Controller Reduction with Combination of Generalized Gramians

Kentaro Asato Student Member (University of the Ryukyus, k058651@eve.u-ryukyu.ac.jp)

Tsutomu Nagado Member (University of the Ryukyus, nagado@tec.u-ryukyu.ac.jp)

Shiro Tamaki Member (University of the Ryukyus, shiro@ie.u-ryukyu.ac.jp)

Keywords: controller reduction, generalized Gramians, coprime factorization, structurally balanced truncation

In this paper, a new controller reduction method using generalized Gramians (generalized controllability and observability Gramians) is proposed. In order to obtain the generalized Gramians which have block diagonal structure, a considering control system is described by using right and left coprime factorizations of the plant and the controller. For the system and its subsystems (sensitivity function etc.), $\mathcal{H}_\infty$ error norms of the subsystems (the system) with a reduced-order controller yield an upper bound of $\mathcal{H}_\infty$ performance of the system (each subsystem) with the reduced-order controller. From the viewpoint of the relation, the reduced-order controllers in the proposed method are obtained with combination of the structured generalized Gramians of the subsystems.

We consider the closed-loop system (which is internally stable) shown in Fig.1 where the generalized plant G is given by

$$w = [w_1^T \ w_2^T \ w_3^T]^T, \ z = [z_1^T \ z_2^T]^T,$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{z_1 w_1} & G_{z_1 w_2} & G_{z_1 w_3} & G_{z_1} \\ -G_{z_2 w_1} & -G_{z_2 w_2} & -G_{z_2 w_3} & -G_{z_2} \\ -G_{w_1} & -G_{w_2} & -G_{w_3} & G_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ u \end{bmatrix}$$

and K is a controller for G . It is easy to shown that the transfer function T_{zw} from w to z is given by

$$T_{zw} = \mathcal{F}_l(G, K)$$

$$= \begin{bmatrix} T_{z_1 w_1} & T_{z_1 w_2} & T_{z_1 w_3} \\ T_{z_2 w_1} & T_{z_2 w_2} & T_{z_2 w_3} \end{bmatrix} \in \mathcal{RH}_\infty,$$

$$T_{z_i w_j} = G_{z_i w_j} + G_{z_i} K (I - G_p K)^{-1} G_{w_j},$$

$$i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3$$

where $\mathcal{F}_l(\cdot, \cdot)$ is the linear fractional transformation.

The proposed controller reduction procedure consists of the following three steps:

!ZController reduction procedure![]

Step 1 (Description of a control system)

Find coprime factors of G_p and K such that

$$G_p = U_r V_r^{-1} = V_l^{-1} U_l$$

$$U_r, U_l, V_r, V_l \in \mathcal{RH}_\infty,$$

$$K = X_r Y_r^{-1} = Y_l^{-1} X_l,$$

$$X_r, X_l, Y_r, Y_l \in \mathcal{RH}_\infty,$$

$$\begin{bmatrix} V_l & -U_l \\ X_l & Y_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_r & U_r \\ -X_r & V_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Fig. 1. Closed-loop system

Define

$$T_{ij}^f = \mathcal{F}_l(G_{ij}^f, S_{ij}^f) = T_{z_i w_j}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} A_{ij}^f & B_{ij}^f \\ \hline C_{ij}^f & D_{ij}^f \end{array} \right],$$

$$f = r, l$$

where T_{ij}^f is the transfer function from w_j to z_i with the minimal realization such that S_{ij}^f is equal to the coprime factor of K (X_f or Y_f).

Step 2 (Calculation of generalized Gramians)

Solve the following Lyapunov inequalities for each T_{ij}^f

$$A_{ij}^f \mathcal{P} + \mathcal{P} A_{ij}^{fT} + B_{ij}^f B_{ij}^{fT} \leq 0, \quad \mathcal{P} = \text{diag}(\mathcal{P}_g, \mathcal{P}_k) \geq 0,$$

$$A_{ij}^{fT} \mathcal{Q} + \mathcal{Q} A_{ij}^f + C_{ij}^{fT} C_{ij}^f \leq 0, \quad \mathcal{Q} = \text{diag}(\mathcal{Q}_g, \mathcal{Q}_k) \geq 0$$

where $\mathcal{P}_g$ and $\mathcal{P}_k$ (also, $\mathcal{Q}_g$ and $\mathcal{Q}_k$) have the same size as G_{ij}^f and S_{ij}^f , respectively. Now we define $\mathcal{P}\{T_{ij}^f\}$ and $\mathcal{Q}\{T_{ij}^f\}$ as a structured generalized controllability Gramian and a structured generalized observability Gramian of T_{ij}^f , respectively.

Step 3 (Controller reduction)

For convenience, a combination of the balanced generalized Gramians is written by $(\mathcal{P}\{T_{i_1 j_1}^{f_1}\}, \mathcal{Q}\{T_{i_2 j_2}^{f_2}\})_b$ and the reduced-order controller with the combination is written by $\hat{K}[(\mathcal{P}\{T_{i_1 j_1}^{f_1}\}, \mathcal{Q}\{T_{i_2 j_2}^{f_2}\})_b]$. Finding reduced-order controllers for all the combinations, we can obtain the reduced-order controller $\hat{K}_{opt}$ such that

$$\left\| \mathcal{F}_l(G, \hat{K}_{opt}) \right\|_\infty = \min_{(i_1, j_1, f_1), (i_2, j_2, f_2)} \left\| \mathcal{F}_l(G, \hat{K}[(\mathcal{P}\{T_{i_1 j_1}^{f_1}\}, \mathcal{Q}\{T_{i_2 j_2}^{f_2}\})_b]) \right\|_\infty.$$

Finally, several numerical examples are used to verify the availability of the proposed method.

一般化グラミ안의組合せによるコントローラの低次元化

学生員 安里 健太郎* 正員 長堂 勤**
正員 玉城 史朗**

Controller Reduction with Combination of Generalized Gramians

Kentaro Asato*, Student Member, Tsutomu Nagado**, Member, Shiro Tamaki**, Member

In this paper, a new controller reduction method using generalized Gramians (generalized controllability and observability Gramians) is proposed. In order to obtain the generalized Gramians which have block diagonal structure, a considering control system is described by using right and left coprime factorizations of the plant and the controller. For the system and its subsystems (sensitivity function etc.), $\mathcal{H}_\infty$ error norms of the subsystems (the system) with a reduced-order controller yield an upper bound of $\mathcal{H}_\infty$ performance of the system (each subsystem) with the reduced-order controller. From the viewpoint of the relation, the reduced-order controllers in the proposed method are obtained with combination of the structured generalized Gramians of the subsystems. Finally, several numerical examples are used to verify the availability of the proposed method.

キーワード：コントローラ低次元化，一般化グラミアン，既約分解，構造化平衡打ち切り法

Keywords: controller reduction, generalized Gramians, coprime factorization, structurally balanced truncation

1. はじめに

大規模な実システムに対して設計された高次元コントローラの次数を低くすることは，コストや維持・管理などの観点から，重要な課題となっている。コントローラの低次元化は，一般に，モデル（フィルタやプラントなど）の低次元化と区別される。モデル低次元化問題において，低次元化されたモデルの近似の良さは，その入出力特性で評価されることが多い。これに対し，低次元化されたコントローラの近似の良さは，その入出力特性のみで評価することができない。コントローラは，制御システムの安定化や性能改善を目的として設計・実装される。そのため，低次元化コントローラには，制御システムの安定化や許容内の制御性能が要求されてくる。

フィードバックコントローラの低次元化では，これらの要求を達成するために，閉ループ特性を考える必要がある。

Enns⁽¹⁾ は，閉ループシステムの安定性を考慮するために，周波数に依存した重み関数を導入し，重みつき低次元化問題に帰着したコントローラ低次元化法を考案した。その後，Lin ら⁽²⁾ や Wang ら⁽³⁾ が Enns の重みつき低次元化法を発展させ，また，多くの研究により，さまざまな観点から重み関数が導出されていった（詳細については文献(4)(5)を参照）。いっぽう，Zhou ら⁽⁶⁾ や Wortelbore⁽⁷⁾ は，閉ループシステムの構造を維持したままコントローラの低次元化を行う手法を提案した。彼らの手法では，低次元化問題は線形分数変換を利用して定式化されるため，重みつき低次元化問題も扱うことができる。

これらは，いずれも，平衡化打ち切り法⁽⁸⁾を拡張した手法である。その多くは，グラミアンのコントローラに対応する一部分を平衡化（同時対角化）し，適当な状態変数を打ち切る（取り除く）ことで低次元化を行う手法である。しかし，グラミアン全体を平衡化するわけではないため，平衡化打ち切り法にみられる有用な特性（考慮されたグラミアンに対応する状態変数が残ること，誤差上界が容易に得られることなど）を持たない。上記で挙げた手法の中で，Zhou らによって提案された手法（構造化平衡打ち切り法）は他の手法と異なり，グラミアンの一部分の代わりに，ブロック対角構造を持つ一般化グラミアンを平衡化することで低次元化が行われる。一般化グラミアンは，リアプノフ不等式の解であり，オリジナルの閉ループシステムを内包

* 琉球大学大学院理工学研究科

〒 903-0213 沖縄県中頭郡西原町字千原 1

Graduate School of Science and Engineering, University of the Ryukyus

1 Senbaru, Nishihara-cho, Nakagami-gun, Okinawa 903-0213

** 琉球大学工学部

〒 903-0213 沖縄県中頭郡西原町字千原 1

Faculty of Engineering, University of the Ryukyus

1 Senbaru, Nishihara-cho, Nakagami-gun, Okinawa 903-0213

した拡大システム（これは一般化グラミアンの値によって決定される）のグラミアンに一致する。したがって、一般化グラミアンはグラミアンと同等の性質を有する（多少保守的な）指標となる[†]。構造化平衡打ち切り法では、構造がブロック対角で固定された一般化グラミアンを活用することにより、平衡化打ち切り法にみられるような有用な特性を導くことができる。

本論文では、構造化平衡打ち切り法を基礎として、ブロック対角の一般化グラミアンを利用したコントローラ低次元化法を提案する。しかしながら、閉ループ構造を持つ制御システムにおいては、ブロック対角の一般化グラミアンを求めるためのリアプノフ不等式が可解でない場合が多い⁽⁶⁾。この可解性の問題は、一般化グラミアンの構造をブロック対角で固定することに起因する。そこで本提案手法では、この可解性の問題を解決するために、既約分解表現を用いて閉ループシステムを安定な既約因子の積で記述する。このように記述されたシステムにおいては、ブロック対角の一般化グラミアンは常に存在するため、可解性の問題が生じない（このことは文献(9)の成果によって示すことができる）。本提案手法では、このように記述された制御システムに対してブロック対角の一般化グラミアンを求める。ここで、制御システムとそのサブシステムについて、コントローラの低次元化によって生じる各サブシステム（制御システム）の誤差ノルムは、コントローラ低次元化後の制御システム（各サブシステム）の $\mathcal{H}_\infty$ 性能の上界を与えているという関係が成り立つ。そこで、本提案手法では、低次元化後の制御システム全体の $\mathcal{H}_\infty$ 性能に大きな影響を与えるサブシステムを考慮するために、各サブシステムの一般化グラミアンを組み合わせて平衡化し、性能劣化の小さな低次元化コントローラを求めること考える。また、1 自由度振動系および無人高機動航空機 HIMAT⁽¹⁰⁾ の $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題を数値例として用い、提案手法の有効性を確認する。

最後に、本論文で扱う記号などについて言及しておく。記号 $\mathcal{RH}_\infty$ は安定プロパーな実有理伝達関数の集合を表す。 $\text{diag}(\cdot, \cdot)$ は対角行列またはブロック対角行列を表す。演算 $\mathcal{F}_l(\cdot, \cdot)$ は下線形分数変換、 $\text{tr}(\cdot)$ はトレースを表す。また、ノルム $\|\cdot\|_\infty$ は $\mathcal{H}_\infty$ ノルムを表す。

2. 構造化平衡打ち切り法

図 1 の内部安定な閉ループシステムについて考える。同図中において、 G は m_g 次元の一般化プラント、 K は m_k 次元のコントローラであり、これらを次式で与える。

$$G = \begin{bmatrix} G_{zw} & G_z \\ G_w & G_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_g & B_{g1} & B_{g2} \\ C_{g1} & D_{g11} & D_{g12} \\ C_{g2} & D_{g21} & D_{g22} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (1)$$

図 1 閉ループシステム

Fig. 1. Closed-loop system.

$$K = \left[\begin{array}{c|c} A_k & B_k \\ \hline C_k & D_k \end{array} \right] \dots\dots\dots (2)$$

このとき、 w から z までの伝達関数 T_{zw} は次式となる。

$$\begin{aligned} T_{zw} &= \mathcal{F}_l(G, K) \in \mathcal{RH}_\infty \\ &= G_{zw} + G_z K (I - G_p K)^{-1} G_w \\ &= \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_g + B_{g2} L D_k C_{g2} & B_{g2} L C_k \\ B_k F C_{g2} & A_k + B_k F D_{g22} C_k \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} B_{g1} + B_{g2} L D_k D_{g21} \\ B_k F D_{g21} \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} C_{g1} + D_{g12} D_k F C_{g2} & D_{g12} L C_k \end{bmatrix} \\ D &= D_{g11} + D_{g12} D_k F D_{g21} \\ L &= (I - D_k D_{g22})^{-1}, F = (I - D_{g22} D_k)^{-1} \end{aligned}$$

次のリアプノフ不等式を満たすブロック対角の一般化可制御グラミアン $\mathcal{P}$ 、一般化可観測グラミアン $\mathcal{Q}$ を考える。

$$AP + PA^T + BB^T \leq 0, \mathcal{P} = \text{diag}(\mathcal{P}_g, \mathcal{P}_k) \geq 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$A^T \mathcal{Q} + \mathcal{Q} A + C^T C \leq 0, \mathcal{Q} = \text{diag}(\mathcal{Q}_g, \mathcal{Q}_k) \geq 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

ただし、 $\mathcal{P}_g$ および $\mathcal{Q}_g$ は、一般化プラント G に対応しており、 $m_g \times m_g$ 対称行列である。また、 $\mathcal{P}_k$ および $\mathcal{Q}_k$ は、コントローラ K に対応しており、 $m_k \times m_k$ 対称行列である。このような $\mathcal{P}$ 、 $\mathcal{Q}$ が存在するとき、下記の定理により、 $\hat{m}_k$ 次の低次元化コントローラ $\hat{K}$ を求めることができる。

〔定理 1〕(Zhou ら⁽⁶⁾) (4) 式および (5) の解である $\mathcal{P}$ および $\mathcal{Q}$ において、次式を満足する平衡化（同時対角化）行列 T が存在すると仮定する。

$$T^{-1} \mathcal{P}_k (T^{-1})^T = T^T \mathcal{Q}_k T =: \Sigma_k \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_k &= \text{diag}(\Sigma_{k1}, \Sigma_{k2}) \\ \Sigma_{k1} &= \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_{\hat{m}_k}) \\ \Sigma_{k2} &= \text{diag}(\sigma_{\hat{m}_k+1}, \dots, \sigma_{m_k}) \\ \sigma_1 &\geq \dots \geq \sigma_{\hat{m}_k} > \sigma_{\hat{m}_k+1} \geq \dots \geq \sigma_{m_k} \end{aligned}$$

このとき、 $\Sigma_k = \text{diag}(\Sigma_{k1}, \Sigma_{k2})$ に応じて分割された K の構造化平衡実現は、

$$K = \left[\begin{array}{c|c} T^{-1} A_k T & T^{-1} B_k \\ \hline C_k T & D_k \end{array} \right] \dots\dots\dots (7)$$

[†] 例えば、可観測グラミアンが入力がない場合の出力エネルギーを与えるのに対し、一般化可観測グラミアンはその上界を与える。

$$=: \left[\begin{array}{cc|c} \hat{A}_k & \hat{A}_{k12} & \hat{B}_k \\ \hat{A}_{k21} & \hat{A}_{k22} & \hat{B}_{k2} \\ \hline \hat{C}_k & \hat{C}_{k2} & D_k \end{array} \right] \dots\dots\dots (8)$$

となる。ここで、 $\hat{K}$ を以下で定義する。

$$\hat{K} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_k & \hat{B}_k \\ \hline \hat{C}_k & D_k \end{array} \right] \dots\dots\dots (9)$$

この $\hat{K}$ により構成される制御システム $\hat{T}_{zw}$ は、

$$\begin{aligned} \hat{T}_{zw} &= \mathcal{F}_l(G, \hat{K}) \in \mathcal{RH}_\infty \\ &= G_{zw} + G_z \hat{K} (I - G_p \hat{K})^{-1} G_w \\ &=: \left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & D \end{array} \right] \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

となる。また、 $\hat{T}_{zw}$ と T_{zw} に関して次式が成り立つ。

$$\|\hat{T}_{zw} - T_{zw}\|_\infty \leq 2\text{tr}(\Sigma_{k2}) \dots\dots\dots (11)$$

定理 1 は、下記の一般化グラミアンの性質を利用して証明される（詳細については文献 (6) を参照）。

〔性質 1〕（打ち切りシステムの一般化グラミアン） (4)

式, (5) および (6) で求めた $\mathcal{P}_g$, $\mathcal{Q}_g$ および Σ_{k1} を用いて、 $\hat{\mathcal{P}}$ と $\hat{\mathcal{Q}}$ を

$$\hat{\mathcal{P}} = \text{diag}(\mathcal{P}_g, \Sigma_{k1}) \dots\dots\dots (12)$$

$$\hat{\mathcal{Q}} = \text{diag}(\mathcal{Q}_g, \Sigma_{k1}) \dots\dots\dots (13)$$

で与えると、次式が成り立つ。

$$\hat{A}\hat{\mathcal{P}} + \hat{\mathcal{P}}\hat{A}^T + \hat{B}\hat{B}^T \leq 0 \dots\dots\dots (14)$$

$$\hat{A}^T\hat{\mathcal{Q}} + \hat{\mathcal{Q}}\hat{A} + \hat{C}^T\hat{C} \leq 0 \dots\dots\dots (15)$$

ただし、低次元化の過程において G および $\hat{K}$ の状態変換は行われていないものとする。

〔性質 2〕（一般化グラミアンとグラミアンの関係） 次の

準正定行列 E_b および E_c について考える。

$$E_b = -(AP + PA^T + BB^T) \geq 0 \dots\dots\dots (16)$$

$$E_c = -(A^TQ + QA + C^TC) \geq 0 \dots\dots\dots (17)$$

このとき、(4) 式 および (5) より、次式が成り立つ。

$$AP + PA^T + \begin{bmatrix} B & E_b^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^T \\ E_b^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = 0 \dots\dots\dots (18)$$

$$A^TQ + QA + \begin{bmatrix} C^T & E_c^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ E_c^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = 0 \dots\dots\dots (19)$$

これは、 $\mathcal{P}$ および $\mathcal{Q}$ が次の拡大制御システム H の可制御および可観測グラミアンとなることを示している。

$$H = \left[\begin{array}{c|cc} A & B & E_b^{\frac{1}{2}} \\ \hline C & D & 0 \\ E_c^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \end{array} \right] \in \mathcal{RH}_\infty \dots\dots\dots (20)$$

ここで、次の制御システム $\tilde{T}_{zw}$ を導入する。

$$\tilde{T}_{zw} = \left[\begin{array}{c|c} A & E_b^{\frac{1}{2}} \\ \hline E_c^{\frac{1}{2}} & 0 \end{array} \right] \in \mathcal{RH}_\infty \dots\dots\dots (21)$$

制御システム T_{zw} および $\tilde{T}_{zw}$ の可制御グラミアンを、それぞれ、 $\mathcal{M}$ および $\tilde{\mathcal{M}}$, 可観測グラミアンを、それぞれ、 $\mathcal{N}$ および $\tilde{\mathcal{N}}$ とすると、次式が成り立つ。

$$A(\mathcal{M} + \tilde{\mathcal{M}}) + (\mathcal{M} + \tilde{\mathcal{M}})A^T + BB^T + E_b = 0 \dots\dots\dots (22)$$

$$A^T(\mathcal{N} + \tilde{\mathcal{N}}) + (\mathcal{N} + \tilde{\mathcal{N}})A + C^TC + E_c = 0 \dots\dots\dots (23)$$

これより以下が得られる。

$$\mathcal{P} = \mathcal{M} + \tilde{\mathcal{M}} \dots\dots\dots (24)$$

$$\mathcal{Q} = \mathcal{N} + \tilde{\mathcal{N}} \dots\dots\dots (25)$$

性質 1 は、「 $\hat{A}$ が安定行列である、すなわち、打ち切りシステム $\hat{T}_{zw}$ が安定である」ということを示しており、性質 2 は、「 $\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ を平衡化して T_{zw} の状態変数を打ち切ること、 H に対し平衡化打ち切り法を適用することと等価である」ということを示している。これにより、(10) 式および (11) が導かれる。このように、ブロック対角の一般化グラミアンを活用することによって、構造化平衡打ち切り法では、打ち切りシステム $\hat{T}_{zw}$ の安定性が保証され、また、誤差上界により制御性能の劣化が制限される。

これらの特性は非常に有用であるが、この手法の欠点として、リアプノフ不等式 (4) および (5) の可解性の問題がある。(4) 式 ((5) 式) から確認できるように、ブロック対角の一般化可制御グラミアン $\mathcal{P}$ （一般化可制御グラミアン $\mathcal{Q}$ ）が存在するためには、 T_{zw} の係数行列 A のブロック対角要素 $A_g + B_{g2}LD_kC_{g2}$ および $A_k + B_kFD_{g22}C_k$ が安定である必要がある。この問題は、一般化グラミアンの構造をブロック対角で固定することに起因しており、多くのコントローラ低次元化問題において生じる。しかし、 G が特別な構造を持つ場合には、リアプノフ不等式が可解となり、ブロック対角の一般化グラミアンが常に存在することが知られている。以下はこれに関する定理である。

〔定理 2〕（Oh ら⁽⁹⁾） G が次式で与えられていると仮定する。

$$G = \begin{bmatrix} 0 & W_z \\ W_w & 0 \end{bmatrix}, \quad W_z, W_w \in \mathcal{RH}_\infty \dots\dots\dots (26)$$

$K \in \mathcal{RH}_\infty$ のとき、 $T_{zw} = \mathcal{F}_l(G, K)$ は次式となる。

$$T_{zw} = W_zKW_w \in \mathcal{RH}_\infty \dots\dots\dots (27)$$

このシステムにおいて、ブロック対角の一般化グラミアン $\mathcal{P}$ および $\mathcal{Q}$ は常に存在する。

定理 2 は、重みつき低次元化問題に帰着されたコントローラの低次元化問題（このとき W_z および W_w は閉ループ特性を考慮するために導入される重み関数となる）において有用である。また、定理 2 から、より一般的な以下の結果が得られる。

〔系 1〕 G が次式で与えられていると仮定する。

$$G = \begin{bmatrix} W_{zw} & W_z \\ W_w & 0 \end{bmatrix}, \quad W_{zw}, W_z, W_w \in \mathcal{RH}_\infty \dots\dots\dots (28)$$

$K \in \mathcal{RH}_\infty$ のとき、 $T_{zw} = \mathcal{F}_l(G, K)$ は次式となる。

$$T_{zw} = W_{zw} + W_zKW_w \in \mathcal{RH}_\infty \dots\dots\dots (29)$$

このシステムにおいて、ブロック対角の一般化グラミアン $\mathcal{P}$ および $\mathcal{Q}$ は常に存在する。

〔証明〕 W_{zw} の一般化グラミアンと $W_z K W_w$ のブロック対角の一般化グラミアンは独立して求めることができるので、定理 2 より明らかである。 $\square$

3. 既約分解による制御システムの表現

図 2 の標準的なフィードバックシステムを考える。 P はプラント、 K はコントローラであり、この制御システムは内部安定であるとする。また、この制御システムでは、 ref は目標値入力、 d_u は P の入力側の外部入力（外乱や摂動入力）、 d_y は P の出力側の外部入力、 n は雑音入力を想定しており、 u は制御入力、 y は測定出力、 e は偏差となる。ここで、 z と w を

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_u \\ d_y \\ ref - n \end{bmatrix} \quad (30)$$

で与え[†]、この制御システムを図 1 のように一般化する。このときの一般化プラント G を

$$G = \begin{bmatrix} G_{z_1 w_1} & G_{z_1 w_2} & G_{z_1 w_3} & | & G_{z_1} \\ G_{z_2 w_1} & G_{z_2 w_2} & G_{z_2 w_3} & | & G_{z_2} \\ \hline G_{w_1} & G_{w_2} & G_{w_3} & | & G_p \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{z_1 w_1} & G_{z_1 w_2} & G_{z_1 w_3} & | & G_{z_1} \\ G_{z_2 w_1} & G_{z_2 w_2} & G_{z_2 w_3} & | & G_{z_2} \\ \hline G_{w_1} & G_{w_2} & G_{w_3} & | & G_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ u \end{bmatrix}$$

で与え、 w から z までの伝達関数 T_{zw} は、

$$T_{zw} = \begin{bmatrix} T_{z_1 w_1} & T_{z_1 w_2} & T_{z_1 w_3} \\ T_{z_2 w_1} & T_{z_2 w_2} & T_{z_2 w_3} \end{bmatrix} \in \mathcal{RH}_\infty \quad (32)$$

$$T_{z_i w_j} = G_{z_i w_j} + G_{z_i} K (I - G_p K)^{-1} G_{w_j} \quad (33)$$

となる。ただし、 $T_{z_i w_j}$ ($i=1,2, j=1,2,3$) は、 w_j から z_i までの伝達関数を表す。ここで、 G_p ($=-P$) と K の $\mathcal{RH}_\infty$ 上での既約分解を考える。

$$G_p = U_r V_r^{-1} = V_l^{-1} U_l \quad (34)$$

$$U_r, U_l, V_r, V_l \in \mathcal{RH}_\infty$$

$$K = X_r Y_r^{-1} = Y_l^{-1} X_l \quad (35)$$

$$X_r, X_l, Y_r, Y_l \in \mathcal{RH}_\infty$$

ただし、上式の既約分解において、以下の等式（ダブルベズー等式）が成り立つと仮定する。

$$\begin{bmatrix} V_l & -U_l \\ X_l & Y_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_r & U_r \\ -X_r & V_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (36)$$

[†] 図 2 では、 ref から各出力までの伝達関数と $-n$ から各出力までの伝達関数は等しくなるので、 $w_3 = ref - n$ とまとめて記述する。

図 2 標準的なフィードバックシステムの構成

Fig. 2. Standard feedback configuration.

(34)～(36) 式より、各サブシステム $T_{z_i w_j}$ は、

$$T_{z_i w_j} = G_{z_i w_j} + G_{z_i} X_r V_l G_{w_j} = \mathcal{F}_l(G_{ij}^{r'}, S_{ij}^{r'}) =: T_{ij}^{r'} \quad (37)$$

$$G_{ij}^{r'} = \begin{bmatrix} G_{z_i w_j} & G_{z_i} \\ V_l G_{w_j} & 0 \end{bmatrix}, \quad S_{ij}^{r'} = X_r$$

または、

$$T_{z_i w_j} = G_{z_i w_j} + G_{z_i} V_r X_l G_{w_j} = \mathcal{F}_l(G_{ij}^{l'}, S_{ij}^{l'}) =: T_{ij}^{l'} \quad (38)$$

$$G_{ij}^{l'} = \begin{bmatrix} G_{z_i w_j} & G_{z_i} V_r \\ G_{w_j} & 0 \end{bmatrix}, \quad S_{ij}^{l'} = X_l$$

と書くことができる^{††}。これからわかるように、各サブシステム $T_{z_i w_j}$ は、 G_p の左既約因子と K の右既約因子、または、 G_p の右既約因子と K の左既約因子の積で構成される二通りの伝達関数によって記述することができる。

〔注釈 1〕 サブシステムによっては、(37) 式および (38) が最小実現にならない場合があることに注意する。例えば、図 2 のサブシステム $T_{z_2 w_2} = T_{y d_y}$ (感度関数) を考える。このとき、(37) 式は、

$$\begin{aligned} T_{22}^{r'} &= \mathcal{F}_l(G_{22}^{r'}, S_{22}^{r'}) \\ &= I - P X_r V_l \\ &= Y_r V_l = \mathcal{F}_l(G_{22}^r, S_{22}^r) =: T_{22}^r \quad (39) \end{aligned}$$

$$G_{22}^r = \begin{bmatrix} 0 & I \\ V_l & 0 \end{bmatrix}, \quad S_{22}^r = Y_r$$

と変形することができる。これからわかるように、 $T_{22}^{r'}$ と T_{22}^r は等価であるが、 $G_{22}^{r'}$ の次数は G_{22}^r の次数より高くなる。ここで、 $f=r, l$ として、(37) 式および (38) を (39) 式のように適宜 T_{ij}^f として変形し、次の最小実現の形式で書くことにする。

$$T_{ij}^f = \mathcal{F}_l(G_{ij}^f, S_{ij}^f) \quad (40)$$

4. 一般化グラミアンの組合せによるコントローラの低次元化

高次元コントローラの低次元化を考えるとき、その低次元化コントローラは、一般に、ある評価によって順番づけられた状態変数を打ち切ることで求められる。前述した構造化平衡打ち切り法では、ブロック対角の一般化グラミ

^{††} $T_{ij}^{r'}$ ($T_{ij}^{l'}$) の上付き添字 r (l) は、 K の右既約因子 (左既約因子) を使って各サブシステムが記述されていることを示す。

ンの平衡化によって状態変数の制御システム全体における重要度（これは Σ_k の対角要素の大きさによって表されており、その値が小さいほど重要度が低い）を測り、その重要度の低い状態変数を打ち切ることで低次元化を行っている。また、この手法では (11) 式によって誤差上界が与えられるので、得られた低次元化コントローラ $\hat{K}$ で構成される制御システム $\hat{T}_{zw}$ の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムについて、以下の関係が得られる。

$$\begin{aligned}\|\hat{T}_{zw}\|_\infty &\leq \|\hat{T}_{zw} - T_{zw}\|_\infty + \|T_{zw}\|_\infty \\ &\leq 2\text{tr}(\Sigma_{k2}) + \|T_{zw}\|_\infty \dots\dots\dots (41)\end{aligned}$$

コントローラの設計方法の違いによって構造化平衡打ち切り法の適用が制限されることはないが、この関係から、特に、 $\mathcal{H}_\infty$ ノルムを設計指標としたコントローラ（ $\mathcal{H}_\infty$ コントローラなど）の低次元化に対して有効であることがわかる。また、一般化グラミアンの性質 1 で示したように、コントローラ低次元化後の制御システム $\hat{T}_{zw}$ は、一般化グラミアンとして (12) 式および (13) を持つ。これらは平衡化された T_{zw} の一般化グラミアンの一部分となっており、これらに対応する状態変数（すなわち、打ち切りにおいて残された重要度の高い状態変数）を持つ $\hat{T}_{zw}$ の $\mathcal{H}_\infty$ 性能の劣化は、(41) 式によって制限されていると考えることができる。ここで、(41) 式の関係についてさらに詳しく調べてみる。制御システム T_{zw} とそのサブシステム $T_{z_i w_j}$ の関係より、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}\|\hat{T}_{zw}\|_\infty &\leq 2\text{tr}(\Sigma_{k2}) + \|T_{zw}\|_\infty \\ \Rightarrow \|\hat{T}_{z_i w_j}\|_\infty &\leq 2\text{tr}(\Sigma_{k2}) + \|T_{zw}\|_\infty \dots\dots\dots (42) \\ \sum_{i,j} \|\hat{T}_{z_i w_j}\|_\infty &\leq \sum_{i,j} \left(\|\hat{T}_{z_i w_j} - T_{z_i w_j}\|_\infty + \|T_{z_i w_j}\|_\infty \right) \\ \Rightarrow \|\hat{T}_{zw}\|_\infty &\leq \sum_{i,j} \left(\|\hat{T}_{z_i w_j} - T_{z_i w_j}\|_\infty + \|T_{z_i w_j}\|_\infty \right) \\ &\dots\dots\dots (43)\end{aligned}$$

$$\hat{T}_{z_i w_j} = G_{z_i w_j} + G_{z_i} \hat{K} (I - G_p \hat{K})^{-1} G_{w_j}$$

この関係から、 $\|\hat{T}_{zw}\|_\infty$ と $\|\hat{T}_{z_i w_j}\|_\infty$ の値は、互いの誤差ノルムによって制限されていることがわかる。また、各サブシステムの誤差ノルム $\|\hat{T}_{z_i w_j} - T_{z_i w_j}\|_\infty$ がコントローラ低次元後の制御システム全体の $\mathcal{H}_\infty$ 性能 $\|\hat{T}_{zw}\|_\infty$ に与える影響度はそれぞれ異なるので、影響度の高いサブシステムの誤差ノルムを優先して小さくすることにより、制御システム全体の $\mathcal{H}_\infty$ 性能の劣化を抑えることができると考えられる。上で述べたように、平衡化した一般化グラミアンによって評価づけされた重要度の高い状態変数は、コントローラ低次元後においても残り、その残った状態変数によってコントローラ低次元化後の制御システム $\hat{T}_{zw}$ の特性が決定される。この性質を利用して、 $\hat{T}_{zw}$ の $\mathcal{H}_\infty$ 性能に大きな影響を与えるサブシステムの状態変数を選択する（打ち切りにおいて残す）ために、各サブシステムの一一般化グラミアンを組合せて平衡化することを考える。こ

では、そのすべての組合せに対して低次元化コントローラを求め、性能劣化の最も小さいものを最終的な低次元化コントローラとして選ぶ。なお、2章で述べたように、フィードバック構造を持つ制御システムにおいてはリアプノフ不等式の可解性に問題があるので、本提案手法では、既約分解を用いて記述された (40) 式の制御システムに対して一般化グラミアンを求める。このように記述された制御システムにおいては、系 1 によってブロック対角の一般化グラミアンの存在が保証されており、コントローラ K の既約因子 S_{ij}^f が低次元化の対象となる。

以上をまとめて、本論文では、次のコントローラ低次元化アルゴリズムを提案する。

【提案アルゴリズム】

Step 1 (制御システムの表現) ダブルベズー等 (36) 式を満足する G_p と K の既約因子を用いて、(40) 式のように記述された各サブシステム T_{ij}^f を求める。ここで、 T_{ij}^f の実現を以下で与える。

$$T_{ij}^f = \mathcal{F}_l(G_{ij}^f, S_{ij}^f) = \left[\begin{array}{c|c} A_{ij}^f & B_{ij}^f \\ \hline C_{ij}^f & D_{ij}^f \end{array} \right]$$

Step 2 (一般化グラミアンの計算) 各 T_{ij}^f において、以下のリアプノフ不等式を解く。

$$A_{ij}^f P + P A_{ij}^{fT} + B_{ij}^f B_{ij}^{fT} \leq 0, \quad P = \text{diag}(P_g, P_k) \geq 0$$

$$A_{ij}^{fT} Q + Q A_{ij}^f + C_{ij}^{fT} C_{ij}^f \leq 0, \quad Q = \text{diag}(Q_g, Q_k) \geq 0$$

ここで、 P_g および Q_g は G_{ij}^f に対応し、 P_k および Q_k は S_{ij}^f に対応する。便宜上、求めた各一般化可制御グラミアンを $\mathcal{P}\{T_{ij}^f\}$ 、各一般化可観測グラミアンを $\mathcal{Q}\{T_{ij}^f\}$ と表記する。

Step 3 (コントローラの低次元化) 平衡化する一般化グラミアンの組合せを $(\mathcal{P}\{T_{i_1 j_1}^{f_1}\}, \mathcal{Q}\{T_{i_2 j_2}^{f_2}\})_b$ と表記し、この組合せにより得られた低次元化コントローラを $\hat{K}[(\mathcal{P}\{T_{i_1 j_1}^{f_1}\}, \mathcal{Q}\{T_{i_2 j_2}^{f_2}\})_b]$ と書く。ここで、 i_1 (i_2)、 j_1 (j_2) および f_1 (f_2) は、それぞれ、 i 、 j および f と同じ値をとる。全ての組合せに対して低次元化コントローラを求め、その中で性能劣化の最も小さいものを最終的な低次元化コントローラ $\hat{K}_{opt}$ として選ぶ。すなわち、

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}_l(G, \hat{K}_{opt})\|_\infty &= \\ \min_{(i_1, j_1, f_1), (i_2, j_2, f_2)} &\|\mathcal{F}_l(G, \hat{K}[(\mathcal{P}\{T_{i_1 j_1}^{f_1}\}, \mathcal{Q}\{T_{i_2 j_2}^{f_2}\})_b])\|_\infty\end{aligned}$$

なる低次元化コントローラ $\hat{K}_{opt}$ を求める。

〔注釈 2〕 各サブシステム T_{ij}^f に関して、同じサブシステムの一一般化グラミアンを平衡化した場合（例えば $(\mathcal{P}\{T_{11}^1\}, \mathcal{Q}\{T_{11}^1\})_b$ のように）は、(11) 式より上界を求めることができるが、異なるサブシステムの一一般化グラミアンを平衡化した場合（例えば $(\mathcal{P}\{T_{12}^1\}, \mathcal{Q}\{T_{22}^2\})_b$ のように）は、(11) 式の関係を利用することができない。これは、もう一方の一般化グラミアン（上の例では、平衡化された一般化制御グラミアン $\mathcal{P}\{T_{12}^1\}$ に対して同じサブシステム T_{12}^1 の一般化可観測グラミアン $\mathcal{Q}\{T_{12}^1\}$ 、

また、平衡化された一般化可観測グラミアン $Q\{T_{22}^l\}$ に対して同じサブシステム T_{22}^l の一般化可観測グラミアン $P\{T_{22}^l\}$ に当たるが平衡化されていないためである。しかしながら、平衡化されていないもう一方の一般化グラミアンの影響が小さい場合には、誤差上界を得ることができる。次の定理はこれについて示したものである。

[定理 3] $T_{i_1 j_1}^{f_1} \in \mathcal{RH}_\infty$ の一般化可制御グラミアン $\mathcal{P}\{T_{i_1 j_1}^{f_1}\}$ と $T_{i_2 j_2}^{f_2} \in \mathcal{RH}_\infty$ の一般化可観測グラミアン $\mathcal{Q}\{T_{i_2 j_2}^{f_2}\}$ ($i_1 \neq i_2, j_1 \neq j_2$ and/or $f_1 \neq f_2$) が平衡であると仮定する。

$$\mathcal{P}\{T_{i_1 j_1}^{f_1}\} = \text{diag}(\mathcal{P}_q, \Sigma_k) \dots\dots\dots (44)$$

$$\mathcal{Q}\{T_{i_2 j_2}^{f_2}\} = \text{diag}(\mathcal{Q}_g, \Sigma_k) \dots\dots\dots (45)$$

$$\Sigma_k = \text{diag}(\Sigma_{k1}, \Sigma_{k2})$$

$$\Sigma_{k1} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_{\hat{m}_k})$$

$$\Sigma_{k2} = \text{diag}(\sigma_{\hat{m}_k+1}, \dots, \sigma_{m_k})$$

$$\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_{\hat{m}_k} > \sigma_{\hat{m}_k+1} \geq \cdots \geq \sigma_{m_k}$$

$T_{i_1 j_1}^{f_1}$ の一般化可観測グラミアン $Q\{T_{i_1 j_1}^{f_1}\}$ について,
 $\mathcal{P}\{T_{i_1 j_1}^{f_1}\} \geq Q\{T_{i_1 j_1}^{f_1}\}$ のとき, 次式が成り立つ。

$$\|\hat{T}_{i_1 j_1}^{f_1} - T_{i_1 j_1}^{f_1}\|_\infty \leq 2\text{tr}(\Sigma_{k_2}) \dots \dots \dots (46)$$

同様に, $T_{i_2 j_2}^{f_2}$ の一般化可制御グラミアン $\mathcal{P}\{T_{i_2 j_2}^{f_2}\}$ について, $\mathcal{Q}\{T_{i_2 i_2}^{f_2}\} \geq \mathcal{P}\{T_{i_2 i_2}^{f_2}\}$ ととき, 次式が成り立つ。

$$\|\hat{T}_{i_2 i_2}^{f_2} - T_{i_2 i_2}^{f_2}\|_\infty \leq 2\text{tr}(\Sigma_{k2}) \dots\dots\dots (47)$$

ただし、 $\hat{T}_{i_1 j_1}^{f_1}$ ($\hat{T}_{i_2 j_2}^{f_2}$) は低次元化既約因子 $\hat{S}_{i_1 j_1}^{f_1}$ ($\hat{S}_{i_2 j_2}^{f_2}$) で構成されたサブシステムである。

〔証明〕 サブシステム $T_{i_1 j_1}^{f_1}$ の実現を以下で与える。

$$T_{i_1 j_1}^{f_1} = \left[\begin{array}{c|c} A_* & B_* \\ \hline C_* & D_* \end{array} \right] \dots\dots\dots (48)$$

$\mathcal{Q}\{T_{i_1 i_1}^{f_1}\}$ は $T_{i_1 i_1}^{f_1}$ の一般化可観測グラミアンであるので,

$$C_*^T C_* \leq - \left(A_*^T \mathcal{Q}\{T_{i_1 j_1}^{f_1}\} + \mathcal{Q}\{T_{i_1 j_1}^{f_1}\} A_* \right) \dots \dots \dots (49)$$

が成り立つ。 $\Delta := \mathcal{P}\{T_{i_1, j_1}^{f_1}\} - \mathcal{Q}\{T_{i_1, j_1}^{f_1}\} \geq 0$ より,

$$A_*^T \mathcal{P}\{T_{i_1 j_1}^{f_1}\} + \mathcal{P}\{T_{i_1 j_1}^{f_1}\} A_* + C_*^T C_* \\ \leq A_*^T \Delta + \Delta A_* \leq 0 \dots\dots\dots (50)$$

となるので、 $\mathcal{P}\{T_{i,j_1}^{f_1}\}$ はサブシステム $T_{i,j_1}^{f_1}$ の一般化可観測グラミアンでもある。したがって、定理 1 より、サブシステム $T_{i,j_1}^{f_1}$ の Σ_{k2} に対応する状態変数を打ち切ることで (46) 式を得る。(47) 式も同様に導かれる。□

〔注釈 3〕 コントローラの既約因子の低次元化について言及しておく。コントローラ K の右既約因子 X_r と Y_r (左既約因子 X_l と Y_l) に共通のユニモジュラ行列が含まれない場合、それらの次数はコントローラ K の次数に等しい。したがって、このような既約因子を低次元化することで低次元化コントローラを求めることができる。いま、既約因子がその平衡化行列 T によって低次元化された場合を考える。低次元化された既約因子を $\hat{X}_r, \hat{Y}_r$ ($\hat{X}_l, \hat{Y}_l$)

図3 例題1および2の一般化プラント

Fig. 3. Generalized plant for examples.

とくと、低次元化コントローラ $\hat{K}$ は、 $\hat{K} = \hat{X}_r \hat{Y}_r^{-1}$ ($\hat{K} = \hat{Y}_l^{-1} \hat{X}_l$) で構成される。また、 $\mathcal{T}$ を直接 K に適用して低次元化を行っても $\hat{K}$ が得られることが知られている⁽¹¹⁾。本提案手法においては、例えば、図2の感度関数の右既約因子表現 T_{22}^r の一般化グラミアンを平衡化した場合を考えたとき、 K の低次元化既約因子は $\hat{S}_{22}^r = \hat{Y}_r$ のみが求まる。したがって、 $\hat{K} = \hat{X}_r \hat{Y}_r^{-1}$ というように低次元化コントローラを求めることはできないが、得られた平衡化行列 $\mathcal{T}$ を(8)式のように直接 K に適用して $\hat{K}$ を求めることができる。

5. 数值例

本節では、1 自由度振動系および無人高機動航空機 HIMAT⁽¹⁰⁾ の $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題を用いて、提案法の有効性を確認する。ここでは、 $\mathcal{H}_\infty$ 中心解コントローラ K を設計し、これを低次元化することを考える。制御システムの $\mathcal{H}_\infty$ ノルムが設定値 γ 未満となる $\mathcal{H}_\infty$ コントローラには自由度があり、中心解コントローラはその中核的な存在となる。この自由度をパラメータ Q で表現した場合、一般的な $\mathcal{H}_\infty$ コントローラ K_a は、

$$K_g = \mathcal{F}_l(M_\infty, Q), \quad Q \in \mathcal{RH}_\infty^{l_u \times l_e}, \quad \|Q\|_\infty < \gamma$$

..... (51)

で与えられる⁽⁴⁾。ここで、 M_∞ は問題とする一般化プラントおよび設定値 γ で決定される伝達関数であり、 l_u および l_e は K_g の入力数および出力数である。 M_∞ の実現を

$$M_\infty = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B}_1 & \bar{B}_2 \\ \hline \bar{C}_1 & \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} \\ \bar{C}_2 & \bar{D}_{21} & \bar{D}_{22} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (52)$$

で与えると, 中心解コントローラ K は,

$$K = \mathcal{F}_l(M_\infty, 0) = M_{11} \dots \dots \dots (53)$$

として得られる。この K に対して提案手法を適用するためには、提案アルゴリズムの **Step 1** において、 K と G_p の既約因子を求める必要がある。 K の既約因子の一組は、 M_∞ の実現から次のように計算することができる⁽⁴⁾。

$$\begin{bmatrix} X_r \\ Y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} - \bar{B}_1 \bar{D}_{21}^{-1} \bar{C}_2 & \bar{B}_1 \bar{D}_{21}^{-1} \\ \bar{C}_1 - \bar{D}_{11} \bar{D}_{21}^{-1} \bar{C}_2 & \bar{D}_{11} \bar{D}_{21}^{-1} \\ -\bar{D}_{21}^{-1} \bar{C}_2 & \bar{D}_{21}^{-1} \end{bmatrix} \dots \quad (54)$$

$$\begin{bmatrix} X_l^T \\ Y_l^T \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} (\bar{A} - \bar{B}_2 \bar{D}_{12}^{-1} \bar{C}_1)^T & (\bar{D}_{12}^{-1} \bar{C}_1)^T \\ \hline (\bar{B}_1 - \bar{B}_2 \bar{D}_{12}^{-1} \bar{D}_{11})^T & (\bar{D}_{12}^{-1} \bar{D}_{11})^T \\ \hline (-\bar{B}_2 \bar{D}_{12}^{-1})^T & (\bar{D}_{12}^{-1})^T \end{array} \right] \dots\dots\dots (55)$$

ここでは、これらを K の既約因子として用いる。 G_p については、正規既約分解を利用し、必要ならば、(36) 式のダブルベズー等式が成立するように G_p の既約因子を再選択する。また、一般化グラミアンは唯一でないので、提案アルゴリズムの **Step 2** において、 K の低次元化に利用するものを定める必要がある。一般化グラミアンの性質 2 で示したように、制御システム T_{zw} の一般化グラミアン $\mathcal{P}(\mathcal{Q})$ は、 T_{zw} のグラミアン $\mathcal{M}(\mathcal{N})$ と $\tilde{T}_{zw}$ のグラミアン $\tilde{\mathcal{M}}(\tilde{\mathcal{N}})$ の和となる。 $\mathcal{M}(\mathcal{N})$ は定数であるため、 $\tilde{\mathcal{M}}(\tilde{\mathcal{N}})$ の影響を小さくすることで誤差上界の保守性のある程度小さくすることができる。これは、また、各サブシステムについてもいえる。さらに、誤差上界はコントローラの既約因子に対応した部分 $\mathcal{P}_k$ および $\mathcal{Q}_k$ で決定されるため、ここでは Zhou ら⁽⁶⁾ や Oh ら⁽⁹⁾ に準じ、 $\text{tr}(\mathcal{P}_k)$ および $\text{tr}(\mathcal{Q}_k)$ が最小となるものを低次元化に利用する一般化グラミアンとして選ぶ。

なお、本例題では、以下の手法を用いて比較を行う。

- 重みなし既約因子平衡打ち切り法⁽⁴⁾⁽⁵⁾ (UWCF: Un-Weighted Coprime Factor reduction)
- 性能重みつき既約因子平衡打ち切り法^{†(4)(5)} (PWCF: Performance Weighted Coprime Factor reduction)
- 提案手法

【例題 1】(1 自由度振動系) 図 3 に示す一般化プラント G に対して、制御システム $T_{zw} = \mathcal{F}_l(G, K)$ の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムが設定値 $\gamma = 0.7140$ 未満となる中心解コントローラ K を設計する。各パラメータは次のとおりである。

$$P = \frac{100}{s^2 + 0.1s + 100}$$

$$W_{z1} = 5 \frac{0.1s + 1}{100s + 1}, \quad W_{z2} = 0.3 \frac{10s + 1}{0.01s + 1}$$

設計されたコントローラ K は 4 次元である。また、 $\|T_{zw}\|_\infty = 0.7073$ となり、設計仕様 $\|T_{zw}\|_\infty < 0.7140$ を満たす。結果を表 1 に示す。

【例題 2】(無人高機動航空機 HIMAT⁽¹⁰⁾) 図 3 に示す一般化プラント G に対して、制御システム $T_{zw} = \mathcal{F}_l(G, K)$ の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムが設定値 $\gamma = 2.0000$ 未満となる中心解コントローラ K を設計する。各パラメータは次のとおりである。

$$P = \left[\begin{array}{c|c} A_p & B_p \\ \hline C_p & 0 \end{array} \right]$$

$$A_p = \begin{bmatrix} -0.0226 & -36.6 & -18.9 & -32.1 \\ 0 & -1.9 & 0.983 & 0 \\ 0.0123 & -11.7 & -2.63 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.414 & 0 \\ -77.8 & 22.4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_p = \begin{bmatrix} 0 & 57.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 57.3 \end{bmatrix}$$

$$W_{z1} = \begin{bmatrix} \frac{50(s+100)}{s+10000} & 0 \\ 0 & \frac{50(s+100)}{s+10000} \end{bmatrix}$$

$$W_{z2} = \begin{bmatrix} \frac{0.5(s+3)}{s+0.03} & 0 \\ 0 & \frac{0.5(s+3)}{s+0.03} \end{bmatrix}$$

設計されたコントローラ K は 8 次元である。また、 $\|T_{zw}\|_\infty = 1.9455$ となり、設計仕様 $\|T_{zw}\|_\infty < 2.0000$ を満たす。結果を表 2 に示す。

表 1 および 2 から確認できるように、提案手法では、平衡化する一般化グラミアンを適切に選ぶことで、すべての次数において性能劣化を抑えることが可能となっている（例題 2 の 7 次元目では、他の手法と同様に、劣化のない低次元化コントローラを得ることが可能となっている）。さらに同表より、平衡化する一般化グラミアンによって、性能劣化の抑制が見られる次数がそれぞれ異なることがわかる。これは、「一般化グラミアンを組み合わせて平衡化する」という提案手法の特徴が性能劣化の抑制に効果的であるということを示している。また、従来手法と異なり、提案手法では既約分解で表現されたサブシステム T_{ij}^f （これは閉ループ構造を持つサブシステム $T_{z_i w_j}$ と等価である）を対象に低次元化を行うため、設計時に付加される重み W_{z1} および W_{z2} の特性を陽に考慮することができる。これにより、提案手法では制御システムの閉ループ特性（閉ループ安定性および $\mathcal{H}_\infty$ 制御性能）を直接的に考慮することができると考えられる。この結果と提案手法の特徴（サブシステムの一般化グラミアンを組み合わせて平衡化すること）から、提案手法は、例題 1 および 2 のように感度関数や相補感度関数などの複数の伝達関数を同時に考慮した $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題（混合感度問題など）に対して有効となると考えられる。

6. おわりに

本論文では、一般化グラミアンの組合せによるコントローラの低次元化について述べた。今回提案したコントローラ低次元化法は、既約分解を用いて記述された各サブシステム T_{ij}^f においてブロック対角の一般化グラミアン $\mathcal{P}\{T_{ij}^f\}$ および $\mathcal{Q}\{T_{ij}^f\}$ を求め、これらを組み合わせて平衡化することで、コントローラの低次元化によって生じる性能（ $\mathcal{H}_\infty$ 性能）の劣化抑制を目指した手法である。また、提案手法の有効性を確認するため、数値例（1 自由度振動系および無人高機動航空機 HIMAT⁽¹⁰⁾ の $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題）を用いて従来の手法と提案手法の比較を行った。その結果、提案手法は性能劣化の抑制に有効であることが確認できた。（平成 18 年 9 月 25 日受付，平成 19 年 5 月 15 日再受付）

[†] PWCF 法では重みつきの低次元化問題を解く必要がある。ここでは、Oh ら⁽⁹⁾ の重みつき低次元化法を利用する。

表 1 例題 1 における $\hat{T}_{zw} = \mathcal{F}_l(G, \hat{K})$ の $\mathcal{H}_\infty$ ノルム ($\|T_{zw}\|_\infty = 0.7073$)Table 1. $\mathcal{H}_\infty$ norm of $\hat{T}_{zw} = \mathcal{F}_l(G, \hat{K})$ in the example 1 ($\|T_{zw}\|_\infty = 0.7073$)

Order of $\hat{K}$	UWCF		PWCF		Proposed method				
	Right ^{#1}	Left ^{#1}	Right	Left	$(\mathcal{P}\{T_{11}^r\}, \mathcal{Q}\{T_{11}^l\})_b$	$(\mathcal{P}\{T_{21}^r\}, \mathcal{Q}\{T_{11}^l\})_b$	$(\mathcal{P}\{T_{12}^r\}, \mathcal{Q}\{T_{22}^l\})_b$	$(\mathcal{P}\{T_{12}^r\}, \mathcal{Q}\{T_{12}^l\})_b$	$(\mathcal{P}\{T_{22}^r\}, \mathcal{Q}\{T_{22}^l\})_b$
1	7.0746	7.0540	7.0746	U	8.4276	8.4233	7.0465	U	7.0580
2	7.0746	1.7518	7.0746	1.7518	<u>1.2711</u>	<u>1.2657</u>	7.0821	2.3620	U
3	1.7457	1.2974	1.9173	1.3116	<u>0.7394</u>	<u>0.7399</u>	7.0666	U	U

^{#1}Controller reduction with Right or Left coprime factor of K ^{#2}Closed-loop system $\hat{T}_{zw}$ is unstable表 2 例題 2 における $\hat{T}_{zw} = \mathcal{F}_l(G, \hat{K})$ の $\mathcal{H}_\infty$ ノルム ($\|T_{zw}\|_\infty = 1.9455$)Table 2. $\mathcal{H}_\infty$ norm of $\hat{T}_{zw} = \mathcal{F}_l(G, \hat{K})$ in the example 2 ($\|T_{zw}\|_\infty = 1.9455$)

Order of $\hat{K}$	UWCF		PWCF		Proposed method				
	Right	Left	Right	Left	$(\mathcal{P}\{T_{11}^r\}, \mathcal{Q}\{T_{22}^l\})_b$	$(\mathcal{P}\{T_{11}^r\}, \mathcal{Q}\{T_{11}^l\})_b$	$(\mathcal{P}\{T_{12}^r\}, \mathcal{Q}\{T_{12}^l\})_b$	$(\mathcal{P}\{T_{22}^r\}, \mathcal{Q}\{T_{22}^l\})_b$	$(\mathcal{P}\{T_{11}^r\}, \mathcal{Q}\{T_{11}^l\})_b$
1	328.96	U	330.69	U	334.78	336.74	<u>325.50</u>	U	40521
2	163.46	U	182.80	U	178.87	<u>74.922</u>	362.86	U	1746.3
3	122.60	U	186.85	U	<u>102.25</u>	95.911	174.40	U	U
4	85.623	U	147.47	U	<u>19.795</u>	<u>77.187</u>	<u>78.323</u>	U	196.40
5	27.552	U	4.7331	U	<u>3.2632</u>	114.60	80.782	U	149.11
6	2.3843	11.086	2.1915	9.3506	<u>1.9806</u>	93.353	95.177	3.3958	66.770
7	1.9455	1.9455	1.9455	1.9455	1.9455	8.4615	2.8085	1.9455	1.9755

文 献

- (1) D. Enns: "Model reduction for control system design", Ph.D Dissertation, Department of Aeronautics and Astronautics, Stanford university, Stanford, CA (1984)
- (2) C.A. Lin and T.Y. Chiu: "Model reduction via frequency weighted balanced realization", control theory and advanced technology, Vol.8, No.2, pp.341–351 (1992)
- (3) G. Wang, V. Sreeram, and W. Q. Liu: "A New Frequency-Weighted Balanced Truncation Method and an Error Bound", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.44, No.9, pp.1734–1737 (1999)
- (4) K. Zhou, J.C. Doyle, and K. Glover: Robust and optimal control, Prentice-Hall (1996) (in Japanese)
劉 康志・羅 正華:「ロバスト最適制御」, 昭晃堂 (1997)
- (5) G. Obinata, B.D.O. Anderson: Model reduction for Control System Design, Springer (2001) (in Japanese)
大日方五郎・B. アンダーソン:「制御システム設計」, 朝倉書店 (1999)
- (6) K. Zhou, C. D'Souza, and J.R. Cloutier: "Structurally balanced controller order reduction with guaranteed closed loop performance", Systems & Control Letters, 24, pp. 235–242 (1995)
- (7) P.M.R. Wortelbore: "Frequency-weighted balanced reduction of closed-loop mechanical servo-systems", Ph.D. Thesis, Delft University of Technology (1994)
- (8) B.C. Moore: "Principal component analysis in linear systems", IEEE Trans. Automat. contr., 26, pp.17–32 (1981)
- (9) D.C. Oh, and J.H. Kim: "A simple frequency weighted model reduction using structurally balanced truncation: existence of solutions", INT. J. CONTROL, Vol.75, No.15, pp. 1190–1195 (2002)
- (10) The Math Works Inc.: μ Analysis and Synthesis Toolbox User's Guide for Use with MATLAB (version 3), The Math Works Inc. (1998)
- (11) 藤森 篤:「ロバスト制御」, コロナ社 (2001)

安 里 健太郎 (学生員) 1980 年 6 月 28 日生。2005 年 3 月琉球大学大学院理工学研究科電気電子工学専攻修士課程修了。同年 4 月同大学院理工学研究科総合知能工学専攻博士課程に進学, 現在に至る。システムの低次元化に関する研究に従事。

長 堂 勤 (正員) 1963 年 9 月 17 日生。1988 年 3 月琉球大学大学院修士課程修了。1991 年 3 月早稲田大学大学院博士課程後期中退。同年 4 月琉球大学工学部助手。1997 年同助教授。主として制御器の低次元化, ロバスト制御に関する研究に従事。博士 (工学)。

玉 城 史 朗 (正員) 1955 年 11 月 29 日生。1981 年 3 月徳島大学大学院修士課程修了。1983 年 7 月大阪大学大学院博士課程退学。大阪大学助手, 岡山理科大学講師を経て 1988 年琉球大学工学部助教授。1996 年同大学教授。主としてセンサネットワーク, 自然エネルギーに関する研究に従事 (工学博士)。