Proposal of Particle Swarm Optimization Methods with Nonlinear Dissipative Term

Hideki Murata Non-member (Keio University)

Keiichiro Yasuda Member (Tokyo Metropolitan University)

Eitaro Aiyoshi Member (Keio University)

Keywords: global optimization, particle swarm optimization, dissipative dynamical system

1. Introduction

In this paper, we propose three types of new Particle Swarm Optimization (PSO) method. PSO, one of global optimization methods, is known for its high searching ability and easy implement. However, it might be difficult to find the global optimum for optimization problems which have a lot of decision variables and local optima. Proposed models improve searching ability through such cases. One is a model with the nonlinear dissipative term to prohibit the search point's velocity being zero. The others are models with the nonlinear dissipative term with the pbest or the gbest information to disturb the search around them.

2. Proposed Models

The dynamics of a continuous time PSO model for an object function $E : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ is written as the following equations.

$$\frac{d^2 \mathbf{x}^p(t)}{dt^2} + a \frac{d\mathbf{x}^p(t)}{dt} = c[c_1\{\mathbf{x}^p(T^p(t)) - \mathbf{x}^p\} + c_2\{\mathbf{x}^{Q(t)}(T^o(t)) - \mathbf{x}^p\}] \quad (1a)$$

$$T^p(t) = \underset{\tau}{\operatorname{argmin}}\{E(\mathbf{x}^p(\tau)) \mid 0 \leq \tau \leq t\} \quad (1b)$$

$$(Q(t), T^o(t)) = (\underset{(q, \tau)}{\operatorname{argmin}}\{E(\mathbf{x}^q(\tau)) \mid q = 1, \dots, P, 0 \leq \tau \leq t\}) \quad (1c)$$

where $\mathbf{x}^p(t)$ shows the position of p -th searching point at t . Now we change the linear dissipative term $a \frac{d\mathbf{x}^p(t)}{dt}$ into a nonlinear dissipative term which prohibits the search point's velocity being zero and introduce a state variable $\mathbf{v}^p$. Furthermore by making it discrete through Euler method, the following discrete time model is obtained.

$$\begin{aligned} v_i^p(k+1) &= \lambda(\mathbf{v}^p(k))v_i^p(k) \\ &\quad + c_1 r_{i1} \{x_i^p(l^p(k)) - x_i^p(k)\} \\ &\quad + c_2 r_{i2} \{x_i^{Q(k)}(l^o(k)) - x_i^p(k)\} \dots \dots (2a) \end{aligned}$$

$$x_i^p(k+1) = x_i^p(k) + v_i^p(k+1) \quad (2b)$$

$$\lambda(\mathbf{v}) = 1 - d_1 + d_1 d_0 \exp\left(\frac{-\|\mathbf{v}\|}{d_2 d_0}\right) \quad (2c)$$

$$l^p(k) = \underset{l}{\operatorname{argmin}}\{E(\mathbf{x}^p(l)) \mid l = 0, 1, \dots, k\} \quad (2d)$$

$$\begin{aligned} (Q(k), l^o(k)) &= \underset{(q, l)}{\operatorname{argmin}}\{E(\mathbf{x}^q(l)) \mid q = 1, 2, \dots, P, \\ &\quad l = 0, 1, \dots, k\} \dots \dots (2e) \end{aligned}$$

where r_{i1}, r_{i2} is uniform random numbers in $[0, 1]$. This model is called model.1. Other two proposed models are given the following nonlinear inertia weights λ .

model.2:

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{x}^p(l^p(k)) - \mathbf{x}^p(k)) &= \\ 1 - d_1 + d_1 d_0 \exp\left(\frac{-\|\mathbf{x}^p(l^p(k)) - \mathbf{x}^p(k)\|}{d_2 d_0}\right) &\dots \dots (3) \end{aligned}$$

model.3:

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{x}^{Q(k)}(l^o(k)) - \mathbf{x}^p(k)) &= \\ 1 - d_1 + d_1 d_0 \exp\left(\frac{-\|\mathbf{x}^{Q(k)}(l^o(k)) - \mathbf{x}^p(k)\|}{d_2 d_0}\right) &\dots \dots (4) \end{aligned}$$

3. Computational Results

The computational results for some benchmarks are shown in Table 1. The convergence rate to global minimum, the mean value, the best value, the worst value, and standard deviation of the value of gbest through 100 trials by each model with 20 particles are shown in Table 1.

Table 1. Comparison of searching ability

benchmark	model	CR	mean value	best value	worst value	SD	CPU-Time
Rastrigin (n=12)	PSO- RM	2%	3.9109	0.0	9.94586	3.212463	310.99
	model.1($d_0(0)=40$)	56%	0.606925	0.0	2.984877	0.591557	342.44
	model.2($d_0(0)=30$)	96%	0.039798	0.0	0.994959	0.038014	364.57
	model.3($d_0(0)=30$)	96%	0.039798	0.0	0.994959	0.038014	365.33
Levy-No.5 (n=50)	PSO- RM	75%	0.027089	0.0	0.370709	0.003283	2690.3
	model.1($d_0(0)=40$)	88%	0.011082	0.0	0.184643	0.001090	2836.5
	model.2($d_0(0)=30$)	91%	0.00431	0.0	0.061585	0.000247	2904.2
	model.3($d_0(0)=30$)	96%	0.00431	0.0	0.123114	0.000323	2908.3
Griewank (n=6)	PSO- RM	39%	0.035641	0.0	0.114410	0.000960	201.58
	model.1($d_0(0)=80$)	77%	0.012826	0.0	0.081540	0.000582	233.73
	model.2($d_0(0)=80$)	91%	0.04335	0.0	0.065254	0.000197	250.05
	model.3($d_0(0)=80$)	95%	0.002047	0.0	0.040495	0.000080	249.55
2n-minima (n=14)	PSO- RM	51%	-1077.71	-1096.65	-1011.83	480.511	268.48
	model.1($d_0(0)=180$)	56%	-1079.97	-1096.65	-1011.83	449.175	308.24
	model.2($d_0(0)=100$)	96%	-1095.52	-1096.65	-1068.38	30.6964	321.46
	model.3($d_0(0)=100$)	92%	-1094.39	-1096.65	-1068.38	58.8349	319.85

CR:Convergence Rate, SD:Standard Deviation

非線形散逸項を有する Particle Swarm Optimization 法の提案

非会員 村田 秀樹* 正員 安田 恵一郎**
正員 相吉 英太郎*

Proposal of Particle Swarm Optimization Methods with Nonlinear Dissipative Term

Hideki Murata*, Non-member, Keiichiro Yasuda**, Member, Eitaro Aiyoshi*, Member

Optimization methods based on meta-heuristics are proposed as a class of global optimization methods, by which the global minimum can be obtained without trapping in local minima. Particle swarm optimization (PSO), which is one of those methods, is known for its high search ability and easy implement. However, it might be difficult to find the global optimum for optimization problems which have a lot of decision variables and local optima. In this paper, we propose three types of new PSO to clear the weak point. One is a model with the nonlinear dissipative term introduced by Fujita, Yasuda and Yokoyama⁽⁴⁾ to prohibit the search point's velocity being zero. The others are models with the nonlinear dissipative term with the pbest or the gbest information to disturb the search around them.

キーワード：大域的最適化, Particle Swarm Optimization, 散逸力学系

Keywords: global optimization, particle swarm optimization, dissipative dynamical system

1. はじめに

最適化問題は、ある決定変数に従属して決まる目的関数の値を最大または最小にするような解、つまり最適解を求める問題のことで、制御系や信号処理システムの設計、機械構造物の設計、電力系統などのエネルギーシステムの設計には不可欠な問題である。とくに、目的関数が多峰性関数の場合において、局所的最適解への停留を回避して、大域的最適解を得る大域的最適化手法の開発が、この分野の重要な研究テーマとなっている。最近では、メタヒューリスティックスという概念に基づく大域的最適化手法の一つである、Particle Swarm Optimization^{(1)~(3)} (以下 PSO と略する) が、そのアルゴリズムの簡便さや大域的探索性能の高さから注目を集めているが、目的関数の多峰性が強く、かつ変数次元が高い問題の場合には、探索性能が劣化することが指摘されている。そこで本論文では、PSO モデルの改良により、変数次元の高い問題に対しても、その大域的探索性能をある程度維持できる新しい計算モデルを提案する。

ところで、PSO の計算モデルは、速度が等比数列形の線形慣性系のモデルに、pbest と称する過去における各探索点の最良位置への移流方向と、gbest と称する探索点群全体の過去の最良位置への移流方向の畳み込みを外部入力とする多点型離散力学系モデルである。そこで本論文では、探索点単体の慣性系モデルを非線形化することより、探索点自体のダイナミクスの機能を強化した上で、pbest や gbest の情報もその非線形要素に取り込むことにより、結合型非線形力学系として、その動特性を高機能化することを考える。具体的には、(1) 探索点単体の非線形モデルとして、速度がゼロとなる停留状態を回避する負性抵抗を有する非線形散逸モデル⁽⁴⁾、(2) 結合系としての特徴を生かすために、負性抵抗の項に pbest や gbest の情報を加えることにより、それらに近接すると負性抵抗によってそれらから反発するような非線形散逸モデル、の導入である。これらのモデルによる多点探索により、従前型の PSO では探索の進捗につれて、pbest や gbest に収束して探索の多様性を喪失してしまう現象を防ぐことができ、変数次元の高い問題に対しても、より良好な大域的探索性能を有するものと期待される。

2. Particle Swarm Optimization(PSO)

PSO^{(1)~(3)} では、Particle と呼ばれる複数の探索点（以降個体と称する）が、それぞれの位置と速度を、逐次更新しながら解空間を探索する。目的関数 $E: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^1$ に対する無制約最適化問題

* 慶應義塾大学理工学部

〒 223-8522 横浜市港北区日吉 3-14-1

Faculty of Science and Technology, Keio University

3-14-1 Hiyoshi, Kouhoku-ku, Yokohama, 223-8522

** 東京都立大学大学院工学研究科

〒 192-0397 東京都八王子市南大沢 1-1

Faculty of Engineering, Tokyo Metropolitan University

1-1 Minami Oosawa, Hachioji, Tokyo, 192-0397

$$\min_{\mathbf{x}} E(\mathbf{x}) \dots \dots \dots (1)$$

を解くための、PSO の更新式は、

$$\begin{aligned} v_i^p(k+1) = & \lambda v_i^p(k) + c_1 r_{1i} \{x_i^p(l^p(k)) - x_i^p(k)\} \\ & + c_2 r_{2i} \{x_i^{Q(k)}(l^o(k)) - x_i^p(k)\} \\ & \dots \dots \dots (2a) \end{aligned}$$

$$x_i^p(k+1) = x_i^p(k) + v_i^p(k+1) \dots \dots \dots (2b)$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad p = 1, 2, \dots, P \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

と書くことができる。ただし、 $x_i^p(k), v_i^p(k)$ は p 番目の個体の時刻 k における位置と速度の第 i 成分を、 r_{1i}, r_{2i} は区間 $[0, 1]$ の一様乱数、 λ, c_1, c_2 は、各項の重み係数である。また、

$$l^p(k) = \operatorname{argmin}_l \{E(\mathbf{x}^p(l)) \mid l = 0, 1, \dots, k\} \dots (3a)$$

$$\begin{aligned} (Q(k), l^o(k)) = & \operatorname{argmin}_{(q,l)} \{E(\mathbf{x}^q(l)) \mid q = 1, 2, \dots, P, \\ & l = 0, 1, \dots, k\} \dots \dots (3b) \end{aligned}$$

であり、 $l^p(k)$ は、個体 p が時刻 k までに関数 E の値を最も小さくした時刻を表し、そのときの位置 $\mathbf{x}^p(l^p(k))$ は pbest とよばれている。また、 $(Q(k), l^o(k))$ は、 P 個の個体からなる個体群の中で時刻 k までに、関数 E の値を最も小さくした個体番号とその時刻を表し、そのときの位置 $\mathbf{x}^{Q(k)}(l^o(k))$ は gbest とよばれている。ここで、(2) 式から乱数項を無くし、pbest, gbest への移流方向を表す項をそれぞれ

$$\mathbf{F}^p(\mathbf{x}^p, k) = c_1 \{\mathbf{x}^p(l^p(k)) - \mathbf{x}^p\} \dots \dots \dots (4a)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}^p, k) = c_2 \{\mathbf{x}^{Q(k)}(l^o(k)) - \mathbf{x}^p\} \dots \dots \dots (4b)$$

とおくと、(2) 式は、

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^p(k+1) = & \lambda \mathbf{v}^p(k) + \mathbf{F}^p(\mathbf{x}^p(k), k) + \mathbf{C}(\mathbf{x}^p(k), k) \\ & \dots \dots \dots (5a) \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}^p(k+1) = \mathbf{x}^p(k) + \mathbf{v}^p(k+1) \dots \dots \dots (5b)$$

$$p = 1, 2, \dots, P \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

となる。さらに (5) 式を解いて級数形式で書き表すと、

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^p(k+1) = & \mathbf{x}^p(k) + \sum_{l=0}^k \left[\lambda^{k-l} \{ \mathbf{F}^p(\mathbf{x}^p(l), l) \right. \\ & \left. + \mathbf{C}(\mathbf{x}^p(l), l) \} + \lambda^{k+1} \mathbf{v}^p(0) \right] \\ & \dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

となる。ただし

$$\mathbf{F}^p(\mathbf{x}^p(0), 0) = \mathbf{x}^p(0) - \mathbf{x}^p(0) = \mathbf{0} \dots \dots \dots (7)$$

とする。以上より、PSO の計算モデルは、速度が等比数列形の線形慣性系のモデルに、pbest への移流方向と、gbest への移流方向の畳み込みを外部入力とする離散時間慣性系モデルであることがわかる。

3. 連続時間 PSO モデル

離散時間モデルである PSO に対し、その計算モデルの連続化を試みると、(6) 式より

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}^p(t)}{dt} = & c \int_0^t e^{-a(t-\tau)} [\mathbf{F}^p(\mathbf{x}^p(\tau), \tau) + \mathbf{C}(\mathbf{x}^p(\tau), \tau)] d\tau \\ & + e^{-at} \frac{d\mathbf{x}^p(0)}{dt} \dots \dots \dots (8) \end{aligned}$$

なるモデルを導入することができる。両辺微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{x}^p(t)}{dt^2} + a \frac{d\mathbf{x}^p(t)}{dt} = & c [\mathbf{F}^p(\mathbf{x}^p(t), t) + \mathbf{C}(\mathbf{x}^p(t), t)] \\ & \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

となる。このモデルを、連続時間 PSO モデルと称する。ここで、 $T^p(t)$ や $(Q(t), T^o(t))$ を (3) 式に対応して、

$$T^p(t) = \operatorname{argmin}_{\tau} \{E(\mathbf{x}^p(\tau)) \mid 0 \leq \tau \leq t\} \dots (10a)$$

$$\begin{aligned} (Q(t), T^o(t)) = & \operatorname{argmin}_{(q,\tau)} \{E(\mathbf{x}^q(\tau)) \mid q = 1, \dots, P, \\ & 0 \leq \tau \leq t\} \dots \dots (10b) \end{aligned}$$

とすると、 $\mathbf{F}^p$ や $\mathbf{C}$ は (4) 式に対応して、

$$\mathbf{F}^p(\mathbf{x}^p, t) = c_1 \{\mathbf{x}^p(T^p(t)) - \mathbf{x}^p\} \dots \dots \dots (11a)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}^p, t) = c_2 \{\mathbf{x}^{Q(t)}(T^o(t)) - \mathbf{x}^p\} \dots \dots \dots (11b)$$

である。(10a) 式の $T^p(t)$ は、初期時刻 $\tau = 0$ から現時刻 $\tau = t$ の連続時間区間 $[0, t]$ 上の個体 p の軌道 $\mathbf{x}^p(\bullet)$ に対して関数 E を評価し、その最小値を与える時刻を意味している。現時刻 $\tau = t$ はこれ自体、時間変数として時々刻々変化するので、 E の最小値を与える時刻 T^p もこの t の関数として $T^p(t)$ と記してあることに注意されたい。また、(10b) 式の $(Q(t), T^o(t))$ は、連続時間区間 $[0, t]$ において、すべて個体の軌道上で E を評価し、最小値を与える個体番号とその時刻を意味している。

4. 非線形散逸項を有する PSO モデル

最適化問題を解くための、連続系の慣性系モデル

$$\frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2} + a \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = -c \nabla E(\mathbf{x}(t)) \dots \dots \dots (12)$$

に対し、その線形散逸項 $a \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$ を非線形散逸項

$$\begin{aligned} \xi \left(\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right) = & d_1 \left\{ 1 - d_0 \exp \left(- \left\| \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right\| \right) \right\} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \\ & \dots \dots \dots (13) \end{aligned}$$

に置き換えることで、局所解へ停留を能動的に回避する非線形モデルが、藤田・安田らにより提案されている⁽⁴⁾。この非線形抵抗は、探索点の速度 $\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$ のノルム $\left\| \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right\|$ が、 $\left\| \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right\| > d_2 d_0 \ln d_0$ を満たすほど大きいときは、正抵抗として働き、探索点が局所解に近づき、 $\left\| \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right\| < d_2 d_0 \ln d_0$ を満たすほど小さくなると、負抵抗として働くことで、

能動的に局所解への停留を妨げる。この非線形散逸項 (13) を, (9) 式で表される連続時間 PSO に適用すると,

$$\frac{d^2 \mathbf{x}^p(t)}{dt^2} + \xi \left(\frac{d\mathbf{x}^p(t)}{dt} \right) = c [\mathbf{F}^p(\mathbf{x}^p(t), t) + \mathbf{C}(\mathbf{x}^p(t), t)] \dots\dots\dots (14a)$$

$$\xi \left(\frac{d\mathbf{x}^p(t)}{dt} \right) = d_1 \left\{ 1 - d_0 \exp \left(- \frac{\| \frac{d\mathbf{x}^p(t)}{dt} \|}{d_2 d_0} \right) \right\} \frac{d\mathbf{x}^p(t)}{dt} \dots\dots\dots (14b)$$

となる。ここで, $c = 1$ とし, 状態変数 $\mathbf{v}^p = \frac{d\mathbf{x}^p(t)}{dt}$ とすると,

$$\frac{d\mathbf{v}^p(t)}{dt} = -d_1 \left\{ 1 - d_0 \exp \left(- \frac{\| \mathbf{v}^p(t) \|}{d_2 d_0} \right) \right\} \mathbf{v}^p(t) + \mathbf{F}^p(\mathbf{x}^p(t), t) + \mathbf{C}(\mathbf{x}^p(t), t) \dots\dots (15a)$$

$$\frac{d\mathbf{x}^p(t)}{dt} = \mathbf{v}^p(t) \dots\dots\dots (15b)$$

となる。さらに, (15) 式を, オイラー法により離散化幅 $\Delta T = 1$ で, 離散化すると,

$$\mathbf{v}^p(k+1) = \mathbf{v}^p(k) - d_1 \left\{ 1 - d_0 \exp \left(- \frac{\| \mathbf{v}^p(k) \|}{d_2 d_0} \right) \right\} \mathbf{v}^p(k) + \mathbf{F}^p(\mathbf{x}^p(k), k) + \mathbf{C}(\mathbf{x}^p(k), k) \dots\dots (16a)$$

$$\mathbf{x}^p(k+1) = \mathbf{x}^p(k) + \mathbf{v}^p(k+1) \dots\dots\dots (16b)$$

となる。ここで, $\mathbf{F}^p(\mathbf{x}^p(k), k)$, $\mathbf{C}(\mathbf{x}^p(k), k)$ を (4) 式により置き換え, 乱数の項を再び加えると,

$$v_i^p(k+1) = \lambda(\mathbf{v}^p(k)) v_i^p(k) + c_1 r_{1i} \{x_i^p(l^p(k)) - x_i^p(k)\} + c_2 r_{2i} \{x_i^{Q(k)}(l^o(k)) - x_i^p(k)\} \dots\dots (17a)$$

$$x_i^p(k+1) = x_i^p(k) + v_i^p(k+1) \dots\dots\dots (17b)$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad p = 1, 2, \dots, P \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

となる。ただし,

$$\lambda(\mathbf{v}) = 1 - d_1 + d_1 d_0 \exp \left(- \frac{\| \mathbf{v} \|}{d_2 d_0} \right) \dots\dots\dots (18)$$

で, 慣性の重み λ が, 個体速度 $\mathbf{v}$ に従属した非線形な関数 $\lambda(\mathbf{v})$ で決定するモデルとなる。このモデルを, model.1 とする。

ところで, 非線形散逸項 (13) 式は,

$$\xi(\mathbf{y}) = d_1 \left\{ 1 - d_0 \exp \left(- \frac{\| \mathbf{y} \|}{d_2 d_0} \right) \right\} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = (1 - \lambda(\mathbf{y})) \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \dots\dots\dots (19)$$

と一般化することができる。すなわち, あるベクトル $\mathbf{y}$ のノルム $\| \mathbf{y} \|$ が, $\| \mathbf{y} \| > d_2 d_0 \ln d_0$ を満たすほど大きいとき, エネルギーが散逸するよう正抵抗をもたせ, $\| \mathbf{y} \| < d_2 d_0 \ln d_0$ を満たすほど小さくなると, エネルギーの提供を受ける負性抵抗をもたせることを意味している。そこで

まず, 過去の探索点の情報である pbest 情報により駆動するという, PSO の特徴を散逸項に生かしたモデルとして, $\mathbf{y} = \mathbf{x}^p(l^p(k)) - \mathbf{x}^p$ とした

$$\lambda(\mathbf{x}^p(l^p(k)) - \mathbf{x}^p(k)) = 1 - d_1 + d_1 d_0 \exp \left(- \frac{\| \mathbf{x}^p(l^p(k)) - \mathbf{x}^p(k) \|}{d_2 d_0} \right) \dots\dots\dots (20)$$

を有するモデル

$$v_i^p(k+1) = \lambda(\mathbf{x}^p(l^p(k)) - \mathbf{x}^p(k)) v_i^p(k) + c_1 r_{1i} \{x_i^p(l^p(k)) - x_i^p(k)\} + c_2 r_{2i} \{x_i^{Q(k)}(l^o(k)) - x_i^p(k)\} \dots\dots\dots (21a)$$

$$x_i^p(k+1) = x_i^p(k) + v_i^p(k+1) \dots\dots\dots (21b)$$

を考えることができる。このモデルは, pbest 方向へ駆動されるものの, 個体と pbest との距離が小さくなりすぎると, エネルギー供給を受けた負性抵抗により, pbest への漸近を回避, ないしはそれから反発する特性を有するものといえる。

さらに同様に, 探索個体群全体の大域的な情報により駆動するという, PSO の結合系としての特徴を散逸項に生かしたモデルとして, $\mathbf{y} = \mathbf{x}^{Q(k)}(l^o(k)) - \mathbf{x}^p$ とした

$$\lambda(\mathbf{x}^{Q(k)}(l^o(k)) - \mathbf{x}^p(k)) = 1 - d_1 + d_1 d_0 \exp \left(- \frac{\| \mathbf{x}^{Q(k)}(l^o(k)) - \mathbf{x}^p(k) \|}{d_2 d_0} \right) \dots\dots\dots (22)$$

を有するモデル

$$v_i^p(k+1) = \lambda(\mathbf{x}^{Q(k)}(l^o(k)) - \mathbf{x}^p(k)) v_i^p(k) + c_1 r_{1i} \{x_i^p(l^p(k)) - x_i^p(k)\} + c_2 r_{2i} \{x_i^{Q(k)}(l^o(k)) - x_i^p(k)\} \dots\dots\dots (23a)$$

$$x_i^p(k+1) = x_i^p(k) + v_i^p(k+1) \dots\dots\dots (23b)$$

を考えると, このモデルは, gbest 方向へ駆動されるものの, それに近づきすぎると gbest への漸近を回避, ないしはそれから反発する特性を有するものといえる。

(21) 式や (23) 式のモデルでは, PSO に特徴的な個体を駆動する外部の入力情報を非線形散逸項に取り込んだモデルであり, 単に個体の停留性を回避する model.1 とは異なり, 個体の挙動に多様な動きを与えたモデルといえる。以下では, これらのモデルをそれぞれ model.2, model.3 と称することにする。

5. パラメータと安定性

(18) 式の慣性の重み $\lambda(\mathbf{v})$ は, パラメータ d_0 により, その値が制御される。 $d_1 = 0.5, d_2 = 0.01$ としたときの, $\lambda(\mathbf{v})$

図 1 慣性の重み λ

Fig. 1. Nolinear inertia weight λ

と $\|v\|$ の関係を図 1 に示す。一方、ランダム要素を排除した PSO 縮約モデルのダイナミクス解析において、 c_1, c_2, λ が、

$$0 < \frac{c_1 + c_2}{2} < 2\lambda + 2 \dots \dots \dots (24a)$$

$$0 \leq \lambda < 1 \dots \dots \dots (24b)$$

を満たす場合、探索点は収束傾向が強まり、満たさない場合は発散傾向が強まることが報告されている⁽⁵⁾⁽⁶⁾。図 1 において、 $d_0 \geq 1.0$ では、 $\|v\|$ が 0 に近づくにつれて λ が 1 より大きくなって発散傾向が強まり、 $d_0 < 1.0$ のときには、 $\|v\| = 0$ においても $\lambda < 1.0$ となり、収束傾向が強まることがわかる。そこで、 $d_0(0) > 1.0$ とし、

$$d_0(k+1) = d_0(k) - \frac{d_0(0)}{K} \dots \dots \dots (25)$$

と探索の進捗に従い徐々に小さくすることで、探索点群の多様化と集中化を制御することができるものと期待される。ただし、 K は、最大の更新回数とする。

6. シミュレーション

本章では、いくつかのベンチマーク問題に対して、提案モデルと従来手法である PSO(IWA)⁽⁷⁾⁻⁽⁹⁾ を適用し、両者の計算結果の比較を行った。ここで扱うベンチマークはすべて、変数の上下限値が成分に無関係に、

$$\min_{\mathbf{x}} E(\mathbf{x}) \dots \dots \dots (26a)$$

$$\text{subj.to } b_1 \leq x_i \leq b_2, \quad i = 1, \dots, n \dots \dots \dots (26b)$$

の形で書けるものである。すべての問題に対して、提案モデルのパラメータを、 $d_1 = 0.5$, $d_2 = 0.01(b_2 - b_1)$ と設定した。PSO(IWA) は、(2) 式の慣性の重み λ を、 $0.9 \rightarrow 0.4$ と線形に減少させた。また、従来モデル、提案モデルともに、 r_{1i} や r_{2i} に一様乱数を用いる場合には、 $c_1 = c_2 = 2.0$ とし、 $|v_i|$ の最大値として $v_{max} = 0.5(b_2 - b_1)$ を設定し、

$$v_i(k+1) = \text{sgn}(v_i(k)) \min\{v_{max}, |v_i(k)|\} \dots (27)$$

とした。初期位置 $x_i^p(0)$ は、区間 $[b_1, b_2]$ の一様乱数で与

図 2 Griewank 関数最小化問題に対する探索点の軌道

Fig. 2. Time series orbit of a search point through Griewank's function ($n = 6$)

え、初速度 $v_i^p(0)$ は、区間 $[-0.5(b_2 - b_1), 0.5(b_2 - b_1)]$ の一様乱数で与えた。個体数 P は、 $P = 20$ とした。また、制約条件については外点ペナルティー法⁽¹⁰⁾により

$$\begin{aligned} \hat{E}(\mathbf{x}) = E(\mathbf{x}) + s \sum_{i=1}^n \{\min(0, x_i - b_1)\}^2 \\ + s \sum_{i=1}^n \{\min(0, b_2 - x_i)\}^2 \dots \dots (28) \end{aligned}$$

と目的関数に取り込んだ。ただし、 s はペナルティ係数で、

図3 gbestの目的関数値の遷移

Fig. 3. Transition of value of gbest

$s = 1.0 \times 10^4$ とした。最大の更新回数は $K = 5000$ とした。各ベンチマーク問題に対して、100 回試行した際の PSO(IWA) と各提案手法の探索性能の比較を表 1 に示す。ただし、CR(convergence rate) は、大域的最適解への収束を意味し、gbest と大域的最適解間のノルムが 1.0×10^{-3} 以下となれば、収束していると判定した。mean value, best value, worst value, SD(standard deviation) は、各モデルにより得られた gbest の目的関数値の平均値、最良値、最悪値、標準偏差を表している。CPU Time (ミリ秒) は 100 回試行のおおよその平均値である。また、提案モデルの各 $d_0(0)$ の設定値を表中に示した。pbest 周りの探索を回避する model.2 と、gbest 周りの探索を回避する model.3 は従来法と比較すると、どのベンチマーク問題に対しても良好な大域的探索性能を有していることがわかる。なお、各モデルの係数 r_{1i} や r_{2i} に乱数を用いずに $r_{1i} = r_{2i} = 1$ と固定し、pbest, gbest への移流の重み係数を $c_1 = c_2 = 1.0$ とした場合で、同様のシミュレーションを行った際の探索性能の比較を表 2 に示す。乱数を用いないと探索性能が著しく劣化しており、とくに model.3, model.2 はその劣化の度合いが大きいことから、乱数の探索性能に与える影響が大きいといえる。 $r_{1i} = r_{2i} = 1$, $c_1 = c_2 = 1.0$ とした根拠は、乱数を用いた場合の $c_1 r_{1i}$, $c_2 r_{2i}$ の平均値と一致させるためである。

ベンチマーク問題の一つである Griewank 関数最小化問題に対して各モデルを適用した際の探索個体の一つに注目し、その位置ベクトルの 1 成分の時間発展を図 2 に示す。なお本問題の大域的最適解は、 $\mathbf{x}^* = (0, \dots, 0)$ である。従来法が、探索の比較的早い段階で局所解に収束しているのに対して、提案手法は、その探索軌道が収束傾向と発散傾向を繰り返していることがわかる。また、model.1 と比較して、model.2, model.3 のほうが、この繰り返しがより大域的に行われていることがわかる。また、同じベンチマークに対して、gbest の目的関数値のイテレーションに対する遷移を図 3 に示す。提案手法は、従来手法に比べ探索の初期段階で急激に gbest の目的関数値を下げ、その後も緩やかに目的関数値を下げていく。pbest, gbest への移流による探索の過程で得られた良い解周りの集中的な探索と、探

表 1 探索性能の比較

Table 1. Comparison of searching ability

benchmark	model	CR	mean value	best value	worst value	SD	CPU Time
Rastrigin (n=12)	PSO-IWA	2%	3.9109	0.0	9.94586	3.212463	310.99
	model.1($d_0(0) = 40$)	56%	0.006925	0.0	2.984877	0.591557	342.44
	model.2($d_0(0) = 30$)	96%	0.039798	0.0	0.994959	0.038014	364.57
	model.3($d_0(0) = 30$)	96%	0.039798	0.0	0.994959	0.038014	365.33
Levy-No.5 (n=50)	PSO-IWA	75%	0.027089	0.0	0.370709	0.003283	2690.3
	model.1($d_0(0) = 40$)	88%	0.011082	0.0	0.184643	0.001090	2836.5
	model.2($d_0(0) = 30$)	91%	0.00431	0.0	0.061585	0.000247	2904.2
	model.3($d_0(0) = 30$)	96%	0.00431	0.0	0.123114	0.000323	2908.3
Griewank (n=6)	PSO-IWA	39%	0.035641	0.0	0.114410	0.000960	201.58
	model.1($d_0(0) = 80$)	77%	0.012826	0.0	0.081540	0.000582	233.73
	model.2($d_0(0) = 80$)	91%	0.04335	0.0	0.065254	0.000197	250.05
	model.3($d_0(0) = 80$)	95%	0.002047	0.0	0.040495	0.000080	249.55
2n-minima (n=14)	PSO-IWA	51%	-1077.71	-1096.65	-1011.83	480.511	268.48
	model.1($d_0(0) = 180$)	56%	-1079.97	-1096.65	-1011.83	449.175	308.24
	model.2($d_0(0) = 100$)	96%	-1095.52	-1096.65	-1068.38	30.6964	321.46
	model.3($d_0(0) = 100$)	92%	-1094.39	-1096.65	-1068.38	58.8349	319.85

CR: Convergence Rate, SD: Standard Deviation

表 2 乱数の除いた探索性能の比較

Table 2. Comparison of searching ability without random numbers

benchmark	model	CR	mean value	best value	worst value	SD
Rastrigin (n=12)	model.1($d_0(0) = 40$)	0%	19.809063	6.964708	50.742750	57.893382
	model.2($d_0(0) = 30$)	0%	48.057786	15.41890	97.726683	302.31466
	model.3($d_0(0) = 30$)	0%	36.357613	14.56390	79.273381	210.02136
Levy-No.5 (n=50)	model.1($d_0(0) = 40$)	0%	55.418615	35.526977	99.390918	159.317852
	model.2($d_0(0) = 30$)	0%	74.817744	26.550677	164.85521	530.235503
	model.3($d_0(0) = 30$)	0%	55.982107	26.893741	128.51763	283.865603
Griewank (n=6)	model.1($d_0(0) = 80$)	0%	0.198596	0.040946	0.850564	0.020546
	model.2($d_0(0) = 80$)	0%	0.185318	0.0	0.654898	0.015622
	model.3($d_0(0) = 80$)	2.0%	0.149856	0.0	0.392491	0.007217
2n-minima (n=14)	model.1($d_0(0) = 180$)	0%	-929.7348	-1085.419530	-790.559381	2466.498850
	model.2($d_0(0) = 100$)	0%	-887.6521	-1013.649147	-681.287116	3719.251765
	model.3($d_0(0) = 100$)	0%	-932.7358	-1068.002553	-782.628120	2791.553043

索初期段階で gbest, pbest 周りの探索を回避させることによる多様な探索の二つをバランスよく取り入れたことが大域的探索性能の向上につながっていると考えられる。

なお、シミュレーション環境は、CPU が Intel Pentium M 1.6GHz, OS が Windows XP SP2 で、プログラムには C 言語を使用した。

7. おわりに

本論文では、PSO の慣性系を非線形化することにより、速度がゼロとなる停留状態を防ぐことができる負性抵抗を有する非線形散逸モデルと、負性抵抗の項に pbest や gbest の情報を含み、それらに近接すると反発するような非線形散逸モデルの 3 つの新しい PSO の計算モデルを導入した。ベンチマークを通して検討した結果、提案モデルは、従来手法と比較して、変数次元が高く多峰性を有する目的関数に対しても有効であることがわかった。また、速度がゼロとなるのを妨げる非線形散逸モデルよりも、pbest, gbest の近接するときに反発する非線形散逸モデルのほうが、その探索領域が多様化されるため、局所解収束が妨げられ、より高い割合で大域的最適解を得られることがわかった。なお、表 1 における非線形散逸項のパラメータ d_0 の初期値 $d_0(0)$ は、試行錯誤的にその最良値をもとめたものである。これらの値が示すように、パラメータの最良の値が問題ごとに比較的大きく異なっている。このためパラメータの最良値を問題ごとに設定する手法を開発することが今後に残された課題といえる。

(平成 18 年 6 月 15 日受付, 平成 18 年 11 月 8 日再受付)

- (1) J. Kennedy and R.C. Eberhart: "Swarm Intelligence", Morgan Kaufmann Publ (2000)
- (2) J. Kennedy and R.C. Eberhart: "Particle Swarm Optimization", Proc of IEEE International Conference on Neural Network (ICNN), Vol.4, pp.1942-1948 (1995)
- (3) R.C. Eberhart and Y. Shi: "Particle swarm optimization: developments, applications and resources", Proc. Congress on Evolutionary Computation 2001, Seoul, Korea Piscataway, NJ: IEEE Service Center (2001)
- (4) T. Fujita, K. Yasuda, and R. Yokoyama: "Global Optimization Method Using Chaos in Dissipative System", ISICE Trans., Vol.J77-A, No.6, pp.881-889 (1994) (in Japanese)
藤田・安田・横山:「散逸系カオスを用いた大域的最適化手法」, 信学論 (A), **J77-A**, 6, pp.881-889 (1994)
- (5) A. Ide, K. Yasuda, and N. Iwasaki: "Analysis of The Dynamics of Particle Swarm Optimization and Its Application to Global Optimization", Technical Meeting on System, SICE (2003) (in Japanese)
安田・井出・岩崎:「Particle Swarm Optimization: ダイナミクスの解析と大域的最適化への応用」, 第 28 回システム工学部会研究会 (2003)
- (6) K. Yasuda and N. Iwasaki: "Adaptive particle Swarm Optimization using velocity information of swarm", Proc. of IEEE Int. Conf. on Systems, Man, and Cybernetics, pp.3475-3481 (2004)
- (7) R.C. Eberhart and J. Kennedy: "A New Optimizer using Particle Swarm Theory", Proceedings of the Sixth International Symposium on Micro Machine and Human Science, pp39-43 (1995)
- (8) Y. Shi and R.C. Eberhart: "A modified Particle Swarm Optimizer", Proc of the 1998 IEEE conference on Evolutionary Computation, pp.69-73 (1998)
- (9) R.C. Eberhart and Y. Shi: "Comparing Inertia Weights and Constriction Factors in Particle Swarm Optimization", Proc. Congress on Evolutionary Computation, pp 84-88 (2000)
- (10) E. Aiyoshi and K. Shimizu: "Exercises of mathematical programming", Asakura Publishing (1985) (in Japanese)
相吉・志水:「数値計画法演習」, 朝倉書店 (1985)
- (11) L.A. Rastrigin: "Systems on Extremal Control", Nauka in Russian (1994)
- (12) A.V. Levy and A. Montalvo: "The Tunneling Alogorithm for the Global Minimization of Functions", SIAM J. SCI. STAT. COMPUT., Vol.6, No.1, pp.15-29 (1985)
- (13) A.O. Griewank: "Generalized Descent for Global Optimization", JOTA, Vol.34, No.1, pp.15-29 (1985)

付 録

1. ベンチマーク問題

本稿で用いたベンチマークを以下に示す。Rastrigin 関数は格子状に多数の局所最適解を持ち，決定変数間に依存関係を持たない。Levy-No. 5 関数は大域的には単峰性を有し，決定変数間に依存関係を有する。Griewank 関数は多数の局所解を有し，決定変数間に依存関係を有する。2ⁿminima 関数は n 個の決定変数に対して 2ⁿ 個の最適解を有し，決定変数間に依存関係を持たない。

(1) Rastrigin 関数 ⁽¹¹⁾

$$\min_{\mathbf{x}} E(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \{x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i) + 10\}$$

$$\text{subj.to } -5.0 \leq x_i \leq 5.0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\mathbf{x}^* = (0.0, \dots, 0.0), \quad E(\mathbf{x}^*) = 0.0$$

(2) Levy-No.5 関数 ⁽¹²⁾

$$\min_{\mathbf{x}} E(\mathbf{x}) = \frac{\pi}{n} \left[5.0 \sin^2(\pi y_1) + \sum_{i=1}^{n-1} \{(y_i - 1.0)^2 \times (1.0 + 5.0 \sin^2(\pi y_{i+1}))\} + (y_n - 1.0)^2 \right]$$

$$y_i = 1.0 + 10.0(x_i - 0.25)$$

$$\text{subj.to } -1.0 \leq x_i \leq 1.0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\mathbf{x}^* = (0.25, \dots, 0.25), \quad E(\mathbf{x}^*) = 0.0$$

(3) Griewank 関数 ⁽¹³⁾

$$\min_{\mathbf{x}} E(\mathbf{x}) = \frac{1}{200n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \prod_{i=1}^n \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i+1}}\right) + 1.0$$

$$\text{subj.to } -25.0 \leq x_i \leq 25.0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\mathbf{x}^* = (0.0, \dots, 0.0), \quad E(\mathbf{x}^*) = 0.0$$

(4) 2ⁿminima 関数 ⁽⁶⁾

$$\min_{\mathbf{x}} E(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n (x_i^4 - 16x_i^2 + 5x_i)$$

$$\text{subj.to } -5.0 \leq x_i \leq 5.0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\mathbf{x}^* = (-2.90, \dots, -2.90), \quad E(\mathbf{x}^*) = 78.319n$$

村 田 秀 樹 (非会員) 1979 年 8 月 26 日生。2004 年 3 月慶應義塾大学理工学部物理情報工学科卒業。同年 4 月同大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻入学。在学中は，大域的最適化手法，とくに多点型探索手法の研究を行い，2006 年 3 月修士課程修了。同年 4 月より，横河電機 (株) に勤務。

安 田 恵 一 郎 (正員) 1989 年 3 月北海道大学大学院工学研究科電気工学専攻博士課程修了。同年 4 月東京都立大学工学部助手，91 年 4 月同大工学部助教授，現在，首都大学東京大学院理工学研究科教授。システム最適化手法，ならびに電力システム工学の研究に従事。工学博士。

相 吉 英 太 郎 (正員) 1950 年 8 月 23 日生。1975 年慶應義塾大学工学部計測工学科卒業。1980 年 3 月同大学大学院工学研究科博士課程修了。助手・専任講師，同理工学部助教授を経て，1996 年 4 月より同教授。工学博士。最適化の理論と計算手法に関する基礎研究に従事。