で囲まれた部分を拡大したものである。この図より、提案手法による補間波形は振動がすぐに収まっているのに対して、3 次スプライン補間法による補間波形は振動が続いて収束していないことがわかる。導出した不均等標本化関数によって補間された波形の振動がすぐに収まるのは、その関数が局所台であり、ある標本間を補間するのに必要な情報が、その区間の両端に存在する標本と両端の前後に存在する標本とを合わせた計 4 つの標本であるため、標本値の急激な変動が影響するのも局所的なものになるからである。一方、標本値の変化の影響が及ぶ範囲が局所的であることから、滑らかさの点では 3 次スプライン関数による補間法より少々劣っている。また、曲線の長さは提案手法が優れているとみなすことができる。これは提案手法による補間波形の振動が少なくかつ収束も速いことが起因しているからであると考えられる。両手法は補間波形が区分的多項式となっており、先に区分的多項式の各次数の係数を求めてから、その区分的多項式が定義される区間内の任意の点の値が計算される。そのため、計算量の差は、係数の数と係数を求める手間、補間波形の次数の差になるが、両手法の間に大差はない。

6. ま と め

本論文では、2 次のフルーエンシ標本化関数を拡張して、不均等間隔標本を滑らかに補間する標本化関数の導出を行った。数値例として、不均等間隔標本の補間法として広く使われる手法の一つである 3 次スプライン補間法と比較を行った。それにより、導出した標本化関数は、3 次スプライン補間法と比べてオーバーシュート、アンダーシュートが抑えられ、不均等間隔標本を振動が小さく、より短い曲線で結ぶことができる手法であることを示すことができた。提案した標本化関数は局所台という性質を持っており、標本列のうち一つが削除されたり、標本が加えられたりしても、補間結果に影響があるのは変更があった標本と、その前後

2 つずつの標本のみである。この性質を応用することで、不均等標本化関数を補間に用いることを前提とした離散信号の不均等間隔間引きの手法や、連続信号の不均等間隔標本化手法への展開が今後期待できる。

本論文では、これまで均等間隔の補間において実用上良い結果が得られていることが報告されている 2 次のフルーエンシ標本化関数を不均等間隔標本の補間に拡張した標本化関数の議論を行った。しかし、本来、区分的多項式の形式で表現される関数の次数や節点位置と滑らかさとの関係に關しては、どの値が最適であるのかということの厳密な解析や理論的証明を与えることが必要である。次数については、必ずしも 2 次の関数が最適であるという保証が与えられているわけではない。また、節点位置も各標本上と標本点間の midpoint に設定させることが最適であるという理論的根拠も現時点では示されていない。どのようなケースにおいてこれらの値が最適であるのかという点に対しては、今後の課題として、不均等間隔の補間における適切な評価規範を定義し、そのもとでの最適化問題として次数ならびに節点位置を決定し、標本化関数を求める手法の導出を進めたいと考えている。

謝 辞

本研究の一部は、科学技術振興機構 CREST プログラム、総務省戦略的情報通信研究開発推進制度及び、文部科学省都市エリア産学官連促進進事業（筑波研究学園都市エリア）の助成を受けて行われている。ここに記して感謝致します。（平成 16 年 5 月 7 日受付、平成 17 年 1 月 24 日再受付）

文 献

- (1) S. Sakamaki: "Understandable Digital Signal Processing by Reading", Kogyo Chosakai Publishing Co., Ltd. (1988) (in Japanese)
坂巻佳壽美:「見てわかるデジタル信号処理」, 工業調査会 (1998)
- (2) H. Okumura: "Newest Algorithm Dictionary by C-language", Gijutsu-Hyohron Co., Ltd. (1998) (in Japanese)
奥村晴彦: C 言語による最新アルゴリズム辞典, 技術評論社 (1998)
- (3) K. Katagishi, K. Toraichi, S. Hattori, S.L. Lee, and K. Nakamura: "Practical Compactly Supported Sampling Functions of Degree 2", Proc. IEEE Pacific Rim Conference on Communication, Computer and Signal Processing, pp.552-555, Victoria, Canada (1999-8)
- (4) M. Kamada, K. Toraichi, and R. Mori: "Periodic spline orthonormal bases", *J. Approx. Theory*, Vol.55, pp.27-38 (1988-10)
- (5) K. Toraichi and K. Nakamura: "Sampling Function of Degree 2 for DVD-Audio", *T.IEE Japan*, Vol.123-C, No.5, pp.928-937 (2003-5) (in Japanese)
寅市和男・中村浩二:「DVD-Audio 用二次の標本化函数」, 電学論 C, **123**, 5, pp.928-937 (2003-5)
- (6) K. Toraichi, F. Kawazoe, K. Nakamura, T. Sugiyama, and K. Wada: "Fluency Function Approximation Method for D.T.P.", *J. Printing Sci. Tech.*, Vol.39, No.3, pp.169-179 (2002-5) (in Japanese)
寅市和男・河副文夫・中村浩二・杉山哲男・和田耕一:「A.74 D.T.P. へのフルーエンシ函数近似化手法」, 日本印刷学誌, Vol.39, No.3, pp.169-179 (May 2002)
河副文夫・寅市和男・中村浩二・P. W. H. Kwan:「フルーエンシ函数系による細線画像の関数近似」, 画像電子学誌, **32**, 4, pp.438-445 (2003-7)
- (7) K. Katagishi, K. Nakamura, and K. Toraichi: "Fluency AD

operator as generalized Mother Wavelets”, Proc. Int. Conference on Computing Communications and Control Technologies 2004, Texas, US, Vol.3, pp.1-6 (2004-8)

- (8) K. Toraichi and M. Kamada: “A Note on Connection between Spline Signal Spaces and Band-Limited Signal Spaces”, *T. IEICE Japan*, Vol.73-A, No.9, pp.1501-1508 (1990-9) (in Japanese)

寅市和男・鎌田 賢:「スプライン信号空間と帯域制限信号空間との関係について」, 信学論 A, **73**, 9, pp.1501-1508 (1990-9)

- (9) T. Takahashi, K. Toraichi, K. Kameyama, and K. Nakamura: “A Smooth Interpolation Method For Non-uniform Samples Based on Sampling Functions Composed of Piecewise Polynomials”, Proc. IEEE Pacific Rim Conference on Multimedia, pp.417-424 Hsinchu, Taiwan (2002-12)

高橋 知幸 (非会員) 1979 年生。2002 年 3 月筑波大学第三学群情報学類卒業。2004 年 3 月筑波大学大学院システム情報工学研究科リスク工学専攻修了。在学中はフルエンシ理論の応用として、信号処理に関する研究に従事。

河辺 徹 (非会員) 1990 年京都大学大学院工学研究科応用システム科学専攻修士課程修了。同年徳島大学工学部助手, 1995 年同大総合情報処理センター講師。1997 年筑波大学電子情報工学系講師を経て現在, 同大システム情報工学研究科コンピュータサイエンス専攻助教授。博士 (工学)。主としてシステム制御理論, 最適化理論等に関する研究に従事。

中村 浩二 (非会員) 1998 年電気通信大学通信学部電子情報学科卒業。2001 年筑波大学大学院博士課程修士取得。2002 年同大学助手。主として信号解析, デジタルフィルタ設計に関する研究に従事。フルエンシー D.T.P. システムの開発により, 2003 年平成 15 年度日本印刷学会論文賞ならびに平成 15 年度財団法人印刷朝陽会賞受賞。

寅市和男 (正員) 1971 年北海道大学大学院博士課程修了。同年電子技術総合研究所飯島特別研究室入所。1980 年筑波大学電子情報工学系助教授, 1989 年同教授を経て, 現在, 同大学先端学生領域センターマルチメディア情報処理研究アспект教授。工学博士。主として智慧システムとその生体工学への応用に関する研究に従事。平成 14 年度科学技術振興財団 CREST プログラム, 平成 14 年度総務省特

定領域重点型研究開発, 平成 14 年度文部科学省都市エリア産業官連携促進プログラム育成テーマ 1 の各研究代表者。1988 年 GoldenSound 賞, 2000 年 Audio 銘機賞, 2001 年同金賞をはじめとするフルエンシーオーディオシステムによるオーディオ関係の数々の賞を受賞。また, フルエンシー D.T.P. システムの開発により, 2003 年平成 15 年度日本印刷学会論文賞ならびに平成 15 年度財団法人印刷朝陽会賞受賞。「フルエンシ情報理論とそのマルチメディアへの応用に関する研究」の業績により財団法人船井情報科学振興財団の平成 16 年度船井情報科学振興賞 (エレクトロニクス部門) を受賞。

片岸 一起 (非会員) 1980 年名古屋工業大学工学部電子工学科卒業。1987 年筑波大学大学院博士課程修了。同年国際電信電話 (株) 入社。1999 年筑波大学電子情報工学系助教授, 2004 年同大システム情報工学研究科リスク工学専攻助教授, 学術情報メディアセンター。工学博士。主としてネットワークセキュリティ, フルエンシ情報理論とその応用に関する研究に従事。

大津 展之 (非会員) 1947 年 3 月 8 日生。1969 年東京大学工学部計数工学科卒業。1971 年東京大学大学院計数工学数理コース修士課程修了。工学博士。電子技術総合研究所入所。パターン認識の理論と応用研究に従事。カナダ NRC 客員研究員, 情報科学部情報数理研究室長を経て 1990 年首席研究官。1991 年知能情報部長に就任。1992 年筑波大学連係大学院教授併任。2001 年産業技術総合研究所フェロー, 東京大学大学院情報理工学系研究科教授併任, 現在に至る。電子通信学会学術奨励賞, 行動計量学会学会賞優秀賞, IAPR/MVA'98 Most Influential Paper of the Decade Award, 映像情報メディア学会丹羽高柳賞業績賞等を受賞。情報処理学会, 行動計量学会, 分類学会などの会員。