森林火災を模擬した二次元インパクトモデルの定性的性質

非会員 朝長 伸吾* 正員 高坂 拓司*

Qualitative Analysis in a Second-Order Impact Model for Forest Fires

Shingo Tomonaga*, Non-member, Takuji Kousaka*, Member

Natural forest fires are the problems that influence ecosystems, and they have been researched from of old. For solving this problem, a prediction model for forest fires was proposed. The model imitates fires that are seen in mediterranean forests, boreal forests and savannas. In recent years, it was simplified a second-order impact model. Furthermore, the model of mediterranean forests have been analyzed. However, the others are insufficient yet, and the qualitative property of forest fires has not been discussed enough. In this letter, we analyze the second-order impact model that is seen in boreal forests and savannas. Moreover, we consider what bifurcation phenomena essentially influences some periodic solutions.

キーワード：森林火災，定性的性質，衝突モデル，分岐

Keywords: forest fires, qualitative property, impact model, bifurcation

1. まえがき

生態系に影響を及ぼす問題のひとつに森林火災があり，その振る舞いは気候や発生条件によって様々な種類に分けられる。複雑な火災の挙動を解明するため，R. Casagrandiらは長期的・大域的な火災予測モデルを提案し，過去の観測データをパラメータに対応させることで，いくつかの地域における森林火災を常微分方程式で模擬した⁽¹⁾。近年，このモデルは二次元インパクトモデルへと簡素化され，地中海森林，北方森林，サバンナにみられる火災の振る舞いは二次元系で記述可能となった⁽²⁾。特に地中海森林で発生する火災は，リターンマップおよび分岐理論を用いて解析され，そのメカニズムは明らかにされつつある⁽³⁾⁽⁴⁾。一方，北方森林およびサバンナで観測される火災について，パラメータ範囲に着目した解析は行われておらず，その定性的性質に関する議論は未だ不十分である。

本論文では，北方森林およびサバンナにみられる森林火災モデルの定性的性質を検討する。具体的には，リターンマップを用いて分岐現象の詳細を示し，各森林火災を模擬するためのパラメータ範囲について議論する。

2. 二次元インパクトモデル

一般に，森林は地被植物および草花等の下層植物とスギ等の樹木を含む上層木の二種類に分けられる。これらの植物量を状態変数 B および T とすると，二次元インパクト

モデルは次式で記述される⁽²⁾。

$$\begin{cases} \frac{dB}{dt} = r_B B \left(1 - \frac{B}{K_B}\right) - \alpha B T \\ \frac{dT}{dt} = r_T T \left(1 - \frac{T}{K_T}\right) \end{cases} \dots\dots\dots (1)$$

(1) 式において r は植物の生長率， K は環境容量， α は下層植物の日射依存率に対応しており，これらのパラメータ範囲は過去の観測データより決定されている⁽¹⁾。また，発火は図1における境界Dと解軌道の急激な減少で模擬される。ここで，境界は K と K に対する発火限界比率 ρ ，下層植物と上層木の同時発火比率 σ ，火災による植物量の生存比率 λ によって次の三種類に分けられる。まず，解軌道における D_1 への到達は上層木のみが発火を表しており， B は変化することなく T のみが急激に減少する。その後火災が落ち着くと，解軌道は再び(1)式に従い増加する。一方，

Fig. 1. Example of the solution orbits.

* 大分大学工学部

〒 870-1192 大分県大分市大字旦野原 700 番地

Oita University.

700, Dannoharu, Oita-shi, Oita 870-1192

Fig. 2. Examples of the phase portrait and the return map. ($r_B = 0.38, r_T = 0.06, K_B = K_T = 1.0, \alpha = 0.16, \sigma_B = 0.6, \sigma_T = 0.35, \lambda_B = \lambda_T = 10^{-4}, \rho_B = 0.9, \rho_T = 0.6$)

解軌道が D_3 に到達した場合は下層植物にのみ火災が発生するため、変化する状態変数は B のみとなる。また解軌道が D_2 に到達した場合、 B および T は解の状態に依存して一定の比率で減少する。図 2(a) に状態平面図の一例を示す。以降の解析のため、次式を定義する。

$$X_k = \frac{B_k}{\rho_B K_B + \sigma_T K_T} \begin{cases} B \in [0, \rho_B K_B] \\ T \in [\sigma_T K_T, \rho_T K_T] \end{cases} \dots\dots\dots (2)$$

$$X_k = 1 - \frac{T_k}{\rho_B K_B + \sigma_T K_T} \begin{cases} B = \rho_B K_B \\ T \in [0, \sigma_T K_T] \end{cases} \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 X_k は解軌道が境界に到達したときの解によって導出され、その境界が D_1 もしくは D_2 の場合は (2) 式、 D_3 の場合は (3) 式にそれぞれ対応する。同様に X_{k+1} を導出すると、火災による植物量の振る舞いは離散化され、次式で記述可能となる。

$$X_{k+1} = F(X_k) \dots\dots\dots (4)$$

図 2(b) に (a) と対応したリターンマップを示す。詳細は文献 (4) 参照。なお、 ρ は北方森林およびサバンナに分類される様々な地域において、その土地の気候や風土に依存し、火災の発生条件を特徴づけるパラメータである。このため、以降の解析は ρ_T および ρ_B に注目し、その定性的性質を検討する。

3. 解析結果

まず、北方森林にみられる火災は過去の観測データより周期的に発生することが知られている。本論文では、文献 (2) で示されたパラメータ、 $r_B = 0.3, r_T = 0.07, K_B = 0.1, K_T = 3.0, \sigma_B = 0.2, \sigma_T = 0.1, \lambda_B = \lambda_T = 0.01, \alpha = 0.05$ で上記の森林を模擬し、以下の解析を進める。図 3(a) に ρ_T - ρ_B 平面における二次元分岐図を示す。ここで、各領域の導出には (4) 式に brute force 法⁽⁵⁾を適用しており、点線は周期倍分岐 (以下 PD 分岐)、細線は Border-Collision 分岐 (以下 BC 分岐)、太実線はそのどちらもが同時に発生する分岐 (以下 PD+BC 分岐) をそれぞれ示している。なお BC 分岐は、解軌道の一部が境界を越えて周期解やカオスアトラクタに影響を及ぼす分岐現象であり、電気系をは

Fig. 3. Two-dimensional bifurcation diagram.

じめとする広い分野でその本質的な特性が議論されている。また PD+BC 分岐は、PD 分岐によって不安定化された解軌道が境界を跨ぐ分岐現象である。図中において、1 周期解領域と 2 周期解領域間では PD 分岐が、1 周期解領域とカオスアトラクタ領域間では PD+BC 分岐が観測される。先に述べたように、北方森林にみられる火災は同じ周期で発生するため、その振る舞いは下層植物または上層木における発火限界比率が比較的高い、斜線領域のパラメータで記述可能である。

次に、サバンナにみられる火災は次のパラメータ、 $r_B = 1.5, r_T = 1.0, K_B = 0.4, K_T = 0.5, \sigma_B = 0.1, \sigma_T = 0.99, \lambda_B = 0.1, \lambda_T = 0.2, \alpha = 1.5$ により特徴づけられる。図 3(b) にその二次元分岐図を示す。サバンナの場合も周期的な火災が観測されるため、1 周期解領域に関する分岐現象を議論する。図中の 1 周期解領域と 2 周期解領域間では PD 分岐、1 周期解領域とカオスアトラクタ領域間では PD+BC 分岐の発生が確認できる。

4. むすび

本論文では、北方森林およびサバンナにみられる火災を模擬した二次元インパクトモデルのパラメータ範囲を検討した。各森林火災と対応するパラメータを用いて解析を行った結果、上記の森林で 1 周期解が発生することを鑑みると、その定性的性質の変化には PD 分岐が本質的な影響を及ぼしていることが明らかとなった。

謝 辞

有益なご助言をいただいた徳島大学上田哲史先生に深謝いたします。

(平成 20 年 3 月 3 日受付, 平成 20 年 4 月 4 日再受付)

文 献

- (1) R. Casagrandi and S. Rinaldi: "A minimal model for forest fire regimes", Am. Nat., Vol.153, No.5, pp.527-539 (1999-5)
- (2) S. Maggi and S. Rinaldi: "A second-order impact model for forest fire regimes", Theoretical Population Biology, Vol.70, No.2, pp.174-182 (2006-9)
- (3) F. Dercole and S. Maggi: "Detection and continuation of a border collision bifurcation in a forest fire model", Applied Mathematics and Computation, Vol.168, No.1, pp.623-635 (2005-9)
- (4) F. Bizzarri, L. Caruso, and M. Stora: "Bifurcation analysis of a second-order impact model for forest fire prediction through a 1D-map", Circuits and Systems, Proc. IEEE Conf. on ISCAS, pp.2725-2728 (2006-5)
- (5) 川上 博・上田哲史:「C によるカオス CG」, サイエンス社 (1994)