片側エネルギー減衰を受けた擬似ベル状態のエンタングルメント特性

非会員 山本 竜太郎* 非会員 服部 誠司**

正員 臼田 毅** 正員 内匠 逸*

Entanglement of Formation of a Quasi-Bell State with Non-Symmetric Loss

Ryutaro Yamamoto*, Non-member, Seiji Hattori**, Non-member, Tsuyoshi Sasaki Usuda**, Member,
Ichi Takumi*, Member

Entanglement of formation (EoF) for a quasi-Bell state degraded by an attenuation channel is computed. As a result, it is clarified that EoF for a quasi-Bell state is greater than that for the Bell states.

キーワード: エンタングルメント, Entanglement of formation, 擬似ベル状態, 減衰通信路

Keywords: entanglement, Entanglement of formation, quasi-Bell state, attenuation channel

1. はじめに

エンタングルメントは、量子情報理論に特有の概念であり、エンタングルメント援助による古典情報伝送（あるいは量子デンスコーディング）のように、情報機能を高めるリソースとして位置づけられる。応用を考えた場合、完全にエンタングルした状態の利用が望ましいが、近年、光のコヒーレント状態のような非直交状態によって、エンタングルメントが最大の状態を構成できることが示された⁽¹⁾。光においては、単一光子状態の生成技術が必要とされる直交状態に比べ、非直交状態は作りやすいという利点があるため、この発見は非常に有益なものといえる。さて、実際に量子通信などに用いる場合は、エンタングルメントに対する通信路の影響を考察する必要がある。文献⁽²⁾では、Fidelityを用い、コヒーレント状態による擬似ベル状態のエンタングルメントを考察をしている。しかし、Fidelityはエンタングルメント測度の下限に対応するのみで、エンタングルメントそのものを表していない。本稿では、エンタングルメント測度のひとつである、Entanglement of Formation⁽³⁾（以下、EoFと呼ぶ）を用い、擬似ベル状態のエンタングルメントの減衰による劣化特性を考察する。

2. コヒーレント状態による擬似ベル状態

コヒーレント状態はレーザー光で近似的に実現できる光の量子状態で、もっとも安定した光の量子状態といわれている⁽⁵⁾。一般に、コヒーレント状態は非直交で、コヒーレント状態が直交するには、無限のパワーが必要となる。さて、コヒーレント状態による擬似ベル状態には、様々なものがあるが、ここでは、特に完全エンタングルメント状態

となる以下の $|\Psi_{AB}\rangle$ に注目する。

$$|\Psi_{AB}\rangle = h_4(|\alpha\rangle_A|\beta\rangle_B - |-\alpha\rangle_A|-\beta\rangle_B) \cdots \cdots (1)$$

ここで、 $\{\alpha, -\alpha\}, \{\beta, -\beta\}$ は、A, Bの各部分系におけるコヒーレント状態の振幅を表す。また、 $h_4 = 1/\sqrt{2(1 - \kappa_A \kappa_B)}$, $\kappa_A = \langle \alpha | -\alpha \rangle$, $\kappa_B = \langle \beta | -\beta \rangle$ である。以降、 α と β は非負の実数であると仮定する。

3. エンタングルメントに対する減衰の影響

3.1 減衰のモデル 本研究では、エンタングルメント援助による古典情報伝送への応用を想定し、送信者は、系 A を保持し、系 B をエネルギー減衰通信路を通して受信者へ伝送する、片側減衰モデルを扱う。 η を減衰通信路における透過率 ($0 \leq \eta \leq 1$) とすれば、A, B の混合状態を表す統計作用素 ρ_{AB} は、結果として、

$$\begin{aligned} \rho_{AB} = & (\tilde{h}_4)^2 (|\alpha\rangle_A \langle \alpha| \otimes |\sqrt{\eta}\beta\rangle_B \langle \sqrt{\eta}\beta| \\ & - L|\alpha\rangle_A \langle -\alpha| \otimes |\sqrt{\eta}\beta\rangle_B \langle -\sqrt{\eta}\beta| \\ & - L|-\alpha\rangle_A \langle \alpha| \otimes |-\sqrt{\eta}\beta\rangle_B \langle \sqrt{\eta}\beta| \\ & + |-\alpha\rangle_A \langle -\alpha| \otimes |-\sqrt{\eta}\beta\rangle_B \langle -\sqrt{\eta}\beta|) \cdots \cdots (2) \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \tilde{h}_4 = & 1/\sqrt{2(1 - L\kappa_A \kappa'_B)}, \quad \kappa'_B = \langle \sqrt{\eta}\beta | -\sqrt{\eta}\beta \rangle \\ L = & \langle \sqrt{1-\eta}\beta | -\sqrt{1-\eta}\beta \rangle = \exp[-2(1-\eta)|\beta|^2] \end{aligned}$$

3.2 EoF の計算 まず、準備として、系 A に対し、2つの直交ベクトル $|1\rangle = |\alpha\rangle$, $|0\rangle = (|-\alpha\rangle - \kappa_A|\alpha\rangle)/\sqrt{1-\kappa_A^2}$ を導入する。同様に系 B に対しても直交ベクトル $|1\rangle, |0\rangle$ を導入することができる。コヒーレント状態は、一般には、無限次元の光系に属するが、 ρ_{AB} のサポートが、上記の直交ベクトルで張られる4次元の部分空間であることに注意すると、 ρ_{AB} の EoF の計算には、混合 2-qubit 状態に対する公式⁽⁴⁾が適用でき、

* 名古屋工業大学, 名古屋市昭和区御器所町
Nagoya Institute of Technology, Nagoya 466-8555, Japan
** 愛知県立大学, 愛知県長久手町熊張
Aichi Prefectural University, Aichi 480-1198, Japan

$$E(\rho_{AB}) = h\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-C^2}\right) \dots\dots\dots(3)$$

となる。ただし、 h は 2 値エントロピー関数 $h(x) = -x\log_2 x - (1-x)\log_2(1-x)$ であり、

$$C = \max\{0, 2\lambda_{\max} - \text{Tr}R\} \dots\dots\dots(4)$$

$\lambda_{\max}$ は $R = \sqrt{\rho_{AB}\tilde{\rho}_{AB}\rho_{AB}}$ の固有値の最大値、 $\tilde{\rho}_{AB} = \sum_{i,j} |e_i\rangle\langle e_j|\rho_{AB}|e_i\rangle\langle e_j|$ 、 $\{|e_i| i=1,2,3,4\}$ は、直交ベクトル $|1\rangle, |0\rangle$ に基づく 4 つのベル状態の集合で、マジック基底と呼ばれる。

3.3 エンタングルメント特性 EoF とコヒーレント状態の振幅 α と β との関係を考察するため、 $\eta = 0.5$ の場合の α と β に対する EoF の等高線グラフを図 1 に示す。等高線グラフは色が白いほど EoF の値が大きく、黒に近いほど EoF が小さいことを表している。

図 1 より、振幅が小さく、かつ $\alpha \approx \beta$ のとき、EoF が大

図 1 EoF as a function of amplitudes α and β .

図 2 Pair of amplitudes α and β with which EoF is maximized.

図 3 EoF with respect to amplitude and transparency.

図 4 EoF as a function of transparency η .

きいことがわかる。これは、振幅が大きいと少しの減衰で量子性が失われてしまうことに対応していると考えられる。透過率 η が異なっても、定性的には図 1 と同様になる。図 2 は、EoF を最大にする α と β を示したものである。参考のため、 $\alpha = \beta$ を示す破線も示している。図 2 より、振幅が小さい場合、 $\alpha \approx \beta$ のとき EoF は最大となる。また、振幅 α を大きくしていった場合、 β は η の値に応じてある値に収束することがわかる。これは、エンタングルメントは系 A と B の量子相関であるため、両系のバランスがとれていた方が大きく、減衰がなければ $\beta \approx \alpha$ がよいが、振幅が小さい方が減衰の影響を受けにくいことから、系 B に減衰があるときは $\beta < \alpha$ とした方が良いことを表し、また、 α がある程度大きければ、系 A の方はほぼ直交とみなせ、 β の最適値は一定値に落ち着くためと理解できる。

図 3 は、 $\alpha = \beta$ とし、振幅と透過率に対する EoF の値を等高線グラフで表したものである。図 3 より、 α が大きいとき、透過率が 1 に近くないと、EoF は急激に小さくなる。また、 α を小さくするほど、EoF は大きくなるが、 $\alpha < 0.1$ では、EoF はほとんど変わらない。

図 4 は、比較のため、ベル状態と擬似ベル状態について透過率に対する EoF の値を表したものである。破線は単一光子によるベル状態の EoF で、 η に比例している。実線は擬似ベル状態の EoF を表しており、これまでの結果から、振幅を $\alpha = \beta = 0.01$ としている。図 4 より、ベル状態に比べ、擬似ベル状態の方が EoF が大きいことがわかる。したがって、適切な振幅の擬似ベル状態は単一光子によるベル状態より通信路の影響を受けにくく、エンタングルメントの劣化が小さいといえる。

4. まとめ

コヒーレント状態による擬似ベル状態に対し、エンタングルしたペアの片方のみを減衰させたときの、EoF の特性を考察した。結果として、コヒーレント状態の振幅は小さいほどよく、振幅が大きい場合は、透過率が 1 に近くないと EoF の値は急激に小さくなってしまったことがわかった。また、単一光子によるベル状態に比べ、擬似ベル状態の方が通信路の影響を受けにくいということが確認された。よって、文献⁽²⁾ の Fidelity を用いた考察は、エンタングルメントの強さという意味でも、定性的には正しい結果を示していたといえる。

本研究の一部は、総務省の「戦略的情報通信研究開発推進制度」による研究成果である。

文 献

- (1) O. Hirota and M. Sasaki: "Entangled states based on nonorthogonal state", Proc. QCM&C2000, pp.359-366 (2001)
- (2) O. Hirota, M. Sohma, and K. Kato: "Quasi bell states; Generation and application to entanglement assisted communication", Proc. Photonics-2002 (2002)
- (3) C.H. Bennett, et al.: "Mixed-state entanglement and quantum error correction", Phys. Rev. A54, pp.3824-3851 (1996)
- (4) S. Hill and W.K. Wootters: "Entanglement of a pair of quantum bits", Phys. Rev. Lett. 78, pp.5022-5025 (1997)
- (5) 氏原紀公 訳:「量子光学の考え方」, 内田老鶴園 (1989)
- (6) 木村達也 訳:「量子コンピュータと量子通信」, オーム社 (2005)