多項式 Schur 安定性の拡張優勢条件

正 員 森 武宏* 正 員 小 亀 英己**

Extended Dominance Condition for Schur Stability of Real Polynomials

Takehiro Mori*, Member, Hideki Kokame**, Member

A known sufficient condition called “dominance condition” for Schur stability of real polynomials is extended in such a way that the equality is allowed in the inequality relation of the original condition. It is pointed out that two extra inequalities are needed for the extended condition to remain intact, being still a simple sufficient condition for stability of the polynomials. Some cases where the original dominance condition is also a necessary one are identified.

キーワード: 多項式, Schur 安定性, 優勢条件, 拡張, 付加不等式

Keywords: polynomials, Schur stability, dominance condition, extension, extra inequalities

1. まえがき

線形離散時間システムの特性多項式の安定性, Schur 安定性, に関しては, 数多くの正確な判別法が知られているが, その十分条件についても旧くから種々の報告がある⁽²⁾⁻⁽⁵⁾。例えば, n -次実多項式,

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n \cdots \cdots \quad (1)$$

に対する代表的な条件として, 次のようなものがよく知られている。

$$1 > a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 0 \quad (\text{単調性条件})$$

$$\cdots \cdots \cdots \quad (2)$$

$$1 - |a_1| - |a_2| - \cdots - |a_n| > 0 \quad (\text{優勢条件})$$

$$\cdots \cdots \cdots \quad (3)$$

これらは簡明直截, 一瞥して条件の成立を判定でき, システム解析設計時の有用なツールとして利用されている。反面それが故の保守性を避けることができず, 簡単さを大きく失わずに鋭さの改善を図る試みがなされてきた (例えば文献 (4) (7))。特に最近 (2) 式の条件中の相当数の不等式に等号を含め得ることが指摘された⁽⁶⁾。それならば, 同様に優勢条件に等号を付加しても十分条件として機能するた

めにどのような注意をはらえばよいか, 小稿はこの疑問についての検討を試みたものである。

2. 主要な結果

以下の考察の対象は (1) 式であるが, 一般性を失うことなく同式のようにモニック多項式とし, また Schur 安定性を論ずるので $a_n \neq 0$ とする。単調性条件のように $(n+1)$ 個もの不等式が課せられていれば, そのうちのいくらかはそのまま等号を許し得る可能性があるが, 優勢条件の場合にはまずこれは期待できない。等号成立の場合を含めるなら, なんらかの拘束を設けなければならない。次の定理はその典型例を示す。ただし, 定理では首尾の一貫を期すために, 当初の不等号の場合も含めて述べている。

〔定理 1〕 (3) 式のもとで, 多項式 (1) は Schur 安定である。また, $a_1 \neq 0$ あるいは $a_{n-1} \neq 0$ とし, (3) 式の不等号を等号に代えた,

$$1 - |a_1| - |a_2| - \cdots - |a_n| = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (4)$$

は, 次の関係を付け加えれば, 同様に Schur 安定性を保証する。

$$f(1) > 0, (-1)^n f(-1) > 0 \cdots \cdots \cdots (5)$$

証明 前半は周知であるが, 改めて示しておく。色々な証明が考えられるが, 次の方法が簡単に確認できる。すなわち, $g(z) := z^n$, $h(z) := a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ とおくと, $|z| = 1$ のとき (3) 式から $|g(z)| > |a_1||z|^{n-1} + \cdots + |a_n| \geq |h(z)|$ となることに注意して, $f(z) = g(z) + h(z)$ に対して閉曲線を単位円にとって Rouché の定理を適用すればよい。

さて (4) 式のように等号が成り立てば, 連続性から (1) の根のいくつかは単位円周上に至る。したがってそのような場合を除外すれば, Schur 安定が結論できることになる。いま j を虚数単位として単位円を $z = e^{j\theta} (0 \leq \theta < 2\pi)$,

* 京都工芸繊維大学工芸科学研究科 〒 606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町
Division of Information Science, Kyoto Institute of Technology
Matsugasaki, Kyoto 606-8585

** 大阪府立大学工学研究科 〒 599-8531 堺市学園町
Department of Electrical and Information Systems, Osaka Prefecture University
Gakuencho, Sakai 599-8531

係数を $a_i = |a_i|e^{j\gamma_i}, i = 1, \dots, n$ と表そう。 a_i は実数であるから、 $\gamma_i = 0$ または π である。このとき次の関係が成り立つ。

$$|f(e^{j\theta})| \geq |g(e^{j\theta})| - |h(e^{j\theta})| \dots\dots\dots (6)$$

$$= |e^{n\theta j}| - |a_1 e^{(n-1)\theta j} + a_2 e^{(n-2)\theta j} + \dots + a_n|$$

$$= 1 - ||a_1|e^{\{(n-1)\theta+\gamma_1\}j} + |a_2|e^{\{(n-2)\theta+\gamma_2\}j}$$

$$\dots + |a_n|e^{j\gamma_n}| \dots\dots\dots (7)$$

$$\geq 1 - |a_1| - |a_2| - \dots - |a_n| \dots\dots\dots (8)$$

(4) 式が成立すれば、上の最後の式の値は 0 であることに注意しよう。一連の式には不等号が二つあるが、(6) 式で等号が成り立つには $g(e^{j\theta})$ と $h(e^{j\theta})$ の偏角には π だけの差がなければならず、(8) 式で等号成立のためには (7) 式右辺第二項以下の各項の偏角がすべて等しくなければならない。言い換えれば、次の条件の成り立つときである。

$$n\theta + \pi = (n-1)\theta + \gamma_1 = (n-2)\theta + \gamma_2 = \dots = \gamma_n$$

$$\dots\dots\dots (9)$$

ただし、零となる係数に対する項の偏角は上式から除かれる。 $a_i \neq 0, i = 1$ または $i = n-1$ に留意すると (9) 式が満たされるのは、

$$\text{i) } \theta = 0, \gamma_i = \pi, i = 1, \dots, n$$

$$\text{ii) } \theta = \pi, \gamma_{2k-1} = 0, \gamma_{2k} = \pi, k = 1, 2, \dots$$

の二つの場合に限られる。i) の場合の $f(z)$ の値は $f(1)$ であり、ii) では $f(-1)$ となる。結局、等号成立に際して単位円周上に位置する根は二実根、 $z = \pm 1$ のみであることがわかる。ところで、 $f(1) > 0$ および $(-1)^n f(-1) > 0$ は Schur 安定性の必要条件であるから⁽²⁾、(5) 式を (4) 式に加えれば安定性は保証されることになる。(証明終)

簡単な例を挙げよう。 $n = 2, a_1 \neq 0$ のとき、(4) 式は $1 - |a_1| - |a_2| = 0$ 、(5) 式は $1 \pm a_1 + a_2 > 0$ となるが、これらは係数平面 (a_1, a_2) 上の安定領域に厳密に含まれている二線分である。定理 1 で $a_1 \neq 0$ あるいは $a_{n-1} \neq 0$ という条件は、欠かすことができない場合がある。これをはずせば (6) 式から (8) 式までで等号を成り立たしめるのは実根のみに限らないときがあるからである。上記の例で $a_1 = 0$ のときには、(4) 式は $1 - |a_2| = 0$ 、(5) 式はともに $1 + a_2 > 0$ となるが、 $a_2 = 1$ はこれらを満たしている。しかしながら、このとき (1) 式の根は $z = \pm j$ であり、Schur 安定ではない。この場合に安定性を結論するには、(5) 式とともに $f(\pm j) \neq 0$ を (4) 式に加えなければならない。零係数が存在する一般の場合の安定性を調べるには、(9) 式の偏角条件に基づいて単位円周上の等号成立点をすべて抽出し、先に述べた $n = 2$ の例のようにこれらの点において多項式の値が零にならない条件を (4) 式に加えればよい。これらをつぶさに示すことは本稿の紙幅を越えるので、措く。しかしここで注意すべきは、定理では簡単のため a_1 または a_{n-1} を非零と仮定したが、その証明を振り返るとこれらは更に一般化でき、非零係数が連続すれば単位円周にある根は (4) 式のもとで実根となることである。これを改め

て、定理の系として述べておく。

〔系 1〕 定理 1 において、 $a_i \neq 0, i = 1$ または $n-1$ という仮定は、“少なくとも一対の連続する非零係数が存在する”で置き換えることができる。

定理の証明はまた、係数 a_i の偏角 γ_i を適切に選べば、十分条件 (3) 式が必要条件 (5) 式に一致し、必要十分条件が簡単な形で手に入ることを示している。

〔系 2〕 次の二つの条件のいずれか一方がすべての $i = 1, \dots, n$ に対して成り立つ場合、条件 (3) は多項式 (1) の Schur 安定性の必要十分条件である。

$$a_i \leq 0, (-1)^i a_i \leq 0 \dots\dots\dots (10)$$

(10) 式の二つの条件はそれぞれ $f(1) > 0, (-1)^n f(-1) > 0$ に対応している。この結果を n 次元係数空間で考えると、 2^n 個の象限のうち負の象限および符号が交互に変化する象限の少なくとも二つで、優勢条件は正確な安定条件となっており、このときの安定領域境界は超平面のみから構成されていることがわかる。この場合には (3) 式は必要十分条件であるので、もちろん (4) 式のような等号は許されない。しかし、係数に関しては (10) 式のようにいずれの係数についても零となることが許されることになる。

3. むすび

前節の結果についていくつかの補足事項を述べてむすびに代える。本稿では実多項式を扱ったが、係数が複素数である場合も条件がより複雑になることを除き議論は基本的に同じである。Hurwitz 安定性の十分条件に関しては、対応する Schur 安定にそれに比べて知られている結果ははるかに乏しい。その数少ない提案のうち、文献 (7) では単調性条件あるいは優勢条件と双一次変換とを組み合わせる Hurwitz 安定の十分条件を得ている。この変換では、離散一連続の多項式の係数間は線形の関係となるから、単調性条件 (2) や優勢条件 (3) のような不等式の線形性あるいは断片線形性はそのまま保存されるという利点がある。本稿の結果は文献 (6) の結果とともに、このようなタイプの Hurwitz 安定性の十分条件の緩和にも寄与している。

(平成 19 年 1 月 18 日受付, 平成 19 年 3 月 8 日再受付)

文 献

- (1) M. Marden: “Geometry of Polynomials”, Amer. Math. Soc., Providence, pp.122-123 (1966)
- (2) E.I. Jury: “Theory and Application of the z -Transform Method”, Wiley, pp.97-98 (1964)
- (3) K.P. Dabke: “A simple criterion for stability of linear discrete systems”, *Int. J. Control*, **37-3**, pp.657-659 (1983)
- (4) Y. Xi and G. Schmidt: “A note on the location of the roots of a polynomial”, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **30**, pp.78-80 (1985)
- (5) T. Mori: “Note on the absolute value of the roots of a polynomial”, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **29**, pp.54-55 (1984)
- (6) T.V. Nguyen, T. Mori, and Y. Mori: “Adaptive one increased-order deadbeat congestion control algorithm for ABR traffic in ATM networks”, *Proc. of 8th IEEE Conf. on Advanced Communication Technology* (2006)
- (7) T. Mori and H. Kokame: “Sufficient conditions for Hurwitz polynomials and their application to the stability of polytope of polynomials”, *Int. J. Syst. Sci.*, **31-3**, pp.385-390 (2000)